Definition 1

Soit f une fonction définie sur $I - \{x_0\}$ et admettant une limite finie l en x_0. On appelle prolongement par continuité de f en x_0 la fonction $\tilde{f}$, définie sur I par

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x), & \text{si } x \neq x_0, \\ l, & \text{si } x = x_0. \end{cases}$$

La fonction $\tilde{f}$ est continue en x_0.

★★☆☆

Definition 2

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction. f est dite uniformément continue sur I si et seulement si

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta = \delta(\varepsilon),\ \forall (x, x') \in I^2 :\ |x - x'| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x')| < \varepsilon.$$

★★☆☆

Theoreme 1

Soit f une fonction definie et continue sur le segment $[a, b]$ telle que $f(a)f(b) < 0$ (c'est-à-dire que $f(a)$ et $f(b)$ sont de signes contraires), alors il existe au moins un point $c \in]a, b[$ vérifiant $f(c) = 0$. Si de plus f est stictement monotone, alors le nombre c est unique.

★★☆☆

Proposition 1

Si $f :]a, b] \to \mathbb{R}$ est continue et strictement décroissante, alors f est une bijection de $[a, b[$ sur $[f(b), \lim\limits_{\substack{x \to a \\ <}} f(x)[$.

★★☆☆

Definition 3

Soit f une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. Soit x_0 un point de I. On dit que f est dérivable en x_0 si la limite

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

existe et est finie. Cette limite est appelée derivée de f au point x_0 et on la note $f'(x_0)$.

★★☆☆

Theoreme 2

(Théorème de Rolle) Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction telle que

1. f est continue sur $[a, b]$,
2. f est dérivable sur $]a, b[$,
3. $f(a) = f(b)$.

Alors il existe $c \in]a, b[$ tel que $f'(c) = 0$.

★★☆☆

THEOREME 3

(Théorème des accroissements finis)
Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction vérifiant

1. f est continue sur $[a,b]$,
2. f est dérivable sur $]a,b[$.

Alors, $\exists c \in]a,b[: \ f(b)-f(a) = f'(c)(b-a)$.

★★☆☆

THEOREME 4

(La règle de l'Hospital) Soient $f, \ g : I \to \mathbb{R}$ deux fonctions dérivables, et $x_0 \in I$. On suppose que

(1) $f(x_0) = g(x_0) = 0$,

(2) $\forall x \in I - \{x_0\}: \quad g'(x) \neq 0$.

Si $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = l$, $(l \in \mathbb{R})$ alors $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = l$.

★★☆☆

EXERCICE 1

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \arctan\left(\frac{1}{x}\right) & : x \neq 0 \\ a & : x = 0. \end{cases}$$

1. Déterminer le nombre a pour que f soit continue sur $\mathbb{R}$.
2. Posons $a = 0$. Alors :
   a. Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}$.
   b. Calculer f'. Est ce que la fonction dérivée f' est continue sur $\mathbb{R}$?

★★☆☆

CORRECTION D'EXERCICE 1

1. f continue en 0 si et seulement si $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = f(0)$.

   On a $\lim\limits_{\substack{x\to 0 \\ <}} f(x) = 0 \times (-\frac{\pi}{2}) = 0$, et $\lim\limits_{\substack{x\to 0 \\ >}} f(x) = 0 \times (\frac{\pi}{2}) = 0$. Donc, $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0$. Par conséquent,

$$f \text{ continue en } 0 \Leftrightarrow \lim_{x\to 0} f(x) = 0 = f(0) = a \Rightarrow a = 0.$$

2. Posons $a = 0$.

   a. Comme les fonctions $x \mapsto x^2$, et $x \mapsto \arctan\left(\frac{1}{x}\right)$ sont dérivables en point 0. Donc, on a f est dérivable en 0, car elle est produit deux fonctions dérivables. Alors, il reste à démontrer la dérivabilité de f en 0. On a, donc
   $\lim\limits_{\substack{x\to 0 \\ <}} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim\limits_{\substack{x\to 0 \\ <}} x \arctan\left(\frac{1}{x}\right) = \times(-\frac{\pi}{2}) = 0 = f'_g(0)$.

★★☆☆

$\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} \dfrac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} x \arctan\left(\dfrac{1}{x}\right) = \times(\dfrac{\pi}{2}) = 0 = f'_d(0)$.

Donc, f est dérivable en point 0, car $f'_d(0) = f'_g(0)$, et on a $f'(0) = 0$.

b D'après ce qui précède, et comme,

$$\left(\arctan\left(\frac{1}{x}\right)\right)' = \frac{-1}{x^2} \times \frac{1}{1+(\frac{1}{x})^2} = \frac{-1}{x^2} \times \frac{x^2}{1+x^2} = \frac{-1}{1+x^2}.$$

Donc, on trouve

$$f'(x) = \begin{cases} 2x\arctan\left(\dfrac{1}{x}\right) - \dfrac{x^2}{1+x^2} & : x \neq 0 \\ 0 & : x = 0. \end{cases}$$

c Il est claire que f' est continue sur $\mathbb{R}^*$, car elle est somme de deux fonctions continues sur $\mathbb{R}^*$.

En point 0, on a :

$\lim\limits_{x \to 0}(2x\arctan\left(\dfrac{1}{x}\right) - \dfrac{x^2}{1+x^2}) = 0 \times (\pm\dfrac{\pi}{2}) + 0 = f'(0)$. D'ou le résultat, la continuité de f' sur $\mathbb{R}$.

EXERCICE 2

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $I =]-1,0[\cup]0,1[$ par $f(x) = \dfrac{1}{x}\arcsin(x^2)$.

1. Montrer que f est continue sur I.
2. Calculer $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$. Puis déduire que f est prolongeable par continuité en point 0.
3. a Soit la fonction g définie sur l'intervalle $J =]-1,1[$ par

$$g(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x}\arcsin(x^2) & : x \in J\setminus\{0\} \\ 0 & : x = 0. \end{cases}$$

Étudier la dérivabilité de g sur J. Puis calculer sa dérivée.

b Est ce que g' est continue en point 0.

CORRECTION D'EXERCICE 2

1. On a les fonctions $x \mapsto \dfrac{1}{x}$, $x \mapsto x^2$ et $x \mapsto \arcsin(x)$ sont continues sur I. Donc les fonctions composée et produit $x \mapsto \arcsin(x^2)$ et $x \mapsto \dfrac{1}{x}\arcsin(x^2)$ sont continues sur I.
2. Calculons la limite : $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$.

D'après la définition de dérivabilité de la fonction $x \mapsto \arcsin(x^2)$ en point 0, on aura

$$\lim_{x \to 0} f(x) = [\arcsin(x^2)]'_{x=0} = \left[\frac{2x}{\sqrt{1-x^4}}\right]_{x=0} = 0.$$

On peut aussi appliquer la règle de l'Hospitale, et on obtient le même résultat.

D'après la définition 1, la fonction f est prolongeable par continuité en 0 est sa prolongement est la fonction $\tilde{f}$ qui définie sur l'intervalle $]-1,1[$ par :

$$\tilde{f} = \begin{cases} \frac{1}{x}\arcsin(x^2) & : x \in I \\ 0 & : x = 0. \end{cases}$$

3. Au début, on remarque que $g = \tilde{f}$ sur J. Donc, on résulte que g est continue sur J.

   a. Comme les fonctions $x \mapsto \frac{1}{x}$, $x \mapsto x^2$ et $x \mapsto \arcsin(x)$ sont dérivables sur J. Alors, la fonction $x \mapsto \frac{1}{x}\arcsin(x^2)$ est dérivable sur J (car, composée et puis produit des fonctions dérivables). Alors, il est reste de démontrer la dérivabilité en 0.
   $\lim\limits_{x\to 0} \frac{g(x)-g(0)}{x-0} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{\arcsin(x^2)}{x^2} = \frac{0}{0}$ (FI).
   Posons $y = x^2$ alors, on a, $\begin{cases} y \to 0 \\ \text{si } x \to 0. \end{cases}$
   Donc, on trouve,

$$\lim_{x\to 0} \frac{\arcsin(x^2)}{x^2} = \lim_{y\to 0} \frac{\arcsin(y)}{y} = [\arctan(y)]'_{y=0} = \left[\frac{1}{\sqrt{1-y^2}}\right]_{y=0} = 1,$$

   c'est-à-dire, g est dérivable en point 0, et $g'(0) = 1$. Par conséquent, on a

$$g'(x) = \begin{cases} \frac{-1}{x^2}\arcsin(x^2) + \frac{2}{\sqrt{1-x^4}} & : x \in I \\ 1 & : x = 0. \end{cases}$$

   b. D'après ce qui précède, on a

$$\lim_{x\to 0} g'(x) = \lim_{x\to 0} \left[-\frac{\arcsin(x^2)}{x^2} + \frac{2}{\sqrt{1-x^4}}\right] = -1+2 = 1 = g'(0).$$

   D'où la continuité de g' en point 0.

EXERCICE 3

Soit la fonction f définie par $f(x) = \sqrt{\frac{3-x}{x+3}}$.

1. Justifier que l'ensemble de définition de f est $D =]-3,3]$.
2. Montrer que f est continue sur D. Est-elle dérivable ?
3. Montrer que f est strictement décroissante sur $]-3,3]$. Puis calculer $f(D)$.
4. Monter que l'équation $f(x) = x$ admet une solution unique dans l'intervalle $]0,1[$.

★★☆☆

CORRECTION D'EXERCICE 3

★★☆☆

1

$$
\begin{aligned}
D_f &= \left\{x \in \mathbb{R} : \frac{3-x}{x+3} \geqslant 0 \text{ et } x \neq -3\right\}\\
&= \left\{x \in \mathbb{R} : (3-x)(x+3) \geqslant 0 \text{ et } x \neq -3\right\}\\
&= \left\{x \in \mathbb{R} : -3 \leqslant x \leqslant 3 \text{ et } x \neq -3\right\} =]-3,3] = D
\end{aligned}
$$

2 a Comme les fonctions suivantes $x \mapsto 3-x$, $x \mapsto x+3$, sont continues sur D. Alors, la fonction $x \mapsto \dfrac{3-x}{x+3}$ est continue sur D. Par conséquent la fonction $x \mapsto \sqrt{\dfrac{3-x}{x+3}}$ aussi continue sur $D \setminus \{0\} =]-3,3[$. Car, $\forall x \in]-3,3[$: $\dfrac{3-x}{x+3} > 0$ et la fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$.

b On a la fonction $x \mapsto \dfrac{3-x}{x+3}$ est dérivable sur D. Donc la fonction $x \mapsto \sqrt{\dfrac{3-x}{x+3}}$ est dérivable sur $]-3,3[$. car $\forall x \in]-3,3[$: $\dfrac{3-x}{x+3} > 0$ et la fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ est dérivable où $x > 0$.

3 a On a pour tout $x \in]-3,3[$:

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= \frac{\left(\frac{(3-x)}{(x+3)}\right)'}{2\sqrt{\frac{3-x}{x+3}}} = \frac{\frac{-6}{(x+3)^2}}{2\sqrt{\frac{3-x}{x+3}}}\\
&= \frac{-3\sqrt{(x+3)}}{(x+3)^2\sqrt{3-x}} = \frac{-3}{(x+3)^{\frac{3}{2}}\sqrt{3-x}}.
\end{aligned}
$$

Donc, $\forall x \in]-3,3[$: $f'(x) < 0$. Car $\forall x \in]-3,3[$: $(x+3)^{\frac{3}{2}}\sqrt{3-x} > 0$. Par conséquent f est strictement décroissante sur D.

b D'après qui ce précède f est continue et strictement décroissante. Donc, de le théorme **??** on a

$$
\forall x \in]-3,3] : -3 < x \leqslant 3 \Rightarrow f(3) \leqslant f(x) < \lim_{\substack{x \to -3 \\ >}} f(x) \Rightarrow 0 \leqslant f(x) < +\infty.
$$

D'où $f(D) = [0,+\infty[$.

4 Posons $g(x) = f(x) - x$ pour tout $x \in]0,1[$. Alors, on remarque que la fonction g est satisfaite toutes les conditions de théorème des valeurs intermédiaires. En effet

a g est continue sur $]0,1[$, car les fonctions f et $x \mapsto x$ sont continues sur $]0,1[\subset]-3,3]$.

b $g(0) = 1 > 0$ et $g(1) = \dfrac{1}{2} - 1 = \dfrac{1-\sqrt{2}}{\sqrt{2}} < 0$, c'est-à-dire $g(0) \times g(1) < 0$. Donc, d'après le théorème précédente, il existe $c \in]0,1[$ tel que $g(c) = 0$. Par conséquent $f(c) - c = 0$, c'est-à-dire l'équation $f(x) = x$ admet au moins une solution dans $]0,1[$.
Comme la fonction f est strictement décroissante, alors la solution est unique.

Remarque 1

Le point c est appelle point fixe de f.

Exercice 4

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{x}{|x|+1}$.

1. Démontrer que f est bornée sur $\mathbb{R}$.
(Indication : On utilisant l'inégalité : $\forall x \in \mathbb{R} :\ -|x| \leqslant x \leqslant |x|$).
2. Monter que f est impaire.
3. Étudier la dérivabilité de f en 0. Puis déduire elle est dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer f'.
4. Démontrer que f définit une bijection de $\mathbb{R}$ sur l'intervalle $]-1,1[$. Exprimer f^{-1} en fonction de x.

Correction d'exercice 4

1. On montre que f est bornée sur $\mathbb{R}$. On utilise l'indication précédent, on trouve
$$\forall x \in \mathbb{R} :\ -|x| \leqslant x \leqslant |x| \Rightarrow \forall x \in \mathbb{R} :\ -|x|-1 \leqslant -|x| \leqslant x \leqslant |x| \leqslant |x|+1.$$
Puis, on dévise par $|x|+1$, on obtient
$$\forall x \in \mathbb{R} :\ -1 = \frac{-|x|-1}{|x|+1} \leqslant \frac{-|x|}{|x|+1} \leqslant \frac{x}{|x|+1} \leqslant \frac{|x|}{|x|+1} \leqslant \frac{|x|+1}{|x|+1} = 1.$$
Donc, $\forall x \in \mathbb{R} :\ -1 \leqslant f(x) \leqslant 1$. D'où la bornitude de f.
2. $$f \text{ est impaire} \Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R} : -x \in \mathbb{R} \text{ et } f(-x) = -f(x).$$
Alors, pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a $-x \in \mathbb{R}$, car $\mathbb{R}$ est un corps commutatif, et on a $f(-x) = \dfrac{-x}{|-x|+1} = -\dfrac{x}{|x|+1} = -f(x)$. Donc, f est impaire.
3. On a
$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{x+1} & : x \geqslant 0 \\ \dfrac{x}{-x+1} & : x \leqslant 0. \end{cases}$$
Montrons que f est dérivable en 0.
$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ <}} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{\substack{x \to 0 \\ <}} \frac{\frac{x}{1-x}}{x} = \lim_{\substack{x \to 0 \\ <}} \frac{1}{1-x} = 1 = f'_g(0).$$
$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ >}} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{\substack{x \to 0 \\ >}} \frac{\frac{x}{1+x}}{x} = \lim_{\substack{x \to 0 \\ >}} \frac{1}{1+x} = 1 = f'_d(0).$$
Donc, f est dérivable en point 0, car $f'_d(0) = 1 = f'_g(0)$, et on a $f'(0) = 1$.
On sait que les fonctions rationnelles $x \mapsto \dfrac{x}{x+1}$ et $x \mapsto \dfrac{x}{-x+1}$ sont continues sur leurs intervalles des définitions $]0,+\infty[$ ($]-\infty,0[$ resp). D'où la dérivabilité de f sur $\mathbb{R}$.

Par calcule simple sur les dérivées des fonctions usuelles, on trouve

$$f'(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{(1+x)^2} & : x\geqslant 0\\ \dfrac{1}{(1-x)^2} & : x\leqslant 0.\end{cases}$$

4 a Comme f est continue sur $\mathbb{R}$, (car elle est dérivable sur $\mathbb{R}$). et strictement croissante sur $\mathbb{R}$, puisque $\forall x\in\mathbb{R}:\ f'(x)>0$. On a aussi

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{x}{1-x}=-1,\ \lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{1+x}=1.$$

Donc, d'après théorème de bijection, f est une bijective de $\mathbb{R}$ dans $f(\mathbb{R})=]-1,1[$.

b On a $\forall x\in\mathbb{R},\forall x\in]-1,1[:\ y=f(x)\Leftrightarrow x=f^{-1}(y)$. Alors, on aura
Si $x\geqslant 0$ on a $y=f(x)\Leftrightarrow y=\dfrac{x}{x+1}\Leftrightarrow x(y-1)=-y\Leftrightarrow x=\dfrac{y}{1-y}=f^{-1}(y)$.
Si $x\leqslant 0$ on a $y=f(x)\Leftrightarrow y=\dfrac{x}{-x+1}\Leftrightarrow x(y+1)=y\Leftrightarrow x=\dfrac{y}{1+y}=f^{-1}(y)$. Donc, on trouve $f^{-1}:]-1,1[\to\mathbb{R}$ telle que

$$f^{-1}(x)=\begin{cases}\dfrac{x}{1-x} & : x\geqslant 0\\ \dfrac{x}{1+x} & : x\leqslant 0.\end{cases}$$

Exercice 5

En utilisant la règle de l'Hospital, calculer les limites suivantes

1. $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{x-\sin(x)}{x^3}$.
2. $\displaystyle\lim_{x\to0^+}\frac{\ln(x+1)}{2\sqrt{x}}$.
3. $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{x}{(x+1)^n-1}$, $(n\in\mathbb{N}^*\setminus\{0\})$.
4. $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{ch(x)-1}{x}$.

★★☆☆

Correction d'exercice 5

1. $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{x-\sin(x)}{x^3}=\frac{0}{0}$ (formeindéterminée). On a $(x-\sin(x))'=1-\cos(x)$ et $(x^3)'=3x^2$. Donc, d'après règle de l'Hospitale 4, on trouve $\displaystyle\frac{1}{3}\lim_{x\to0}\frac{1-\cos(x)}{x^2}=\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{6}$, ce qui donne $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{x-\sin(x)}{x^3}=\frac{1}{6}$. Car $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{1-\cos(x)}{x^2}=\frac{1}{2}$.
On peut appliquer règle l'Hospitale deux fois ou trois fois comme suit, et on obtient même résultat.
$\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{x-\sin(x)}{x^3}=\frac{1}{3}\lim_{x\to0}\frac{1-\cos(x)}{x^2}=\frac{1}{6}\lim_{x\to0}\frac{\sin(x)}{x}=\frac{1}{6}$,
2. $\displaystyle\lim_{x\to0^+}\frac{\ln(x+1)}{2\sqrt{x}}=\frac{0}{0}$ (FI). Donc, d'après règle de l'Hospitale 4, on trouve

★★☆☆

$$\lim_{x\to0^+}\frac{(\ln(x+1))'}{2(\sqrt{x})'}=\lim_{x\to0^+}\frac{\sqrt{x}}{x+1}=0=\lim_{x\to0^+}\frac{\ln(x+1)}{2\sqrt{x}}.$$

3. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x}{(x+1)^n-1}=\dfrac{0}{0}$ (FI). On appliquant règle de l'Hospitale, donc, on trouve, $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1}{n(x+1)^{n-1}}=\dfrac{1}{n}$. Alors, $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x}{(x+1)^n-1}=\dfrac{1}{n}$.

4. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{ch(x)-1}{x}=\dfrac{0}{0}$ (FI). Alors, on a $(ch(x)-1)'=sh(x)$ et $(x)'=1$. Donc $\lim\limits_{x\to0}sh(x)=0=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{ch(x)-1}{x}$.
On peut utiliser la définition de dérivabilité de la fonction $x\mapsto ch(x)$, c'est-à-dire $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{ch(x)-1}{x}=(ch(x))'_{x=0}=sh(0)=0$.

Exercice 6

Résoudre l'équation suivante : $\arcsin(x)+\arcsin(x\sqrt{3})=\dfrac{\pi}{2}$.

★★☆☆

Correction d'exercice 6

1. On a la fonction $\arcsin:[-1,1]\mapsto\left[-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right]$. Donc l'équation précédente définie si et seulement si

$$-1\leqslant x\leqslant1 \text{ et } -1\leqslant x\sqrt{3}\leqslant1\Leftrightarrow x\in\left[-\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}}\right].$$

Alors, pour tout $x\in\left[-\dfrac{1}{\sqrt{3}},\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right]$, on a :

$$\begin{aligned}\arcsin(x)+\arcsin(x\sqrt{3})=\frac{\pi}{2} &\Leftrightarrow \arcsin(x\sqrt{3})=\frac{\pi}{2}-\arcsin(x)\\ &\Leftrightarrow \sin(\arcsin(x\sqrt{3}))=\sin\left(\frac{\pi}{2}-\arcsin(x)\right)\\ &\Leftrightarrow x\sqrt{3}=\cos(\arcsin(x)).\end{aligned}$$

Comme $\forall x\in[-1,1]:\ \cos(\arcsin(x))=\sqrt{1-x^2}$. Alors, on obtient

$$x\sqrt{3}=\sqrt{1-x^2}\Leftrightarrow(4x^2-1=0)\Leftrightarrow(x=\frac{1}{2}\vee x=-\frac{1}{2})$$

Donc $\dfrac{1}{2}$ convient. Par contre $-\dfrac{1}{2}$ ne convient pas, car $\arcsin(x)$ et x étant de même signe le nombre $-\dfrac{1}{2}$ donne une valeur négative, c'est-à-dire :

$$\arcsin\left(-\frac{1}{2}\right)+\arcsin\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=-\frac{\pi}{6}-\frac{\pi}{3}=-\frac{\pi}{2}.$$

Donc, l'ensemble de solution est $S=\left\{\dfrac{1}{2}\right\}$.

★★☆☆

Exercice 7

Soit la fonction f définie sur l'intervalle $[-1,+\infty[$ par $f(x)=\sqrt{x+1}$. Montrer que f est uniformément continue sur $[0,+\infty[$.

★★☆☆

Correction d'exercice 7

D'après la définition 2, f est uniformément continue sur $[0,+\infty[$ si et seulement si

$$\forall \varepsilon>0,\ \exists \delta=\delta(\varepsilon),\ \forall (x,x')\in([0,+\infty[)^2 :\ |x-x'|<\delta \Rightarrow |f(x)-f(x')|<\varepsilon.$$

Soit $\forall \varepsilon>0$, et pour tous $x,x'\in[0,+\infty[$. Alors, on a :

$$|f(x)-f(x')|=|\sqrt{x'+1}-\sqrt{x+1}|=|\frac{x'-x}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x'+1}}|.$$

Comme pour tous x et x' dans $[0,+\infty[$, on a :

$$\begin{cases} x\geqslant 0 \\ x'\geqslant 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+1\geqslant 1 \\ x'+1\geqslant 1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x+1}\geqslant 1 \\ \sqrt{x'+1}\geqslant 1\end{cases} \Rightarrow \sqrt{x+1}+\sqrt{x'+1}\geqslant 2 \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x'+1}}\leqslant \frac{1}{2}.$$

Alors, on trouve $|f(x)-f(x')|=|\sqrt{x'+1}-\sqrt{x+1}|=\dfrac{|x'-x|}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x'+1}}\leqslant \dfrac{1}{2}|x'-x|<\varepsilon$. Donc, on choisir, $\delta=\varepsilon$ pour que la condition au desous soit vérifiée. D'où le résultat.

★★☆☆

Exercice 8

Soient a un réel et f une fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{a-x^2}{2} & : x\leqslant 1 \\ \dfrac{1}{2x} & : x>1 \end{cases} \Leftrightarrow$$

1. Déterminer a pour que soit f continue en point 1.
2. Posons $a=2$. Alors,
   a. Déduire la continuité de f sur $\mathbb{R}$.
   b. Étudier la dérivabilité de f sur $\mathbb{R}$.
   c. Montrer qu'il existe $c\in]0,1[$ tel que :

$$f(1)-f(0)=(1-0)f'(c).$$

★★☆☆

Correction d'exercice 8

1. On a $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ >}} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ >}}\dfrac{1}{2x}=\dfrac{1}{2}$, et $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ <}} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ <}}\dfrac{a-x^2}{2}=\dfrac{a-1}{2}=f(1)$. Donc, on aura

$$f \text{ est continue en } 1 \Leftrightarrow \frac{a-1}{2}=\frac{1}{2}\Leftrightarrow a=2.$$

★★☆☆

(2) Posons $a = 2$. Alors, on a

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{2-x^2}{2} & : x \leqslant 1 \\ \dfrac{1}{2x} & : x > 1 \end{cases}$$

(a) D'après ce qui précède, et comme les fonctions $x \mapsto \dfrac{2-x^2}{2}$ et $x \mapsto \dfrac{1}{2x}$ (resp) sont continues sur les intervalles $]-\infty, 1[$ et $]1, +\infty[$ (resp). D'où le résultat, f est continue sur $\mathbb{R}$.

(b) La fonction $x \mapsto \dfrac{2-x^2}{2}$ est dérivable sur $]-\infty, 1[$, car elle est polynôme. et la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{2x}$ aussi dérivable sur $]1, +\infty[$, car elle est rationnelle. Donc, il est rest de démonter la dérivabilité en point 1.

$$\lim_{\substack{x \to 1 \\ <}} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{\substack{x \to 1 \\ <}} \frac{\frac{2-x^2}{2} - \frac{1}{2}}{x-1} = \lim_{\substack{x \to 1 \\ <}} \frac{1-x^2}{2(x-1)} = \lim_{\substack{x \to 1 \\ <}} \frac{-(x+1)}{2} = -1 = f'_g(1).$$

$$\lim_{\substack{x \to 1 \\ >}} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{\substack{x \to 1 \\ >}} \frac{\frac{1}{2x} - \frac{1}{2}}{x-1} = \lim_{\substack{x \to 1 \\ >}} \frac{-1}{2x} = -\frac{1}{2} = f'_d(1).$$

$f'_d(1) \neq f'_g(1)$, c'est-à-dire, f n'est pas dérivable en point 1. Donc, f est dérivable seulement sur $\mathbb{R}^*$.

(c) D'après ce qui précède f continue sur $[0, 1] \subset \mathbb{R}$ et dérivable sur $]0, 1[\subset]-\infty, 1[$. donc, de le théorème des accroissements finis 3, il existe $c \in]0, 1[$ tel que $f(1) - f(0) = (1-0)f'(c)$. On a $f(1) = \dfrac{1}{2}$, $f(0) = 1$ et $f'(c) = -c$. alors,

$$f(1) - f(0) = (1-0)f'(c) \Leftrightarrow f'(c) = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow c = \frac{1}{2} \in]0, 1[.$$