Université de Msila

Département de Mathématiques et d'Informatique

Série N: 05

(La continuité des fonctions)

1^{ier} Anné L.M.D.(M.I)

Module: Analyse 01

A. U: 2020/2021

Exercice 1

Établir s'il existe des valeurs de a, pour lesquelles les fonctions suivantes sont continues au point x_0 indiqué

1 $f(x) = \begin{cases} \frac{x+1}{x^3+1} & : x \neq -1, \\ a & : x = -1. \end{cases} \quad x_0 = -1;$ **2** $g(x) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{x} & : x \neq 0, \\ a & : x = 0. \end{cases} \quad x_0 = 0.$

Exercice 2

Soit f une fonction périodique sur $\mathbb{R}$

1 Montrer que f est bornée.

2 Montrer que si f admet une limite lorsque x tend vers $+\infty$ alors $f \equiv l$.

3 Application: $f(x) = \cos x$ et $f(x) = \sin x$.

Exercice 3

Soient f, g deux fonctions définies comme suivant:

1 $f(x) = \begin{cases} \left|\frac{\sin x}{x}\right|, & \text{si } x \neq 0; \\ 1, & \text{si } x = 0. \end{cases}$ **2** $g(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{|x|}, & \text{si } x \neq 0 \\ 1, & \text{si } x = 0. \end{cases}$

Étudier la continuité de f et g.

Exercice 4

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $\begin{cases} x[x] & : x \neq 0 \\ 1 & : x = 0. \end{cases}$

Déterminer l'ensemble des points $x \in \mathbb{R}$ où f est continue. Tracer son graphe.

Exercice 5

La fonction définie sur $\mathbb{R} - \{1, 0\}$ par $f(x) = 1 - x - \frac{2x \ln |x|}{x+1}$ peut-elle être prolongée par continuité en 1 et en 0?

Exercice 6

Étudier la continuité des fonctions suivantes sur leur domaine de définition.

1 $f(x) = \begin{cases} \left|\frac{|x|\sqrt{|x|}}{x}\right| & : x \neq 0 \\ 0 & : x = 0. \end{cases}$

2 $g(x) = \begin{cases} x^2 & : 0 < x \leq 1 \\ x - [x] & : 1 < x < 2 \\ 1 - x + [x] & : 2 \leq x < 3. \end{cases}$

Exercice 7

On considere la fonction f definie sur $[0, \infty[$ par

$$f(x) = (x^2 - 3x + 3)e^x - 4.$$

1 Determiner la limite de f en $+\infty$.

Étudier les variations de f sur $[0, +\infty[$.

2 Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique x_0 appartenant à $]1, 2[$.

3 Deduire des résultats précédents le signe de $f(x)$ sur $[0, +\infty[$.

Exercice 8

Soit f une fonction definies et continue sur $[0, 1]$ tel que pour tout $x \in [0, 1]$ on a $f(x) \in [0, 1]$. Montrer qu'il existe un point fixe de f dans $[0, 1]$, i.e. il existe $x_0 \in [0, 1]$ tel que $f(x_0) = x_0$.

Exercice 9

Soient $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue, $n \in \mathbb{N}^*$ et $x_1, ..., x_n \in \mathbb{R}$. Montrer qu'il existe $c \in \mathbb{R}$ tel que

$$f(c) = \frac{f(x_1) + ... + f(x_n)}{n}.$$

⋆ Bonne chance ⋆