Université de Msila	Msila-Logo.PNG	Faculté des Mathématiques et d'Informatique
Socle commun : 2021/2022	**Correction d'exercices du Série N :02 (Les suites numériques)**	Module : Analyse 1

CORRECTION D'EXERCICE 1

1. Posons, $P(n): (1+a)^n \geqslant 1+an$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.
   - a **Initialisation** : On a : $(1+a)^0 = 1 \geqslant 1+0a$, donc, $P(0)$ est vraie.
   - b **Hérédité** : Supposons que $P(n)$ est vraie, c'est-à-dire $\forall n \in \mathbb{N}: (1+a)^n \geqslant 1+an$, et on monter que $P(n+1)$ est vraie, c'est-à-dire $\forall n \in \mathbb{N}: (1+a)^{n+1} \geqslant 1+a(n+1)$. Alors, d'après, l'hypothèse, on a
   $$\begin{aligned} (1+a)^{n+1} &\geqslant (1+a)^n(1+a) \\ &\geqslant (1+an)(1+a) = 1+an+a+a^2n \\ &\geqslant 1+a(n+1). \end{aligned}$$
   Car, $a^2n \geqslant 0$, d'où le résultat $P(n+1)$ est vraie.
   - c **Conclusion** : $(1+a)^n \geqslant 1+an$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.
2. On étude la convergence la suite géométrique de terme générale $u_n = q^n$ ($q \in \mathbb{R}$).
   - a Si $q \in]1, +\infty[$ alors, il existe $a \geqslant 0$ tel que $q = 1+a$. Donc, d'après, l'inégalité de Bernoulli, on a
   $$\forall n \in \mathbb{N}: q^n = (1+a)^n \geqslant 1+an.$$
   ce qui donne,
   $$\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} q^n \geqslant \lim_{n\to+\infty}(1+an) = +\infty.$$
   - b Si $q = 1$, alors $u_n = 1$, pour tout $n \in \mathbb{N}$. Donc, $\lim_{n\to+\infty} u_n = 1$.
   - c Maintenant, si $q \in]-1, 1[$, on distingue deux cas,
   α) Si $q = 0$, alors, $u_n = 0$, pour tout $n \in \mathbb{N}$. Donc, $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$.
   β) Si $q \neq 0$, alors, il existe $q' \in]1, +\infty[$ tel que, $|q| = \frac{1}{q'}$. Donc, d'après (a), le resultat précedent, on a, $\lim_{n\to+\infty} q'^n = +\infty$. Par conséquent, on obtient $\lim_{n\to+\infty} |q|^n = 0$. D'où $\lim_{n\to+\infty} q^n = 0$.
   - d Si $q \in]-\infty, -1]$ alors, on on distingue deux cas,
   γ) Si $q = -1$, alors, (u_n) n'admet pas de limite, car
   $$\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} (-1)^n = \begin{cases} 1 & : n \text{ pair} \\ -1 & : n \text{ impair.} \end{cases}$$
   δ) Si $q \in]-\infty, -1[$, alors, il existe $q' \in]1, +\infty[$, tel que $q = -q'$. Donc,
   $$\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} (-1)^n (q')^n = \begin{cases} +\infty & : n \text{ pair} \\ -\infty & : n \text{ impair.} \end{cases}$$
   La suite (u_n) n'a pas de limite.

Conclusion : La suite géométrique (q^n) converge si et seulement si $q \in]-1,1]$.

CORRECTION D'EXERCICE 2

1. On Calcule les termes u_1, u_2, v_0, v_1 et v_2. On a, donc, $u_1 = 4u_0+3 = 11, u_2 = 4u_1+3 = 47, v_0 = u_0+1 = 3$ et $v_1 = u_1+1 = 12$.
2. (v_n) est géométrique si et seulement si $\exists q \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N} : v_{n+1} = q.v_n$. Alors, $v_{n+1} = u_{n+1}+1 = 4(u_n+1) = 4v_n$. Donc, $q = 4$.
3. Le terme général de (v_n) est $v_n = v_0 q^n \Rightarrow v_n = 3\times 4^n$. Comme, $u_n = v_n - 1 \Rightarrow u_n = 3\times 4^n - 1$.
4. On a
$$v_0+v_1+\ldots+v_{n-1} = S_n = v_0\Big(\frac{q^n-1}{q-1}\Big) \Rightarrow S_n = 4^n - 1.$$
Donc, on obtient,
$$u_0+u_1+\ldots+u_{n-1} = (v_0-1)+(v_1-1)+\ldots+(v_{n-1}-1) = 4^n-1-n.$$
Par concéquant, $\lim\limits_{n\to+\infty}(v_0+v_1+\ldots+v_{n-1}) = \lim\limits_{n\to+\infty}(4^n-1) = +\infty$ car $q>1$ et $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_0+u_1+\ldots+u_{n-1}) = \lim\limits_{n\to+\infty}(4^n-1-n) = \lim\limits_{n\to+\infty} n\Big(\frac{4^n}{n}-\frac{1}{n}-1\Big) = +\infty$.

★★☆☆

CORRECTION D'EXERCICE 3

On utilise la définition de la limite pour montrer que

1. $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{2n+1}{n+1} = 2$. Alors, on a
$$\Big(\lim_{n\to+\infty}\frac{2n+1}{n+1} = 2\Big) \Leftrightarrow \Big[\forall\varepsilon>0,\ \exists n_0\in\mathbb{N},\ \forall n\in\mathbb{N}:\ n>n_0 \Rightarrow \Big|\frac{2n+1}{n+1}-2\Big|<\varepsilon.\Big]$$
Soit $\varepsilon>0$, alors,
$\Big|\frac{2n+1}{n+1}-2\Big| = \Big|\frac{1}{n+1}\Big| < \varepsilon \Rightarrow n > \frac{1}{\varepsilon}-1$. Donc, il suffit choisir $n_0 = \Big[\frac{1}{\varepsilon}-1\Big]+1$ pour garantir l'implication précédente.
2. Exercice supplémentaire.
3. $\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt{2n+1} = +\infty$. Alors, on a
$$\lim_{n\to+\infty}\sqrt{2n+1} = +\infty \Leftrightarrow \Big[\forall\varepsilon>0,\ \exists n_0\in\mathbb{N},\ \forall n\in\mathbb{N}:\ n>n_0 \Rightarrow \sqrt{2n+1}>\varepsilon\Big].$$
Soit $\varepsilon>0$, alors,
$\sqrt{2n+1}>\varepsilon \Rightarrow n > \frac{\varepsilon^2-1}{2}$. Donc, il suffit choisir $n_0 = \Big[\frac{\varepsilon^2-1}{2}\Big]+1$ pour garantir l'implication précédente.

★★☆☆

CORRECTION D'EXERCICE 4

On calcule les limites suivantes

★★☆☆

1. $\lim\limits_{n\to+\infty}[(-1)^n+\overbrace{\frac{2}{n+1}}^{\nearrow 0}]=\lim\limits_{n\to+\infty}[(-1)^n]=\begin{cases}1, & \text{si } n \text{ pair}\\ -1, & \text{si } n \text{ impair.}\end{cases}$
Donc, (u_n) n'admet pas une limite.
2. $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(4+\overbrace{\frac{(-1)^n}{n^2+1}}^{\nearrow 0}\right)=4$
3. $\lim\limits_{n\to+\infty}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})=+\infty-\infty$, (forme indéterminée), donc, on la-multiplier par la conjuguée. Alors, on obtient : $\lim\limits_{n\to+\infty}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})=\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}=0$.
4. Exercice supplémentaire.
5. $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{2^{n+1}+3^{n+1}}{2^n+3^n}\right)=\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{2(\frac{2}{3})^n+3}{(\frac{2}{3})^n+1}\right)=3$, car $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^n=0$.
6. Évident.
7. $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{1+2+...+n}{n+2}-\frac{n}{2}\right)=\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{n(1+n)}{2(n+2)}-\frac{n}{2}\right)=\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{n}{2}\left(\frac{1+n}{n+2}-1\right)=\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{-n}{2(n+2)}=\frac{-1}{2}$. On note : $1+2+...+n=\frac{n}{2}(1+n)$, est une somme de n termes primiers d'une suite arithmétique.
8. Il y a un problème dans ce exercice (éliminer).
9. Reste comme exercice.
10. Exercice supplémentaire.

Correction d'exercice 5

Soit la suite (u_n) de terme générale $u_n=\frac{1}{1\times2}+\frac{1}{2\times3}+\frac{1}{3\times4}+...+\frac{1}{n(n+1)}$.

1. On a : $\frac{1}{n(n+1)}=\frac{a}{n}+\frac{b}{n+1}\Leftrightarrow\frac{1}{n(n+1)}=\frac{(a+b)n+a}{n(n+1)}\Rightarrow\begin{cases}a+b=0\\ a=1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}b=-a=-1\\ a=1\end{cases}$
2. $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=\lim\limits_{n\to+\infty}[(\frac{1}{1}-\frac{1}{2})+(\frac{1}{2}-\frac{1}{3})+...+(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n})+(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1})]=\lim\limits_{n\to+\infty}[1-\frac{1}{n+1}]=0$

Correction d'exercice 6

Pour $n\geqslant1$, on pose $u_n=\frac{n}{n^2+1}$, et $v_n=\frac{n}{n^2+n}$.

1. On a $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{n}{n^2+1}=\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{n}=0$, et $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{n}{n^2+n}=\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{n+1}=0$.
2. On montre que $\forall n\in\mathbb{N}^*: v_n\leqslant w_n\leqslant u_n$.
   a. Comme, pour tout $n\geqslant1$ et pour tout $k\in\{1,2,...,n\}$ on a $\frac{1}{n^2+n}\leqslant\frac{1}{n^2+k}$. Alors, on

trouve,

$$\begin{aligned} w_n &= \frac{1}{n^2+1}+\frac{1}{n^2+2}+\ldots+\frac{1}{n^2+n} \\ &\geqslant \frac{1}{n^2+n}+\frac{1}{n^2+n}+\ldots+\frac{1}{n^2+n}=n\times\frac{1}{n^2+n}=v_n. \end{aligned}$$

b D'après qui ce précede, on a $\begin{cases} \frac{1}{n^2+n}<\frac{1}{n^2+1} \\ \frac{1}{n^2+n}<\frac{1}{n^2+2} \\ . \\ . \\ . \\ \frac{1}{n^2+n}<\frac{1}{n^2+n} \end{cases}$ $\Rightarrow$ (par addition) $w_n<\frac{1}{n^2+1}+$ $\frac{1}{n^2+1}+\ldots+\frac{1}{n^2+1}=\frac{n}{n^2+1}=u_n.$

Correction d'exercice 7

Étudier la monotonie des suites suivantes et on en déduire leur nature

1 a Pour tout $\forall n\in\mathbb{N}$, on a : $u_{n+1}-u_n=(1+\frac{2}{n+2})-(1+\frac{2}{n+1})=\frac{-2}{(n+2)(n+1))}<0.$

Donc, la suite (u_n) est décroissante sur $\mathbb{N}$.

La suite (u_n) décroissante et bornée inférieurement par 1, car $\forall n\in\mathbb{N}:1+\frac{2}{n+1}>1.$

Donc, d'après un théorème, (voir cours analyse-1) elle est convergente.

b Il est claire que (u_n) est croissante, et $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=+\infty$, (u_n) n'est pas bornée.

c Comme (u_n) est strictement positive, alors, on peut comparer $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ par 1, Donc, $\frac{u_{n+1}}{u_n}=\sqrt{\frac{n^2+2n}{n^2+2n+1}}$, on remarque que

$\forall n\in\mathbb{N}:n^2+2n<n^2+2n+1\Rightarrow\forall n\in\mathbb{N}:\frac{n^2+2n}{n^2+2n+1}<1\Rightarrow\forall n\in\mathbb{N}:0\leqslant\sqrt{\frac{n^2+2n}{n^2+2n+1}}<1$, d'où le résultat, (u_n) est décroissante. Donc, (u_n) est convergente, car elle est bornée inférieurement par 0.

d Pour tout $n\in\mathbb{N}$, on a : $u_{n+1}-u_n=\sum\limits_{k=1}^{n+1}\frac{1}{n+k}-\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{n+k}=\frac{1}{2n+1}>0$, donc, (u_n) est croissante.

Maintenant pour tout $n\in\mathbb{N}$,

$$\begin{cases} n+1>n \\ n+2>n \\ . \\ . \\ . \\ n+n>n \end{cases}\Rightarrow\begin{cases} \frac{1}{n+1}<\frac{1}{n} \\ \frac{1}{n+2}<\frac{1}{n} \\ . \\ . \\ . \\ \frac{1}{n+n}<\frac{1}{n} \end{cases}\Rightarrow u_n\leqslant n\frac{1}{n}=1.$$

Donc, u_n est majorée par 1, donc, convergente.

(e) Reste comme exercice. $(*)$.

(2) Facile

CORRECTION D'EXERCICE 8

Soit la suite définie pour tout $n \geqslant 1$ par : $u_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + ... + \frac{1}{n+n}$.

(1) u_n est croissante (voir exercice précédente).

(2) On a pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{cases} n+1 > n \\ n+2 > n \\ . \\ . \\ . \\ n+n > n \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{1}{n+1} < \dfrac{1}{n} \\ \dfrac{1}{n+2} < \dfrac{1}{n} \\ . \\ . \\ . \\ \dfrac{1}{n+n} < \dfrac{1}{n} \end{cases} \Rightarrow u_n \leqslant n\frac{1}{n} = 1.$$

Donc, (u_n) est majorée par 1, alors elle est convergente.

★★☆☆

CORRECTION D'EXERCICE 9

Soient les suites (u_n) et (v_n) définies par
$u_n = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + ... + \frac{1}{n!}$, $\quad v_n = u_n + \frac{1}{n!}$. Montrons que (u_n) et (v_n) sont adjacentes.

(1) (u_n) est croissante. En effet, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{(n+1)!} > 0.$$

(2) (v_n) est décroissante. En effet, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(n \geqslant 2)$, on a

$$v_{n+1} - v_n = u_{n+1} + \frac{1}{(n+1)!} - u_n - \frac{1}{n!} = \frac{2}{(n+1)!} - \frac{1}{n!} = \frac{2-n}{n!} \leqslant 0.$$

(3) $\lim\limits_{n\to+\infty} [u_n - v_n] = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{-1}{n!} = 0$, d'où le résultat.

★★☆☆

CORRECTION D'EXERCICE 10

(1) On a $\forall n \geqslant 1$:

$$\begin{aligned} u_{n+1} - v_{n+1} &= \frac{1}{3}(u_n - v_n). \\ u_{n+1} &= \underbrace{\frac{1}{3} \times \frac{1}{3} \times ... \times \frac{1}{3}}_{n \text{ facteurs}} \times (u_0 - v_0) = \frac{1}{3^{n-1}}. \end{aligned}$$

★★☆☆

Donc, $\lim_{n\to+\infty} u_{n+1} - v_{n+1} = 0$

(2) Comme, $u_{n+1} - u_n = -\frac{1}{3}(u_n - v_n) = -\frac{1}{3^{n-1}} < 0$, c'et à dire $(u_n)_{n\geqslant 1}$ est décroissante.

(3) Pour tout $n \geqslant 1$, on aussi, $v_{n+1} - v_n = \frac{1}{3}(u_n - v_n) = \frac{1}{3^{n-1}} > 0$, c'est à dire $(u_n)_{n\geqslant 1}$ est croissante. D'où le résultat.

Correction d'exercice 11

(1) (a) $(u_n)_{n\geqslant 1}$ est croissante. En effet, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a :
$u_{n+1} - u_n = \sum_{k=1}^{k=n+1} \frac{1}{k^3} - \sum_{k=1}^{k=n} \frac{1}{k^3} = \frac{1}{(n+1)^3} > 0.$

(b) $(v_n)_{n\geqslant 1}$ est décroissante. En effet, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$\begin{aligned} v_{n+1} - v_n &= u_{n+1} + \frac{1}{(n+1)^2} - u_n - \frac{1}{n^2} \\ &= \frac{1}{(n+1)^3} + \frac{1}{(n+1)^2} - \frac{1}{n^2} = \frac{n^2 + n^2(n+1) - (n+1)^3}{n^2(n+1)^3} \\ &= -\frac{n^2+3n+1}{n^2(n+1)^3} \leqslant 0 \end{aligned}$$

(c) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a :
$v_n - u_n = u_n + \frac{1}{n^2} - u_n = \frac{1}{n^2}$. Donc, $\lim_{n\to+\infty} v_n - u_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n^2} = 0.$
Alors, les suites $(u_n)_{n\geqslant 1}$ et $(v_n)_{n\geqslant 1}$ sont adjacentes.

(2) Le théorème des gendarmes garantit alors que $(u_n)_{n\geqslant 1}$ et $(v_n)_{n\geqslant 1}$ convergent vers une même limite.

★★☆☆

Correction d'exercice 12

Soit la suite (u_n), définie par $\begin{cases} u_0 = 0, \\ \forall n \in \mathbb{N} :\ u_{n+1} = \frac{2u_n+3}{u_n+4}. \quad ...P(n) \end{cases}$

(1) On montre par récurrence.

(a) Initiation : pour $n = 0$, on $0 \leqslant u_0 = 0 \leqslant 1$, donc, $P(0)$ est vraie.

(b) Hérédité : Supposons que $P(n)$ vraie, c'et-à-dire, $0 \leqslant u_n \leqslant 1$, et montrons $P(n+1)$ vraie, c'et-à-dire, $0 \leqslant u_{n+1} \leqslant 1$. Alors,

$$u_{n+1} - 1 = \frac{2u_n+3}{u_n+4} - 1 = \frac{u_n - 1}{u_n+4} < 0.$$

donc, on en déduit que $0 \leqslant u_{n+1} < 1$, i.e., $P(n+1)$ est vraie.

(c) Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N} :\ 0 \leqslant u_n \leqslant 1$.

★★☆☆

2. La suite (u_n) est décroissante. En effet, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$u_{n+1} - u_n = \frac{2u_n+3}{u_n+4} - u_n = \frac{-u_n^2 - 2u_n + 3}{u_n+4} = \frac{(1-u_n)(u_n+3)}{u_n+4}. < 0.$$

Car la signe de polynôme $f(x) = -x^2 - 2x + 3$ est négatif sur l'intèrvalle $[0,1]$, donc, on en déduit que (u_n) est décroissante.

3. La suite (u_n) est convergente, alors, on calcule sa limite l.

On a $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = l = \lim\limits_{n\to+\infty} u_{n+1}$, si on passe à la limite dans la relation $P(n)$, on aura,

$$\lim_{n\to+\infty} u_{n+1} = \lim_{n\to+\infty} \frac{2u_n+3}{u_n+4} \Leftrightarrow l = \frac{2l+3}{l+4} \Leftrightarrow (l^2+2l-3=0)$$
$$\Leftrightarrow (l=1 \vee l=-3),$$

on remarque que $-3 \notin [0,1]$, alors, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = l$.

Correction d'exercice 13

1. Montrons que la suite $u_n = \sum\limits_{k=2}^{k=n} \frac{1}{\ln k}$ n'est pas de Cauchy. $(u_n)_{n\geqslant 2}$ Cauchy si et seulement si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall p,\ q \in \mathbb{N} : p > q > n_0 \Rightarrow |u_p - u_q| < \varepsilon \qquad (1)$$

Comme, pour tout $n \geqslant 2$, on a $\ln n \leqslant n$, alors, $\dfrac{1}{\ln n} \geqslant \dfrac{1}{n}$. Donc, on aura,

$$\begin{aligned} u_n &= \sum_{k=2}^{k=n} \frac{1}{\ln k} \geqslant \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} \\ &\geqslant \frac{1}{n} + \frac{1}{n} + \dots + \frac{1}{n} = \frac{n-1}{n} \geqslant \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

On prend $\varepsilon = \dfrac{1}{2}$, et soit $n_0 \in \mathbb{N}$, si en prend $p = 2m$, et $q = m$ tel que $m \geqslant n_0$. Alors, on a

$$\begin{aligned} |\, u_p - u_q \,| = |\, u_{2m} - u_m \,| &= \frac{1}{\ln(m+1)} + \frac{1}{\ln(m+2)} + \dots + \frac{1}{\ln(2m)} \\ &\geqslant \frac{1}{m+1} + \frac{1}{(m+2)} + \dots + \frac{1}{2m} \\ &\geqslant \frac{1}{2m} + \frac{1}{2m} + \dots + \frac{1}{2m} = \frac{m}{2m} \geqslant \frac{1}{2}, \end{aligned}$$

c'est-à-dire la condition précédente (1) n'est pas satisfaite. Alors, $(u_n)_{n\geqslant 2}$ n'est pas de Cauchy.

2. Montrons que la suite définie par $u_n = \sum\limits_{k=0}^{k=n} \frac{\cos k}{k!}$ est une suite de Cauchy.

★★☆☆

Alors, on vérifiant la condition (1). Soit $\varepsilon > 0$, et pour $p,\ q \in \mathbb{N}$, $(p = 2q+1)$, on a

$$\begin{aligned} |u_p - u_q| &= \left|\frac{\cos(q+1)}{(q+1)!} + \frac{\cos(q+2)}{(q+1)!} + \dots + \frac{\cos(p)}{p!}\right| \\ &\leqslant \frac{1}{(q+1)!} + \frac{1}{(q+1)!} + \dots + \frac{1}{(p)!} \\ &\leqslant \frac{p-q}{(q+1)!} = \frac{q+1}{(q+1)!} = \frac{1}{q!} < \frac{1}{q} < \varepsilon. \end{aligned}$$

Donc, $\frac{1}{q} < \varepsilon \Leftrightarrow q > \frac{1}{\varepsilon}$, il suffit choisir $n_0 = \left[\frac{1}{\varepsilon}\right] + 1$, pour garantir (1). D'où le résultat.

Correction d'exercice 14

D'après la définition, $(u_n)_{n\geqslant 1}$ est de Cauchy ssi

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists n_0 \in \mathbb{N}^*,\ \ \forall p,q \in \mathbb{N} : \quad p > q \geqslant n_0 \Rightarrow |u_p - u_q| < \varepsilon.$$

Soit $\varepsilon > 0$ et pour $p,q \in \mathbb{N}$, $(p > q)$. Alors, d'après les deux inégalités suivantes, on obtient

$$\forall x \in \mathbb{R} : \ |\sin x| \leqslant 1 \text{ et } |\sin x| \leqslant |x|.$$

$$|u_p - u_q| = |\cos\left(\frac{1}{p}\right) - \cos\left(\frac{1}{q}\right)| = 2|\sin(\frac{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}}{2})\sin(\frac{\frac{1}{p}+\frac{1}{q}}{2})| \leqslant \frac{1}{p} + \frac{1}{q} \leqslant \frac{2}{q} < \varepsilon.$$

Donc, ce qui donne $q > \frac{2}{\varepsilon}$. Alors, il suffit de choisir $n_0 = \left[\frac{2}{\varepsilon}\right] + 1$ pour garntit l'implication présédente.

★★☆☆

Correction d'exercice 15

Soit la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$, telle que $u_n = \sum_{k=1}^{k=n} \frac{(-1)^k}{k}$.

1. (a) Montrons que la suite extraite $(u_{2n})_{n\geqslant 1}$ est décroissante. On a pour $n \geqslant 1$
$$u_{2(n+1)} - u_{2n} = \sum_{k=1}^{k=2n+2} \frac{(-1)^k}{k} - \sum_{k=1}^{k=2n} \frac{(-1)^k}{k} = \frac{(1-)^{2n+1}}{2n+1} + \frac{(1-)^{2n+2}}{2n+2} = \frac{-1}{(2n+1)(2n+2)} < 0.$$
(b) Montrons que la suite extraite $(u_{2n+1})_{n\geqslant 1}$ est croissante. On a pour $n \geqslant 1$
$$u_{2(n+1)+1} - u_{2n+1} = \sum_{k=1}^{k=2n+3} \frac{(-1)^k}{k} - \sum_{k=1}^{k=2n+1} \frac{(-1)^k}{k} = \frac{1}{2n+2} - \frac{1}{2n+3} = \frac{1}{(2n+3)(2n+2)} > 0.$$
2. $\lim_{n\to+\infty}(u_{2n} - u_{2n+1}) = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{2n+1} = 0.$
3. Les suites $(u_{2n})_{n\geqslant 1}$ et $(u_{2n+1})_{n\geqslant 0}$ sont adjacentes, donc elles sont convergente à la même limite, alors $(u_n)_{n\geqslant 1}$ est aussi converge (d'après un théorème voir cours analyse-1).

★★☆☆

Correction d'exercice 16

★★☆☆

1. On a pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$v_{n+1} = \ln\left(\frac{u_{n+1}}{27}\right) = \ln\left(\frac{9\sqrt[3]{u_n}}{27}\right) = \ln\left(\sqrt[3]{\frac{u_n}{27}}\right) = \ln\left(\frac{u_n}{27}\right)^{\frac{1}{3}} = \frac{1}{3}\ln\left(\frac{u_n}{27}\right) = \frac{1}{3}v_\nu.$$

Donc, (v_n) est une suite geométrique de raison $q = \dfrac{1}{3}$ et $v_0 = \ln\left(\dfrac{u_0}{27}\right) = \ln(e^2) = 2$.

2. Les termes générales des (v_n) et (u_n).
   - a. On a pour tout $n \in \mathbb{N}$: $v_n = v_0 q^n$, c'est-à-dire, $v_n = 2\left(\dfrac{1}{3}\right)^n$.
   - b. Comme, $v_n = \ln\left(\dfrac{u_n}{27}\right)$, alors, $u_n = 27e^{v_n}$. Alors, par conséquent, on aura,

$$u_n = 27e^{2\left(\frac{1}{3}\right)^n}.$$

3. On a $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 2\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{1}{3}\right)^n = 0$, car $q \in]-1,1[$, et $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} 27e^{2\left(\frac{1}{3}\right)^n} = 27e^0 = 27$.

Correction d'exercice 17

1. Posons, $P(n)$: $u_n \geqslant 1$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.
   - a. **Initialisation** : On a : $u_0 = 2 \geqslant 1$, donc, $P(0)$ est vraie.
   - b. **Hérédité** : Supposons que $P(n)$ est vraie, c'est-à-dire $\forall n \in \mathbb{N} : u_n \geqslant 1$, et on monter que $P(n+1)$ est vraie, c'est-à-dire $\forall n \in \mathbb{N}$: $u_{n+1} \geqslant 1$. Donc, on a :

$$u_n \geqslant 1 \Leftrightarrow u_n^2 \geqslant 1 \Leftrightarrow 2u_n^2 \geqslant 2 \Leftrightarrow 2u_n^2 - 1 \geqslant 1 \Rightarrow \sqrt{2u_n^2 - 1} \geqslant 1.$$

   Par conséquent, $\forall n \in \mathbb{N}$: $u_{n+1} \geqslant 1$. D'où $P(n+1)$ est vraie.
   - c. **Conclusion** : $u_n \geqslant 1$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :
$u_{n+1} - u_n = \sqrt{2u_n - 1} - u_n = \dfrac{-u_n^2 + 2u_n - 1}{\sqrt{2u_n - 1} + u_n} = \dfrac{-(u_n - 1)^2}{\sqrt{2u_n - 1} + u_n} < 0$. Donc, la suite (u_n) est strictement décroissante sur $\mathbb{N}$.

3. D'après le théorème des suites monotones, nous avons que (u_n) est minorée par 1 et strictement décroissante. Donc, elle converge vers une limite $l \geqslant 1$.
Posons $\lim\limits_{n\to+\infty} u_{n+1} = \lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 1$. Ce qui entraine que

$$l = \sqrt{2l - 1} \Leftrightarrow l^2 - 2l + 1 = 0 \Leftrightarrow (l-1)^2 = 0 \Leftrightarrow l = 1.$$

☆☆☆☆

Correction d'exercice 18

1. Posons, $P(n)$: $1 < u_n \leqslant 2$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.
   - a. **Initialisation** : On a : $u_0 = a \in]1,2]$, donc, $P(0)$ est vraie.
   - b. **Hérédité** : Supposons que $P(n)$ est vraie, c'est-à-dire $\forall n \in \mathbb{N}$: $1 < u_n \leqslant 2$, et on monter que $P(n+1)$ est vraie, c'est-à-dire $\forall n \in \mathbb{N}$: $1 < u_{n+1} \leqslant 2$. Alors, d'après, l'hypothèse, on

a :

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= \frac{(u_n)^2}{4}+\frac{3}{4} > \frac{1^2}{4}+\frac{3}{4} = 1. \\ u_{n+1} &= \frac{(u_n)^2}{4}+\frac{3}{4} \leqslant \frac{2^2}{4}+\frac{3}{4} = \frac{7}{4} \leqslant 2. \end{aligned}$$

Ce qui implique que, $\forall n \in \mathbb{N}:\ 1 < u_{n+1} \leqslant 2$. D'où $P(n+1)$ est vraie.

c **Conclusion :** $1 < u_n \leqslant 2$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

2 Pour tout $n \in \mathbb{N}$, et d'après quastion (1), on a :
$u_{n+1} - u_n = \frac{(u_n)^2}{4} + \frac{3}{4} - u_n = \frac{1}{4}\underbrace{(u_n-1)}_{>0}\underbrace{(u_n-3)}_{<0} < 0$. Donc, la suite (u_n) est strictement décroissante sur $\mathbb{N}$.
Comme (u_n) est minorée par 1 donc, d'après le théorème des suites monotones, elle est converge vers une limite $1 \leqslant l \leqslant 2$.

3 Posons $\lim\limits_{n\to+\infty} u_{n+1} = \lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 1$. Alors, par passage à la limite dans la relation récurrente, on obtient

$$l = \frac{l^2}{4}+\frac{3}{4} \Leftrightarrow l^2 - 4l + 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} l = 1 \\ \vee \\ l = 3 \end{cases} \Rightarrow l = 1.$$

Correction d'exercice 19

1 On a par la propriété du partie entière que : $\forall x \in \mathbb{R}:\ x - 1 < [x] \leqslant x$.
Par conséquent, si $x = k\pi$, où $k \in \{1, 2, .., n\}$, on aura $k\pi - 1 < [k\pi] \leqslant k\pi$.
Puis en sommant $\sum\limits_{k=1}^{k=n}(k\pi - 1) < \sum\limits_{k=1}^{k=n}[k\pi] \leqslant \sum\limits_{k=1}^{k=n} k\pi$.
Comme $\sum\limits_{k=1}^{k=n} k = \frac{n(n+1)}{2}$, (somme de n termes prémiers d'une suite arithmétique), alors, on a,

$$\pi\frac{n(n+1)}{2} - n < \sum_{k=1}^{k=n}[k\pi] \leqslant \pi\frac{n(n+1)}{2}.$$

Si on dévise par n^2, on obtient $\pi\frac{n(n+1)}{2n^2} - \frac{1}{n} < \frac{1}{n^2}\sum\limits_{k=1}^{k=n}[k\pi] \leqslant \pi\frac{n(n+1)}{2n^2}$.

2 Comme, $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\pi\frac{n(n+1)}{2n^2} - \frac{1}{n}\right) = \lim\limits_{n\to+\infty}\pi\frac{n(n+1)}{2n^2} = \frac{\pi}{2}$, alors, d'après le théorème des gendaremes, on a, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \frac{1}{n^2}\sum\limits_{k=1}^{k=n}[k\pi] = \frac{\pi}{2}$.

★★☆☆