Université de Msila
Département de Mathématiques et d'Informatique

Série N: 01
(Les Nombres Réels)

1^{ier} Année L.M.D.(M.I)
Module: Analyse 01
A. U: 2020/2021

Remarque

l'exercice noté par $(*)$ ne sera pas corrigé dans le sience de TD

Exercice 1

Soit n un nombre naturel où $n \geq 2$. Montrer que,

1. $\forall x \in \mathbb{R} : |x| = \max\{x, -x\}$.
2. $\forall x, y \in \mathbb{R} : |x + y| \leq |x| + |y|$.
3. $\forall x, y \in \mathbb{R} : \Big||x| - |y|\Big| \leq |x - y|$.
4. $\forall x_1, x_2, ...x_n \in \mathbb{R} : \left|\sum_{k=1}^{n} x_k\right| \leq \sum_{k=1}^{n} |x_k|$.

Exercice 2

Soit A une partie non vide et bornés de $\mathbb{R}$. On définit l'ensemle

$$-A = \{-x : x \in A\}.$$

Montrer que $\sup(-A) = -\inf(A)$ et $\inf(-A) = -\sup(A)...(*)$

Exercice 3

Déterminer-lorsqu'ils existent-l'ensemble des majorants, l'ensemble des minorants, la borne inférieure (inf), la borne supérieure (sup), le plus petit élément (min) et le plus grand élément (max) des parties de $\mathbb{R}$ suivantes

1. $A_1 =]-2, 5] \cup \{8\}$,
2. $A_2 = \{\frac{1}{x} : -4 \leq x \leq -1\}$,
3. $A_3 = \{3 + \frac{2}{n} : n \in \mathbb{N}^*\}$,
4. $A_4 = \{(-1)^n + \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}^*\}...(*)$

Exercice 4

Soient A et B deux parties non vides et bornés de $\mathbb{R}$. Montrer que

1. Si $A \subset B$, alors, $\inf(B) \leq \inf(A) \leq \sup(A) \leq \sup(B)$.
2. Si $A \cap B \neq \emptyset$, alors, $A \cap B$ est borné et que

$$\max\{\inf(A), \inf(B)\} \leq \inf(A \cap B) \leq \sup(A \cap B) \leq \min\{\sup(A), \sup(B)\}.$$

3. $\sup(A \cup B) = \max\{\sup(A), \sup(B)\}...(*)$ et $\inf(A \cup B) = \min\{\inf(A), \inf(B)\}...(*)$

Exercice 5

Soit $[x]$ la partie entière de x, montrer que

1 $\forall x, y \in \mathbb{R} : x \leq y \Rightarrow [x] \leq [y]$.

2 $\forall x \in \mathbb{R},\ \forall a \in \mathbb{Z} : [x+a] = [x] + a$.

3 Est ce que $\forall x, y \in \mathbb{R} \quad [x+y] = [x] + [y]$ et $[xy] = [x][y]$.

4 $(*)...[x] + [-x] = \begin{cases} 0, & x \in \mathbb{Z}; \\ -1, & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}. \end{cases}$

Exercice 6

Soient $D = \{x^2 + y^2 : (x,y) \in \mathbb{R}^2 \text{ et } xy = 1\}$ et $E = \{x \times y : (x,y) \in \mathbb{R}^2 \text{ et } |x| + |y| < 1\}$

1 Déterminer la borne inférieure de D. Est-ce-qu'il possède un majorant ?.

2 Montrer que E est borné et déterminer $\sup E.(*)$ et $\inf E.(*)$