Université de M'sila		Faculté des Mathématiques et d'Informatique
Socle commun: 2021/2022	**Série N:** 01 **(Les nombres reéls)**	Module: Analyse 1

Remarque 1

l'exercice noté par $(\star)$ et supplémentaire ne sera pas corrigé dans le sience de **TD**

Exercice 1 ☆

Montrer que

1. $\forall x \in \mathbb{R} : |x| = \max\{x, -x\}. \ (\star)$
2. $\forall x, y \in \mathbb{R} : \Big||x| - |y|\Big| \leq |x - y|$
3. $\Big||x| - |y|\Big| \leq |x + y|.$
4. $\forall x, y \in \mathbb{R} : |x + y| \leq |x| + |y|$
5. $\forall x, y \in \mathbb{R} : |x| + |y| \leq |x + y| + |x - y|. \ (\star)$
6. $\forall x_1, x_2, ...x_n \in \mathbb{R} : \left|\sum_{k=1}^{n} x_k\right| \leq \sum_{k=1}^{n} |x_k|. \ (\star)$

Exercice 2 ☆☆

Soit A une partie non vide et bornés de $\mathbb{R}$. On définit l'ensemle $-A = \{-x : x \in A\}$.
Montrer que:

1. $\sup(-A) = -\inf(A),$
2. $\inf(-A) = -\sup(A). \ (\star)$

Exercice 3 ☆☆☆

Soient A et B deux parties non vides et bornés de $\mathbb{R}$. Montrer que

1. Si $A \subset B$, alors, $\inf B \leq \inf A \leq \sup A \leq \sup B$.
2. Si $A \cap B \neq \emptyset$, alors, $A \cap B$ est borné et que

$$\max\{\inf A, \inf B\} \leq \inf(A \cap B) \leq \sup(A \cap B) \leq \min\{\sup A, \sup B\}.$$

3. $\sup(A \cup B) = \max(\sup A, \sup B)$ et $\inf(A \cup B) = \min(\inf A, \inf B). \ (\star)$

Exercice 4 ☆☆

Déterminer-lorsqu'ils existent-l'ensemble des majorants, l'ensemble des minorants, la borne inférieure (inf), la borne supérieure (sup), le plus petit élément (min) et le plus grand élément (max) des parties de $\mathbb{R}$ suivantes

1. $A_1 =]1, 5], \ (\star)$
2. $A_2 =]-2, 5] \cup [1, 10[,$
3. $A_3 = \{3 + \frac{2}{n} : n \in \mathbb{N}^*\}, \ (\star)$
4. $A_4 = \{(-1)^n + \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}^*\},$
5. $A_5 = \{\frac{1}{n} + \frac{1}{m} : n, \ m \in \mathbb{N}^*\}. \ (\star)$

Exercice 5 ☆

Soient $A = \{x \in \mathbb{R}^* : -2 < x + \frac{1}{2x} < 2\}$.

1 Montrer que A est la réunion de deux intervalles.

2 Déterminer (s'il existe) $\sup A, \inf A, \min A$ et $\max A$.

Exercice 6 ☆☆

Soit $[x]$ la partie entière de x, montrer que

1 $\forall x, y \in \mathbb{R} : x \leq y \Rightarrow [x] \leq [y]$. $(\star)$

2 $\forall x \in \mathbb{R},\ \forall a \in \mathbb{Z} : [x + a] = [x] + a$.

3 Est ce que, $\forall x, y \in \mathbb{R} : \begin{cases} [x+y] = [x] + [y] \\ [xy] = [x][y]. \end{cases}$

4 $[x] + [-x] = \begin{cases} 0, & x \in \mathbb{Z}; \quad (\star) \\ -1, & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}. \end{cases}$

Exercice supplémentaire 1 ☆☆

Soit E une partie non vide et borné de $\mathbb{R}$. On définit l'ensemle $[E] = \{[x] : x \in E\}$.

1 Montrer que $[E]$ est borné dans $\mathbb{R}$.

2 Comparer entre $\inf E$ et $\inf[E]$, $\sup E$ et $\sup[E]$.

$\star$ **Bonne chance** $\star$