Université de Msila

Département de Mathématiques et d'Informatique

Série N: 06

(La dérivabilité des fonctions)

1^{ier} Anné L.M.D.(M.I)

Module: Analyse 01

A. U: 2020/2021

Exercice 1

Étudier, à l'aide de la définition, la dérivabilité de la fonction f en x_0 si:

1. $f(x) = |x| + x^2,\ x_0 = 0;$
2. $f(x) = (x-2)[x],\ x_0 = 2;$
3. $f(x) = \sqrt{|x-3|},\ x_0 = 3;$
4. $f(x) = \begin{cases} x^2\cos(\frac{1}{x}) & : x \neq 0, \\ 0 & : x = 0. \end{cases} \quad x_0 = 0;$
5. $f(x) = \begin{cases} x^2 e^{-x^2} & : |x| \geq 1, \\ 0 & : |x| < 1. \end{cases} \quad x_0 = 1;$

Exercice 2

Soient $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue, et $x_0 \in \mathbb{R}$. On définit la fonction f sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (x-x_0)g(x)$. Montrer que f est derivable au point x_0 et calculer $f'(x_0)$.

Exercice 3

Calculer les dérivées d'ordre $n$des fonctions suivantes:

1. $f(x) = e^{ax},\ a \neq 0;$
2. $f(x) = \frac{1+x}{1-x},$
3. $f(x) = \sin x.$

Exercice 4

On définit la fonction f par $\quad f(x) = \begin{cases} \frac{1-\cos x}{x}, & \text{si } x > 0; \\ 0, & \text{si } x = 0. \end{cases}$

1. Calculer la limite de f en 0.
2. Montrer que la fonction f est continue sur $[0, +\infty[$.
3. Montrer que f est dérivable en 0.
4. Montrer que la fonction f est dérivable sur $[0, +\infty[$.
5. La fonction f' est-elle continue sur $[0, +\infty[$?.

Exercice 5

Soit la fonction f, définie sur $\mathbb{R}$ par $\quad f(x) = \begin{cases} x^2 \sin\frac{1}{x} & : x \neq 0; \\ 0 & : x = 0. \end{cases}$

1. Montrer que la fonction f est continue sur $\mathbb{R}$.

2 Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}$, et trouver f'.

3 Montrer que f' n'est pas contine au point 0.

Exercice 6

Est-ce-qu'on peut appliquer le théorème de Rolle au fonction suivantes:

1 $g(x) = |x+1|, \; x \in [-3, 2]$,

2 $h(x) = \sqrt{9 - x^2}, \; x \in [-3, 3]$.

3 $f(x) = \begin{cases} 0 & : \; x = 0, \\ 1 - x & : x \in]0, 1], \end{cases}$

Exercice 7

Étudier la variation de fonction $f(x) = x^5 - 5x + 1$ définie sur $\mathbb{R}$. En déduire que l'équation $x^5 - 5x + 1 = 0$ admet trois solutions réelles distinctes.

Exercice 8

Montrer à l'aide du théorème des accroissements finis que:

1 $e^x > 1 + x$, pour tout réel x.

2 $\ln x \leq x - 1$, pour tout réel $x > 0$.

3 $|\sin x| \leq |x|$, pour tout réel x.

4 $\sqrt{1+x} \leq 1 + \frac{1}{2}x$ pour tout réel positif x.

Exercice 9

On définit la fonction $f :]0, +\infty[\to]0, +\infty[$ par $f(x) = xe^x$.

1 Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe un unique $u_n \in]0, +\infty[$ tel que $f(u_n) = n$.

2 Etudier la monotonie et la convergence de la suite $(u_n)_{n \geq 1}$.

Exercice 10

Montrer que l'équation $x^3 - 3x + 1 = 0$, admet au moins une racine entre 0 et 1. La racine est-elle unique ?.

Exercice 11

Soit $f : [a, b] \to [a, b]$ une fonction telle que

$$\forall x, x' \in [a, b] : x \neq x', \text{ on a } |f(x) - f(x')| < |x - x'|.$$

1 Montrer que Montrer que f est continue sur $[a, b]$.

2 Montrer que l'équation $f(x) = x$ admet une solution unique.

Exercice 12

Soit a et b deux nombres réels. On definit la fonction f sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \begin{cases} ax+b & : x \leq 0; \\ \frac{1}{1+x} & : x > 0. \end{cases}$

1. Donner une condition sur b pour que f soit continue sur $\mathbb{R}$.
2. Déterminer a et b tels que f soit derivable sur $\mathbb{R}$ et dans ce cas calculer $f'(0)$.

Exercice 13

Soit a et Soit f une fonction dérivable en a. Trouver $\lim_{h\to 0} \frac{f(a+h^2)-f(a+h)}{h}$.

Exercice 14

Soit la fonction f definie par $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{chc} & : x > 0; \\ 1 - shx & : x \leq 0. \end{cases}$

1. Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer que f est dérivable au point 0.
   (Indication: $chx \sim 1 + \frac{x^2}{2}$, $shx \sim x$ si $x \to 0$.)
3. Étudier la continuité et la fonction dérivée f' au point 0.
4. Soit g la restriction de la fonction f sur l'intervalle $]0, +\infty[$ dans $]0, 1[$.
   - a. Montrer g admet une fonction réciproque g^{-1}.
   - b. Trouver $g^{-1}(x)$ pour tout $x \in]0, 1[$.
   - c. En utilisans la formule de dérivée de la fonction réciproque, trouver $(g^{-1})'(x)$ pour tout $x \in]0, 1[$.

Exercice 15

Pour tout entier naturel n non nul, on définit la fonction f_n de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ par

$$f_n(x) = x^5 + nx - 1$$

1. - a. Montrer que: $\forall n \in \mathbb{N}^*, \ \exists u_n \in \mathbb{R} : \ f(u_n) = 0$.
   - b. Montrer que, $\forall n \in\in \mathbb{N}^*, \ \exists u_n \in [0, 1]$.
2. - a. Calculer $f_{n+1}(u_n)$ en fonction de u_n.
   - b. En déduire la monotonie de la suite (u_n).
3. - a. Montrer que la suite (u_n) est convergente et que sa limite l appartient à $[0, 1]$.
   - b. Montrer, en raisonnant par l'absurde, que $l = 0$.

⋆ Bonne chance ⋆