Université de M'sila	Série N: 02	Faculté des Mathématiques et d'Informatique
Socle commun: 2021/2022	**(Les Suites Numériques)**	Module: Analyse 1

Remarque 1

l'exercice noté par $(\star)$ ou supplémentaire ne sera pas corrigé dans le sience de **TD**

Exercice 1 ☆

Soient les suites (u_n) et (v_n) définies par

$$u_0 = 2, \quad u_{n+1} = 4u_n + 3, \text{ et } v_n = u_n + 1.$$

1. Calculer les termes u_1, u_2, v_0, v_1 et v_2.
2. Montrer que la suite (v_n) est géométrique, et calculer sa raison q.
3. Écrire v_n en fonction de n. Déduire le terme général de (u_n).
4. Étudier la nature de la suite (u_n).
5. Calculer les limites suinantes $\lim\limits_{n\to+\infty}(v_0 + v_1 + ... + v_{n-1})$ et $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_0 + u_1 + ... + u_{n-1})$.

Exercice 2 ☆

En utilisant la définition de la limite montrer que

1. $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{2n+1}{n+1} = 2, \quad (\star)$
2. $\lim\limits_{n\to+\infty} (4 + \frac{1}{n+2}) = 4,$
3. $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{2n+1} = +\infty.$

Exercice 3 ☆

Calculer les limites suivantes

1. $\lim\limits_{n\to+\infty} [(-1)^n + \frac{2}{n+1}]$
2. $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(4 + \frac{(-1)^n}{n^2+1}\right)$
3. $\lim\limits_{n\to+\infty} (\sqrt{n+1} - \sqrt{n})$
4. $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{n\sin(n!)}{n^2+1} \quad (\star)$
5. $\lim\limits_{n\to+\infty} (\frac{2^{n+1}+3^{n+1}}{2^n+3^n})$
6. $\lim\limits_{n\to+\infty} \ln(\ln n)$
7. $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1+2+...+n}{n+2} - \frac{n}{2}$
8. $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{\ln(n+\ln n)}{\ln(2n+\ln n)}$
9. $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{\alpha^n-\beta^n}{\alpha^n+\beta^n} \quad (\alpha, \beta \in \mathbb{R}_+^*).$

Exercice 4 ☆☆

Soit la suite de terme général

$$u_n = \frac{1}{1\times 2} + \frac{1}{2\times 3} + \frac{1}{3\times 4} + ... + \frac{1}{n(n+1)}.$$

1 Montrer qu'il existe deux réels a, b tels que $\frac{1}{n(n+1)} = \frac{a}{n} + \frac{b}{n+1}$.

2 Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

Exercice 5 ☆

Étudier la monotonie des suites suivantes et on en déduire leur nature:

1 (a) $u_n = 1 + \frac{2}{n+1}$

(b) $u_n = \frac{n^2+1}{2n+1}$

(c) $u_n = \sqrt{\frac{n+1}{2n}}$

(d) $u_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k}$

(e) $u_n = \frac{1^2+2^2+...+n^2}{n^2}$. $(\star)$

2 Les suites précédantes sont elle bornées ?. $(\star)$

Exercice 6 ☆☆

Soit la suite définie pour tout $n \geq 1$ par:

$$u_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + ... + \frac{1}{n+n}$$

Montrer que la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ est croissante et majorée. (et donc convergente !)

Exercice 7 ☆

Soit $(u_n)_{n\geq 1}$ la suite definie par

$$u_n = \frac{\sin 1}{n^2+1} + \frac{\sin 2}{n^2+2} + ... + \frac{\sin n}{n^2+n}$$

1 Montrer que la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ converge et trouver sa limite l

2 Trouver un entier N tel que, pour tout $n \geq N$, on ait $|u_n - l| \leq 10^{-2}$. $(\star)$

Exercice 8 ☆☆

Montrer que les deux suites (u_n) et (v_n) définies par

$$u_n = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + ... + \frac{1}{n!}, \quad v_n = u_n + \frac{1}{n!},$$

sont adjacentes.

Exercice 9 ☆

Soient les suites $(u_n)_{n\geq 1}$ et $(v_n)_{n\geq 1}$ définies par

$$u_1 = 4,\ v_1 = 1,\ u_{n+1} = \frac{1}{3}(2u_n + v_n),\ \text{et } v_{n+1} = \frac{1}{3}(u_n + 2v_n).$$

1 Montrer que pour tout $n \geq 1$, on a $u_{n+1} - v_{n+1} = \frac{1}{3^{n-1}}$.

2 En déduire que les suites $(u_n)_{n\geq 1}$ et $(v_n)_{n\geq 1}$ sont adjacentes.

Exercice 10 ☆☆

On considère la suite (u_n), définie par $\begin{cases} u_0 = 0, \\ \forall n \in \mathbb{N} : \ u_{n+1} = \frac{2u_n+3}{u_n+4}. \end{cases}$

1. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N} : \ 0 \leq u_n \leq 1$.
2. Montrer que la suite (u_n) est convergente.
3. Conclure.

Exercice 11 ☆☆☆

On considère la suite $(u_n)_{n\geq 1}$, définie par $u_n = \sum\limits_{k=1}^{k=n} \frac{(-1)^k}{k}$

1. Montrer que la suite extraite $(u_{2n})_{n\geq 1}$ est décroissante et que la suite extraite $(u_{2n+1})_{n\geq 0}$ est croissante.
2. Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} (u_{2n} - u_{2n+1})$.
3. Déduitre que $(u_n)_{n\geq 1}$ est convergente.

Exercice 12 ☆☆☆

1. (a) Montrer que la suite $u_n = \sum\limits_{k=2}^{k=n} \frac{1}{\ln k}$ n'est pas de Cauchy.

   (b) Que peut on conclure.

2. Montrer que la suite définie par $u_n = \sum\limits_{k=0}^{k=n} \frac{\cos k}{k!}$ est une suite de Cauchy. En déduire sa convergence.

Exercice supplémentaire 1 ☆☆☆

Soient a et b deux réels tel que $0 < a < b$. soient les deux suites (u_n) et (b_n) définies par

1. $\begin{cases} u_0 = a, \\ \forall n \in \mathbb{N}^* : \ u_n = \sqrt{u_{n-1} + v_{n-1}} \end{cases}$

2. $\begin{cases} v_0 = b, \\ \forall n \in \mathbb{N}^* : \ u_n = \frac{u_{n-1}v_{n-1}}{2}. \end{cases}$

Montrer que les deux suites sont convergentes est ont la même limite.

Exercice supplémentaire 2 ☆

Soit la suite (u_n) définie par $\begin{cases} u_0 = 2, \\ \forall n \in \mathbb{N} : \ u_{n+1} = \frac{2u_n - 1}{u_n}. \end{cases}$

1. Montrer que (u_n) est minorée par 1.
2. Montrer que (u_n) est décroissante sur $\mathbb{N}$.
3. Soient $a \in \mathbb{R}^*$ et la suite (v_n) définie par $\forall n \in \mathbb{N} \ \ v_n = \dfrac{a}{u_n - 1}$.

   (a) Montrer que (u_n) est une suite arithmétique.

(b) Calculer (v_n) en fonction de a et n.

(c) Déduire la limite $\lim_{n\to+\infty} u_n$.

Exercice supplémentaire 3 ☆☆

Soient $(u_n)_{n\geq 1}$ et $(v_n)_{n\geq 1}$ deux suites définies par $u_n = \dfrac{n}{n^2+1}$, et $v_n = \dfrac{n}{n^2+n}$.

1 Calculer $\lim_{n\to+\infty} u_n$ et $\lim_{n\to+\infty} v_n$.

2 On pose pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $w_n = \dfrac{1}{n^2+1} + \dfrac{1}{n^2+2} + ... + \dfrac{1}{n^2+n}$.

(a) Déterminer que $\forall n \in \mathbb{N}^*$: $v_n \leq w_n \leq u_n$.

(b) Déduire que la suite $(w_n)_{n\geq 1}$ est convergente et donner sa limite.

⋆ **Bonne chance** ⋆