Definition 1

Soit $x \in \mathbb{R}$, l'entier relative n qui vérifie $n \leqslant x < n+1$ est dite la partie entière de x, et on le note par $[x]$ (ou $E(x)$), c'est-à-dire $[x] \leqslant x < [x]+1$.

Definition 2

Soit x un nombre réel, on définit la valeur absolue de x par :

$$|x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geqslant 0\,; \\ -x & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

Theoreme 1

$\mathbb{R}$ est Archimédien, c'est-à-dire que

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \exists n \in \mathbb{N} : n > x. \tag{1}$$

Proposition 1

Toute partie A non vide majorée de $\mathbb{R}$ admet une borne supérieure et on a :

$$M = \sup A \Leftrightarrow \begin{cases} (i)\ \forall x \in A :\ x \leqslant M, \\ (ii)\ \forall \varepsilon > 0,\ \exists a \in A :\quad M - \varepsilon < a. \end{cases}$$

Toute partie A non vide minorée de $\mathbb{R}$ admet une borne inférieure et on a :

$$m = \inf A \Leftrightarrow \begin{cases} (i)\ \forall x \in A :\ m \leqslant x, \\ (ii)\ \forall \varepsilon > 0,\ \exists a \in A :\quad a < m + \varepsilon. \end{cases}$$

Remarque 1

Soit A une partie non vide de $\mathbb{R}$, alors,

1. Si M est un majorant de A et $M \in A$, on a $\sup A = M$.
2. Si m est un minorant de A et $m \in A$, on a $\inf A = m$.

Theoreme 2

Toute suite monotone admet une limite. Plus précisement :

1. Toute suite (u_n) croissante majorée admet une limite finie, et

$$\lim u_n = \sup\{u_n :\ n \in \mathbb{N}\}.$$

② Toute suite (u_n) décroissante minorée admet une limite finie, et

$$\lim u_n = \inf\{u_n : n \in \mathbb{N}\}.$$

Exercice 1

Soit l'ensemble A définie par $A = \left\{5 - \dfrac{1}{2n-1} : n \in \mathbb{N}^*\right\}$. Alors,

① Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^* : 4 \leqslant 5 - \dfrac{1}{2n-1} < 5$. En on déduit la bornitude de A.

② Montrer que la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ de terme générale $u_n = 5 - \dfrac{1}{2n-1}$ est croissante et puis calculer sa limite.

③ Déterminer $\inf(A)$. Est ce que A admet le petit élément (i.e.,$\min(A)$)?

④ Déduire $\sup(A)$. Est ce que A admet le grand élément (i.e.,$\max(A)$)?

⑤ En utilisant le propriété caractéristique de sup, montrer que $\sup(A) = 5$.

★★☆☆

Correction d'exercice 1

① Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$n \geqslant 1 \Leftrightarrow 2n-1 \geqslant 1 \Leftrightarrow 0 < \frac{1}{2n-1} \leqslant 1 \Leftrightarrow -1 \leqslant -\frac{1}{2n-1} < 0.$$

Donc, $4 \leqslant 5 - \dfrac{1}{2n-1} < 5$. Alors, en on déduit que $A \subset [4, 5[$, c'est-à-dire A est bornée.

② a On a : $\forall n \in \mathbb{N}^* :\ u_{n+1} - u_n = 5 - \dfrac{1}{2n+1} - (5 - \dfrac{1}{2n-1}) = \dfrac{2}{(2n+1)(2n-1)} > 0$. Donc, $(u_n)_{n\geqslant 1}$ est croissante sur $\mathbb{N}^*$.

b $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} (5 - \overbrace{\frac{1}{2n-1}}^{\nearrow 0}) = 5.$

③ Comme 4 et un minorant de A, car $\forall n \in \mathbb{N}^* : 5 - \dfrac{1}{2n-1} \geqslant 4$ et $4 \in A$ (pour $n = 1$). Donc, $\inf(A) = 4$, et d'après remarque 1, en on déduit que $\min(A) = 4$.

④ D'après le théorème 2, on obtient

$$\sup(A) = \sup\{u_n : n \in \mathbb{N}^*\} = \lim_{n\to+\infty} u_n = 5.$$

Comme $5 \notin A$, alors, $\max(A)$ n'existe pas.

⑤ Maintenant, on montre que $\sup(A) = 5$.

$$\sup(A) = 5 \Leftrightarrow \begin{cases} (i) & \forall u_n \in A \quad : u_n \leqslant 5 \\ (ii) & \forall \varepsilon > 0, \exists u_{n_0} \in A \quad : 5 - \varepsilon < u_{n_0}. \end{cases} \tag{2}$$

D'après ce que précédent (i) est évident, car $A \subset [4, 5[$.

Montrons (ii). Soit $\varepsilon > 0$, alors, on a $u_n \in A \Rightarrow \exists n \in \mathbb{N}^* : u_n = 5 - \dfrac{1}{2n-1}$. Donc,

$5-\varepsilon < u_{n_0} \Leftrightarrow 5-\varepsilon < 5-\frac{1}{2n_0-1} \Leftrightarrow \frac{1}{2n_0-1} < \varepsilon \Leftrightarrow 2n_0-1 > \frac{1}{\varepsilon} \Leftrightarrow n_0 > \frac{1+\varepsilon}{2\varepsilon}$, d'après le théorème d'Archimède 1 un tel naturel n_0 existe tel que $n_0 > \frac{1+\varepsilon}{2\varepsilon}$, on choisit, habituellement $n_0 = \left[\frac{1+\varepsilon}{2\varepsilon}\right]+1$ pour garantir (2).

EXERCICE 2

Soit l'ensemble B définie par $B = \left\{\frac{1}{2}+\frac{1}{2n+3} : n \in \mathbb{N}\right\}$. Alors,

1. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N} : \frac{1}{2} < \frac{1}{2}+\frac{1}{2n+3} \leqslant \frac{5}{6}$. En on déduit la bornitude de B.
2. Montrer que la suite (u_n) de terme générale $u_n = \frac{1}{2}+\frac{1}{2n+3}$ est décroissante et puis calculer sa limite.
3. Déduire $\inf(B)$. Est ce que B admet le petit élément (i.e.,$\min(B)$)?
4. Déterminer $\sup(B)$, et $\max(B)$ s'il existe.
5. En utilisant le propriété caractéristique de inf, montrer que $\inf(B) = \frac{1}{2}$.

★★☆☆

CORRECTION D'EXERCICE 2

1. On a pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$2n+3 \geqslant 3 \Leftrightarrow 0 < \frac{1}{2n+3} \leqslant \frac{1}{3} \Leftrightarrow \frac{1}{2} < \frac{1}{2}+\frac{1}{2n+3} \leqslant \frac{5}{6}.$$

Donc, $B \subset \left]\frac{1}{2}, \frac{5}{6}\right]$, c'est-à-dire B est bornée.

2. (a) On a : $\forall n \in \mathbb{N} :\ u_{n+1}-u_n = \frac{1}{2}+\frac{1}{2n+5}-(\frac{1}{2}+\frac{1}{2n+3}) = \frac{-2}{(2n+5)(2n+3)} < 0$. Donc, (u_n) est décroissante sur $\mathbb{N}$.

   (b) et $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} (\frac{1}{2}+\overbrace{\frac{1}{2n+3}}^{\nearrow 0}) = \frac{1}{2}$.
3. D'après le théorème 2, on a

$$\inf(B) = \inf\{u_n : n \in \mathbb{N}\} = \lim_{n\to+\infty} u_n = \frac{1}{2}.$$

Comme $\frac{1}{2} \notin B$, alors, $\min(B)$ n'existe pas.

4. On remarque que $\frac{5}{6}$ et un majorant de B, car $\forall n \in \mathbb{N} : \frac{1}{2}+\frac{1}{2n+3} \leqslant \frac{5}{6}$ et $\frac{5}{6} \in B$ pour $n=0$. Donc, $\sup(B) = \frac{5}{6}$, et d'après remarque 1, en on déduit que $\max(B) = \frac{5}{6}$.

★★☆☆

⑤ On montre que $\inf(B)=\frac{1}{2}$.

$$\inf(B)=\frac{1}{2}\Leftrightarrow\begin{cases}(i)\quad \forall u_n\in B & : u_n\geqslant\frac{1}{2}\\ (ii)\quad \forall\varepsilon>0,\exists u_{n_0}\in B & : u_{n_0}<\frac{1}{2}+\varepsilon.\end{cases}\tag{3}$$

D'après ce que précédent (i) est évident, car $B\subset\left]\frac{1}{2},\frac{5}{6}\right]$
Montrons (ii). Soit $\varepsilon>0$, alors, on a
$u_n\in B\Rightarrow\exists n\in\mathbb{N}:u_n=\frac{1}{2}+\frac{1}{2n+3}$. Donc,
$\frac{1}{2}+\varepsilon>u_{n_0}\Leftrightarrow\frac{1}{2}+\varepsilon>\frac{1}{2}+\frac{1}{2n_0+3}\Leftrightarrow\frac{1}{2n_0+3}<\varepsilon\Leftrightarrow 2n_0+3>\frac{1}{\varepsilon}\Leftrightarrow n_0>\frac{1-3\varepsilon}{2\varepsilon}$, $(\varepsilon<\frac{1}{3})$
d'après le théorème d'Archimède 1 un tel naturel n_0 existe tel que $n_0>\frac{1-3\varepsilon}{2\varepsilon}$, on choisit, habituellement $n_0=\left[\frac{1-3\varepsilon}{2\varepsilon}\right]+1$ pour garantir (3).

Exercice 3

Soit $x,y\in\mathbb{R}$ montrer que

$$\max\{x,y\}=\frac{x+y+|x-y|}{2}\quad\text{et}\ \min\{x,y\}=\frac{x+y-|x-y|}{2}.$$

☆☆☆☆

Correction d'exercice 3

① Pour l'égalité $\max\{x,y\}=\frac{x+y+|x-y|}{2}$, on déstingue deux cas

ⓐ Si $x\leqslant y$, alors, $\max\{x,y\}=y$ et $|x-y|=y-x$. Donc,

$$\frac{x+y+|x-y|}{2}=\frac{x+y+y-x}{2}=y=\max\{x,y\}.$$

ⓑ Si $y\leqslant x$, alors, $\max\{x,y\}=x$ et $|x-y|=x-y$. Donc,

$$\frac{x+y+|x-y|}{2}=\frac{x+y+x-y}{2}=x=\max\{x,y\}.$$

② Pour $\min\{x,y\}=\frac{x+y-|x-y|}{2}$, la même méthode

ⓐ Si $x\leqslant y$, alors, $\min\{x,y\}=x$ et $|x-y|=y-x$. Donc,

$$\frac{x+y-|x-y|}{2}=\frac{x+y-(y-x)}{2}=x=\min\{x,y\}.$$

ⓑ Si $y\leqslant x$, alors, $\min\{x,y\}=y$ et $|x-y|=x-y$. Donc,

$$\frac{x+y-|x-y|}{2}=\frac{x+y-(x-y)}{2}=y=\min\{x,y\}.$$

☆☆☆☆

Exercice 4

Soit E une partie non vide et bornée de $\mathbb{R}$. On définit l'ensemble

$$[E] = \{[x] : x \in E\}.$$

1. Montrer que $[E]$ est bornée dans $\mathbb{R}$.
2. Comparer entre $\inf E$ et $\inf[E]$, $\sup E$ et $\sup[E]$.

★★☆☆

Correction d'exercice 4

1. On a $E \subset \mathbb{R}$ (bornée). alors,
$$\exists a,\ b \in \mathbb{R},\ \forall x \in E : \ a \leqslant x \leqslant b. \tag{4}$$
Donc, d'après l'équation (4), comme ,$\forall x \in E : \ a \leqslant x \leqslant b \Rightarrow [a] \leqslant [x] \leqslant [b]$, car la fonction $x \mapsto [x]$ est croissante. Par conséquent, on a
$$\exists a'_{(a'=[a])},\ b'_{(b'=[b])} \in \mathbb{R},\ \forall x'_{(x'=[x])} \in [E] : \ a' \leqslant x' \leqslant b'.$$
D'où la bornitude de l'ensemble $[E]$.
2. D'après, les propriétés de partie entière, on a
$$\forall x \in E : \ [x] \leqslant x < [x] + 1.$$
Ça signifie que
$$\inf([E]) \leqslant \inf(E) \text{ et } \sup(E) \leqslant \sup([E]) + 1.$$
En effet, on a : $\forall x \in E : \ \inf([E]) \leqslant [x] \leqslant x$. Donc, $\inf([E])$ est un minorant de E, comme $\inf(E)$ est le grand des minorants on obtient,
$$\inf([E]) \leqslant \inf(E).$$
D'autre par on a aussi : $\forall x \in E : \ x < [x] + 1 \leqslant \sup([E]) + 1$. Par conséquent, $\sup([E]) + 1$ est un majorant de E. Comme $\sup(E)$ est le petit des majorants, d'où le résultat $\sup(E) \leqslant \sup([E]) + 1$.

★★☆☆

Remarque 2

L'inégalité $\sup(E) \leqslant \sup([E]) + 1$, est large malgré l'inégalité
$\forall x \in E : \ [x] \leqslant x < [x] + 1$, est stricte. Par exemple
Si $E = [2, 4[$, alors $[E] = \{2, 3\}$. On a donc,

$$\begin{cases} 2 = \inf([E]) \leqslant \inf(E) = 2, \\ 4 = \sup(E) \leqslant \sup([E]) + 1 = 3 + 1 = 4. \end{cases}$$

★★☆☆