Université de M'sila	Série N: 01	Faculté des Mathématiques et d'Informatique
Socle commun: 2021/2022	**(Les nombres reéls)**	Module: Analyse 1

Remarque 1

l'exercice noté par $(\star)$ et supplémentaire ne sera pas corrigé dans le sience de **TD**

Exercice 1 ☆

Montrer que

1. $\forall x \in \mathbb{R} : |x| = \max\{x, -x\}.\ (\star)$
2. $\forall x, y \in \mathbb{R} : \Big||x| - |y|\Big| \leq |x - y|$
3. $\Big||x| - |y|\Big| \leq |x + y|.$
4. $\forall x, y \in \mathbb{R} : |x + y| \leq |x| + |y|$
5. $\forall x, y \in \mathbb{R} : |x| + |y| \leq |x + y| + |x - y|.\ (\star)$
6. $\forall x_1, x_2, ... x_n \in \mathbb{R} : \left|\sum_{k=1}^{n} x_k\right| \leq \sum_{k=1}^{n} |x_k|.$

Exercice 2 ☆☆

Soit A une partie non vide et bornés de $\mathbb{R}$. On définit l'ensemle $-A = \{-x : x \in A\}$.
Montrer que:

1. $\sup(-A) = -\inf(A),$
2. $\inf(-A) = -\sup(A).\ (\star)$

Exercice 3 ☆☆☆

Soient A et B deux parties non vides et bornés de $\mathbb{R}$. Montrer que

1. Si $A \subset B$, alors, $\inf B \leq \inf A \leq \sup A \leq \sup B$.
2. Si $A \cap B \neq \emptyset$, alors, $A \cap B$ est borné et que
$$\max\{\inf A, \inf B\} \leq \inf(A \cap B) \leq \sup(A \cap B) \leq \min\{\sup A, \sup B\}.$$
3. $\sup(A \cup B) = \max(\sup A, \sup B)$ et $\inf(A \cup B) = \min(\inf A, \inf B)$.

Exercice 4 ☆☆

Déterminer-lorsqu'ils existent-l'ensemble des majorants, l'ensemble des minorants, la borne inférieure (inf), la borne supérieure (sup), le plus petit élément (min) et le plus grand élément (max) des parties de $\mathbb{R}$ suivantes

1. $A_1 =]1, 5],\ (\star)$
2. $A_2 =]-2, 5] \cup [1, 10[,$
3. $A_3 = \{3 + \frac{2}{n} : n \in \mathbb{N}^*\},$
4. $A_4 = \{(-1)^n + \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}^*\},$
5. $A_5 = \{\sin(\frac{n\pi}{2}) : n \in \mathbb{N}^*\}.\ (\star)$
6. $A_6 = \{\frac{1}{n} + \frac{1}{m} : n,\ m \in \mathbb{N}^*\}.$

Exercice 5 ☆

Soit $A = \{x \in \mathbb{R}^* : -2 < x + \frac{1}{2x} < 2\}$.

1. Montrer que A est la réunion de deux intervalles.
2. Déterminer (s'il existe) $\sup A, \inf A, \min A$ et $\max A$.

Exercice 6 ☆☆

Soit $[x]$ la partie entière de x, montrer que

1. $\forall x, y \in \mathbb{R} : x \leq y \Rightarrow [x] \leq [y]$.
2. $\forall x \in \mathbb{R},\ \forall a \in \mathbb{Z} : [x+a] = [x] + a$.
3. Est ce que $\forall x, y \in \mathbb{R} \quad [x+y] = [x] + [y]$ et $[xy] = [x][y]$.
4. $[x] + [-x] = \begin{cases} 0, & x \in \mathbb{Z}; \quad (\star) \\ -1, & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}. \end{cases}$

Exercice 7 ☆☆☆

Soient E une partie non vide et borné de $\mathbb{R}$. On définit l'ensemle

$$[E] = \{[x] : x \in E\}.$$

1. Montrer que $[E]$ est borné dans $\mathbb{R}$.
2. Comparer entre $\inf E$ et $\inf[E]$, $\sup E$ et $\sup[E]$.

Exercice 8 ☆

1. Monter que $\sqrt{5}$ n'est pas un nombre rationnel. $(\star)$
2. Monter que si $x \in \mathbb{Q}^*$ et $y \notin \mathbb{Q}$, alors $(x+y) \notin \mathbb{Q}$ et $(x.y) \notin \mathbb{Q}$.
3. Est-ce- que si $x \notin \mathbb{Q}$ et $y \notin \mathbb{Q}$ on a $(x+y) \notin \mathbb{Q}$ et $(x.y) \notin \mathbb{Q}$..

Exercice 9 ☆☆

Soit l'ensemble E définie par $E = \{\dfrac{xy}{x^2+y^2} : x, y \in \mathbb{R}^*\}$.

1. Montrer que E admet une borne inférieure et une borne supérieure que l'on déterminera.
2. Déterminer-lorsqu'ils existent $\max(A)$ et $\min(A)$. $(\star)$

Exercice supplémentaire 1 ☆

Soit $x, y \in \mathbb{R}$ montrer que

$$\max\{x, y\} = \frac{x+y+|x-y|}{2} \quad \text{et} \quad \min\{x, y\} = \frac{x+y-|x-y|}{2}.$$

Exercice supplémentaire 2 ☆

Soit l'ensemble A définie par $A = \{x \in \mathbb{Q} : x^2 < 2\}$.

1 Déterminer-lorsqu'ils existent $\sup(A)$ et $\inf(A)$.

2 Montrer que A n'admet pas le borne supérieure dans $\mathbb{Q}$.

3 Montrer aussi que A n'admet pas le borne inférieure dans $\mathbb{Q}$. $(\star)$

Exercice supplémentaire 3 ☆☆

Soient $D = \{x^2 + y^2 : (x, y) \in \mathbb{R}^2 \text{ et } xy = 1\}$ et $E = \{x \times y : (x, y) \in \mathbb{R}^2 \text{ et } |x| + |y| < 1\}$

1 Déterminer la borne inférieure de D. Est-ce-qu'il possède un majorant ?.

2 Montrer que E est borné et déterminer $\sup E$ et $\inf E$.

$\star$ **Bonne chance** $\star$