Université de Msila

Département de Mathématiques et d'Informatique

Série N: 03

(Les Suites Numériques)

1^{ier} Anné L.M.D.(M.I)

Module: Analyse 01

A. U: 2020/2021

Exercice 1

En utilisant la définition de la limite montrer que

1. $\lim_{n\to+\infty} \frac{2n+1}{n+1} = 2$
2. $\lim_{n\to+\infty} (4 + \frac{1}{n+2}) = 4$
3. $\lim_{n\to+\infty} \sqrt{2n+1} = +\infty.$

Exercice 2

Calculer les limites suivantes

1. $\lim_{n\to+\infty} [(-1)^n + \frac{2}{n+1}]$
2. $\lim_{n\to+\infty} \left(4 + \frac{(-1)^n}{n^2+1}\right)$
3. $\lim_{n\to+\infty} (\sqrt{n+1} - \sqrt{n})$
4. $\lim_{n\to+\infty} \frac{n\sin(n!)}{n^2+1} = 2$
5. $\lim_{n\to+\infty} (\frac{2^{n+1}+3^{n+1}}{2^n+3^n})$
6. $\lim_{n\to+\infty} \ln(\ln n)$
7. $\lim_{n\to+\infty} \frac{1+2+...+n}{n+2} - \frac{n}{2}$
8. $\lim_{n\to+\infty} \frac{n^n}{n!}$, (indication: montrer que $n! > (\frac{n}{3})^n$)
9. $\lim_{n\to+\infty} \frac{\ln(n+\ln n)}{\ln(2n+\ln n)}$
10. $\lim_{n\to+\infty} \frac{\alpha^n-\beta^n}{\alpha^n+\beta^n}$ $(\alpha, \beta \in \mathbb{R}_+^*.$

Exercice 3

Soit la suite de terme général

$$u_n = \frac{1}{1\times 2} + \frac{1}{2\times 3} + \frac{1}{3\times 4} + ... + \frac{1}{n(n+1)}.$$

1. Montrer qu'il existe deux réels a, b tels que $u_n = \frac{a}{n} + \frac{b}{n+1}$.
2. Calculer $\lim_{n\to+\infty} u_n$.

Exercice 4

Etudier la monotonie des suites suivantes et en déduire eventuellement leur nature:

1

a) $u_n = 1 + \frac{2}{n+1}$

b) $u_n = \frac{n^2+1}{2n+1}$

c) $u_n = \sqrt{\frac{n+1}{2n}}$

d) $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k}$

e) $u_n = \frac{1^2+2^2+...+n^2}{n^2}$.

2 Les suites précédantes sont elle bornées?.

Exercice 5

Etudier la bornitude des suite (u_n) définies par:

1

a) $u_n = \sqrt{\frac{n}{n+1}}$

b) $u_n = \frac{n \cos n}{2n+2+\cos n}$

c) $u_n = \frac{n \sin n}{2n+2+\sin n}$

2

a) $u_n = \sum_{k=0}^{k=n} \cos k$

b) $u_n = \sum_{k=0}^{k=n} \sin k$

c) $u_n = \ln(\ln n)$.

Exercice 6

Soit la suite définie pour tout $n \geq 1$ par:

$$u_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + ... + \frac{1}{n+n}$$

Montrer que la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ est croissante et majorée. (et donc convergente !)

Exercice 7

Soit $(u_n)_{n\geq 1}$ la suite definie par

$$u_n = \frac{\sin 1}{n^2+1} + \frac{\sin 2}{n^2+2} + ... + \frac{\sin n}{n^2+n}$$

1 Montrer que la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ converge et trouver sa limite l

2 Trouver un entier N tel que, pour tout $n \geq N$, on ait $|u_n - l| \leq 10^{-2}$.

Exercice 8

Montrer que les deux suites (u_n) et (v_n) définies par

$$u_n = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + ... + \frac{1}{n!}, \quad v_n = u_n + \frac{1}{n!},$$

sont adjacentes.

Exercice 9

Soient les suites $(u_n)_{n\geq 1}$ et $(v_n)_{n\geq 1}$ définies par

$$u_1 = 4,\ v_1 = 1,\ u_{n+1} = \frac{1}{3}(2u_n + v_n),\ \text{et } v_{n+1} = \frac{1}{3}(u_n + 2v_n).$$

1. Montrer que pour tout $n \geq 1$, on a $u_{n+1} - v_{n+1} = \frac{1}{3^{n-1}}$.
2. En déduire que les suites $(u_n)_{n\geq 1}$ et $(v_n)_{n\geq 1}$ sont adjacentes.

Exercice 10

On considère les suites (u_n) et (v_n) définies par

$$\begin{cases} u_0 = 0, \\ \forall n \in \mathbb{N} :\ u_n = \frac{4u_n+3}{u_n+2},\ \text{et } v_n = \frac{u_n-3}{u_n+1}. \end{cases}$$

1. Calculer u_1, v_0 et v_1.
2. Montrer par récurrence que: $\forall n \in \mathbb{N}$ on a $u_n \geq 0$.
3. (a) Exprimer v_{n+1} en fonction de v_n.

   (b) En déduire la nature de la suite (v_n) et ses éléments caractéristiques.

   (c) Exprimer v_n en fonction de n.
4. A l'aide d'une relation liant u_n et v_n, exprimer u_n en fonction de v_n, puis de n.

Exercice 11

On considère la suite (u_n), définie par $\begin{cases} u_0 = 0, \\ \forall n \in \mathbb{N} :\ u_n = \frac{2u_n+3}{u_n+4}. \end{cases}$

1. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N} :\ 0 \leq u_n \leq 1$.
2. Montrer que la suite (u_n) est convergente.
3. Conclure.

Exercice 12

On considère la suite $(u_n)_{n\geq 1}$, définie par $u_n = \sum_{k=1}^{k=n} \frac{(-1)^k}{k}$

1. Montrer que la suite extraite $(u_{2n})_{n\geq 1}$ est décroissante et que la suite extraite $(u_{2n+1})_{n\geq 0}$ est croissante.
2. Calculer $\lim_{n\to+\infty}(u_{2n} - u_{2n+1})$.

3 Déduitre que $(u_n)_{n\geq 1}$ est convergente.

Exercice 13

1 (a) Montrer que la suite $u_n = \sum\limits_{k=2}^{k=n} \frac{1}{\ln k}$ n'est pas de Cauchy.

(b) Que peut on conclure.

2 Montrer que la suite définie par $u_n = \sum\limits_{k=0}^{k=n} \frac{\cos n}{k!}$ est une suite de Cauchy. En déduire sa convergence.

Exercice 14

Soit la fonction f définie sur l'intervalle $[0,2]$ par $f(x) = \frac{2x+1}{x+1}$.

1 Etudier les variations de f sur $[0,2]$. Montrer que si $x \in [0,2]$ alors $f(x) \in [0,2]$.

2 (u_n) et (v_n) sont deux suites définies sur $\mathbb{N}$ par

$$u_0 = 1,\ \ u_{n+1} = f(u_n),\ \text{et}\ \ v_0 = 2,\ v_{n+1} = f(v_n).$$

3 (a) Tracer (C_f) et les trois premiers termes de chacune des suites (u_n) et (v_n).

(b) A partir de ce graphique, que peut-on conjecturer concernant le sens de variation et la convergence des suites (u_n) et (v_n)?.

4 (a) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N} : 1 \leq u_n \leq 2$ et $1 \leq v_n \leq 2$.

(b) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N} : u_n \leq u_{n+1}$ et $v_{n+1} \leq v_n$.

5 Montrer que $\forall n \in \mathbb{N} : v_{n+1} - u_{n+1} = \frac{v_n - u_n}{(v_n+1)(u_n+1)}$ et $v_{n+1} \leq v_n$. En déduire que $\forall n \in \mathbb{N}$: $v_n - u_{n\geq 0}$ et $v_{n+1} - u_{n+1} = \frac{1}{4}(v_n - u_n)$.

6 Montrer que $\forall n \in \mathbb{N} : v_n - u_n \leq \left(\frac{1}{4}\right)^n$.

7 Montrer que les suites (u_n) et (v_n) convergent vers un même réel α. Déterminer la valeur exacte de α.

Exercice 15

Soient a et b deux réels tel que $0 < aa < b$. soient les deux suites (u_n) et (b_n) définies par

1 $\begin{cases} u_0 = a, \\ \forall n \in \mathbb{N}^* :\ u_n = \sqrt{u_{n-1} + v_{n-1}} \end{cases}$ **2** $\begin{cases} v_0 = b, \\ \forall n \in \mathbb{N}^* :\ u_n = \frac{u_{n-1} v_{n-1}}{2}. \end{cases}$

Montrer que les deux suites sont convergentes est ont la même limite.

⋆ Bonne chance ⋆