Definition 1

Soient (u_n) et (v_n) deux suites réelles. On dit que (u_n) et (v_n) sont adjacentes si et seulement si

1. une des suites est croissante, l'autre décroissante.
2. et $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_n - v_n) = 0$.

Theoreme 1

Si deux suites sont adjacentes, alors elles sont convergentes et elles ont même limite.

Definition 2

une suite (u_n) est dite de Cauchy si elle vérifie la propriété suivante :

$$\forall\varepsilon > 0,\ \exists n_0 \in \mathbb{N},\ \ \forall p, q \in \mathbb{N} : \quad p, q \geqslant n_0 \Rightarrow |u_p - u_q| < \varepsilon.$$

Theoreme 2

Toute suite monotone admet une limite. Plus précisement :

1. Toute suite (u_n) croissante majorée admet une limite finie, et
$$\lim u_n = \sup\{u_n :\ n \in \mathbb{N}\}.$$
2. Toute suite (u_n) décroissante minorée admet une limite finie, et
$$\lim u_n = \inf\{u_n :\ n \in \mathbb{N}\}.$$

Theoreme 3

Soient (u_n), (v_n) et (w_n) trois suites réelles, et supposons que à partir d'un certain rang on a

$$u_n \leqslant v_n \leqslant w_n.$$

1. Si les suites (u_n) et (w_n) ont la même limite $l \in \mathbb{R}$, alors $\lim v_n = l$.
2. Si la suite (u_n) a pour limite $+\infty$, alors $\lim v_n = +\infty$.
3. Si la suite (w_n) a pour limite $-\infty$, alors $\lim v_n = -\infty$.

Exercice 1

① Soit $a \in \mathbb{R}_+$. Montrer que par récurrence l'inégalité de Bernoulli suivante

$$\forall n \in \mathbb{N}: \ (1+a)^n \geqslant 1 + an$$

② Soit la suite (u_n) de terme générale $u_n = q^n$ tel que $q \in \mathbb{R}$. Démontrer que

- a Si $q \in]1, +\infty[$ alors, (u_n) est dévergente.
- b Si $q = 1$ alors, (u_n) est constante, donc convergente vers 1.
- c Si $q \in]-1, 1[$ alors, (u_n) est convergente vers 0.
- d Si $q \in]-\infty, -1]$ alors, (u_n) n'admet pas de limite, donc dévergente.

★★☆☆

Correction d'exercice 1

① Posons, $P(n): \ (1+a)^n \geqslant 1 + an$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

- a **Initialisation** : On a : $(1+a)^0 = 1 \geqslant 1 + 0a$, donc, $P(0)$ est vraie.
- b **Hérédité** : Supposons que $P(n)$ est vraie, c'est-à-dire $\forall n \in \mathbb{N}: \ (1+a)^n \geqslant 1 + an$, et on monter que $P(n+1)$ est vraie, c'est-à-dire $\forall n \in \mathbb{N}: \ (1+a)^{n+1} \geqslant 1 + a(n+1)$. Alors, d'après, l'hypothèse, on a

$$\begin{aligned} (1+a)^{n+1} &\geqslant (1+a)^n(1+a) \\ &\geqslant (1+an)(1+a) = 1 + an + a + a^2 n \\ &\geqslant 1 + a(n+1). \end{aligned}$$

  Car, $a^2 n \geqslant 0$, d'où le résultat $P(n+1)$ est vraie.

- c **Conclusion** : $(1+a)^n \geqslant 1 + an$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

② On étude la convergence la suite géométrique de terme générale $u_n = q^n$ $(q \in \mathbb{R})$.

- a Si $q \in]1, +\infty[$ alors, il existe $a \geqslant 0$ tel que $q = 1 + a$. Donc, d'après, l'inégalité de Bernoulli, on a

$$\forall n \in \mathbb{N}: \ q^n = (1+a)^n \geqslant 1 + an.$$

  ce qui donne,

$$\lim_{n \to +\infty} u_n = \lim_{n \to +\infty} q^n \geqslant \lim_{n \to +\infty} (1 + an) = +\infty.$$

- b Si $q = 1$, alors $u_n = 1$, pour tout $n \in \mathbb{N}$. Donc, $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 1$.
- c Maintenant, si $q \in]-1, 1[$, on distingue deux cas,

  α) Si $q = 0$, alors, $u_n = 0$, pour tout $n \in \mathbb{N}$. Donc, $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 0$.

  β) Si $q \neq 0$, alors, il existe $q' \in]1, +\infty[$ tel que, $|q| = \dfrac{1}{q'}$. Donc, d'après (a), le resultat précedent, on a, $\lim\limits_{n \to +\infty} q'^n = +\infty$. Par conséquent, on obtient $\lim\limits_{n \to +\infty} |q|^n = 0$. D'où $\lim\limits_{n \to +\infty} q^n = 0$.

- d Si $q \in]-\infty, -1]$ alors, on on distingue deux cas,

★★☆☆

γ) Si $q=-1$, alors, (u_n) n'admet pas de limite, car

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} (-1)^n = \begin{cases} 1 & : n \text{ pair} \\ -1 & : n \text{ impair.} \end{cases}$$

δ) Si $q \in]-\infty,-1[$, alors, il existe $q' \in]1,+\infty[$, tel que $q=-q'$. Donc,

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} (-1)^n (q')^n = \begin{cases} +\infty & : n \text{ pair} \\ -\infty & : n \text{ impair.} \end{cases}$$

La suite (u_n) n'a pas de limite.

Conclusion : La suite géométrique (q^n) converge si et seulement si $q \in]-1,1]$.

EXERCICE 2

Soient $a \in]1,2]$ et (u_n) une suite définie par la relation de récurrence

$$\begin{cases} u_0 = a \\ u_{n+1} = \dfrac{(u_n)^2}{4} + \dfrac{3}{4} \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N} \end{cases} \tag{1}$$

1. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N} : 1 < u_n \leqslant 2$.
2. Étudier la monotonie de la suite (u_n). En déduire que elle est convergente.
3. Déterminer sa limite.

★★☆☆

CORRECTION D'EXERCICE 2

1. Posons, $P(n)$: $1 < u_n \leqslant 2$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.
   a. **Initialisation** : On a : $u_0 = a \in]1,2]$, donc, $P(0)$ est vraie.
   b. **Hérédité** : Supposons que $P(n)$ est vraie, c'est-à-dire $\forall n \in \mathbb{N}$: $1 < u_n \leqslant 2$, et on monter que $P(n+1)$ est vraie, c'est-à-dire $\forall n \in \mathbb{N}$: $1 < u_{n+1} \leqslant 2$. Alors, d'après, l'hypothèse, on a :

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= \frac{(u_n)^2}{4} + \frac{3}{4} > \frac{1^2}{4} + \frac{3}{4} = 1. \\ u_{n+1} &= \frac{(u_n)^2}{4} + \frac{3}{4} \leqslant \frac{2^2}{4} + \frac{3}{4} = \frac{7}{4} \leqslant 2. \end{aligned}$$

   Ce qui implique que, $\forall n \in \mathbb{N}$: $1 < u_{n+1} \leqslant 2$. D'où $P(n+1)$ est vraie.
   c. **Conclusion** : $1 < u_n \leqslant 2$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.
2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, et d'après quastion (1), on a :
   $u_{n+1} - u_n = \dfrac{(u_n)^2}{4} + \dfrac{3}{4} - u_n = \dfrac{1}{4}\underbrace{(u_n-1)}_{>0}\underbrace{(u_n-3)}_{<0} < 0$. Donc, la suite (u_n) est strictement décroissante sur $\mathbb{N}$.
   Comme (u_n) est minorée par 1 donc, d'après le théorème 2 elle converge vers une limite $1 \leqslant l \leqslant 2$.

★★☆☆

③ Posons $\lim\limits_{n\to+\infty} u_{n+1} = \lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 1$. Alors, par passage à la limite dans (1), on obtient

$$l = \frac{l^2}{4} + \frac{3}{4} \Leftrightarrow l^2 - 4l + 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} l = 1 \\ \vee \\ l = 3 \end{cases} \Rightarrow l = 1.$$

EXERCICE 3

Soit la suite (u_n) définie par la relation de récurrence

$$\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = \sqrt{2u_n - 1} \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

① Montrer que $\forall n \in \mathbb{N} : u_n \geqslant 1$.

② Étudier la monotonie de la suite (u_n).

③ En déduire que la suite (u_n) est convergente. Déterminer sa limite.

★★☆☆

CORRECTION D'EXERCICE 3

① Posons, $P(n) :\ u_n \geqslant 1$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

ⓐ **Initialisation** : On a : $u_0 = 2 \geqslant 1$, donc, $P(0)$ est vraie.

ⓑ **Hérédité** : Supposons que $P(n)$ est vraie, c'est-à-dire $\forall n \in \mathbb{N} : u_n \geqslant 1$, et on monter que $P(n+1)$ est vraie, c'est-à-dire $\forall n \in \mathbb{N} :\ u_{n+1} \geqslant 1$. Donc, on a :

$$u_n \geqslant 1 \Leftrightarrow u_n^2 \geqslant 1 \Leftrightarrow 2u_n^2 \geqslant 2 \Leftrightarrow 2u_n^2 - 1 \geqslant 1 \Rightarrow \sqrt{2u_n^2 - 1} \geqslant 1.$$

Par conséquent, $\forall n \in \mathbb{N} :\ u_{n+1} \geqslant 1$. D'où $P(n+1)$ est vraie.

ⓒ **Conclusion** : $u_n \geqslant 1$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

② Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$u_{n+1} - u_n = \sqrt{2u_n - 1} - u_n = \dfrac{-u_n^2 + 2u_n - 1}{\sqrt{2u_n - 1} + u_n} = \dfrac{-(u_n - 1)^2}{\sqrt{2u_n - 1} + u_n} < 0$. Donc, la suite (u_n) est strictement décroissante sur $\mathbb{N}$.

③ D'après le théorème 2, nous avons que (u_n) est minorée par 1 et strictement décroissante. Donc, elle converge vers une limite $l \geqslant 1$.
Posons $\lim\limits_{n\to+\infty} u_{n+1} = \lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 1$. Ce qui entraine que

$$l = \sqrt{2l - 1} \Leftrightarrow l^2 - 2l + 1 = 0 \Leftrightarrow (l-1)^2 = 0 \Leftrightarrow l = 1.$$

★★☆☆

EXERCICE 4

Soit la suite (u_n) définie par la relation de récurrence

$$\begin{cases} u_0 = 27e^2 \\ u_{n+1} = 9\sqrt[3]{u_n} \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

★★☆☆

Posons, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $v_n = \ln\left(\frac{u_n}{27}\right)$.

1. Montrer que la suite (v_n) est une suite geométrique et calculer son raison q et la premier terme v_0.
2. Écrire v_n et u_n en fonction de n.
3. Calculer les limites $\lim_{n\to+\infty} v_n$ et $\lim_{n\to+\infty} u_n$.

CORRECTION D'EXERCICE 4

1. On a pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$v_{n+1} = \ln\left(\frac{u_{n+1}}{27}\right) = \ln\left(\frac{9\sqrt[3]{u_n}}{27}\right) = \ln\left(\sqrt[3]{\frac{u_n}{27}}\right) = \ln\left(\frac{u_n}{27}\right)^{\frac{1}{3}} = \frac{1}{3}\ln\left(\frac{u_n}{27}\right) = \frac{1}{3}v_v.$$

Donc, (v_n) est une suite geométrique de raison $q = \frac{1}{3}$ et $v_0 = \ln\left(\frac{u_0}{27}\right) = \ln(e^2) = 2$.

2. Les termes générales des (v_n) et (u_n).
   a. On a pour tout $n \in \mathbb{N}$: $v_n = v_0 q^n$, c'est-à-dire, $v_n = 2\left(\frac{1}{3}\right)^n$.
   b. Comme, $v_n = \ln\left(\frac{u_n}{27}\right)$, alors, $u_n = 27e^{v_n}$. Alors, par conséquent, on aura,

$$u_n = 27e^{2(\frac{1}{3})^n}.$$

3. On a

$$\lim_{n\to+\infty} v_n = 2\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^n = 0, \text{ car } q \in]-1,1[, \text{ et } \lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} 27e^{2(\frac{1}{3})^n} = 27e^0 = 27.$$

★★☆☆

EXERCICE 5

Soit la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ définie par

$$u_n = \frac{[\pi] + [2\pi] + \ldots + [n\pi]}{n^2},$$

où $[x]$ désigne la partie entière du nombre réel x.

1. Donner un encadrement de u_n.
2. montrer que la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ converge et trouver sa limite.

★★☆☆

CORRECTION D'EXERCICE 5

1. On a par la propriété du partie entière que

$$\forall x \in \mathbb{R} : x - 1 < [x] \leqslant x.$$

★★☆☆

Par conséquent, si $x = k\pi$, où $k \in \{1, 2, .., n\}$, on aure

$$k\pi - 1 < [k\pi] \leqslant k\pi.$$

Puis en sommant

$$\sum_{k=1}^{k=n} (k\pi - 1) < \sum_{k=1}^{k=n} [k\pi] \leqslant \sum_{k=1}^{k=n} k\pi.$$

Comme $\sum_{k=1}^{k=n} k = \frac{n(n+1)}{2}$, (somme de n termes prémiers d'une suite arithmétique), alors, on a,

$$\pi\frac{n(n+1)}{2} - n < \sum_{k=1}^{k=n} [k\pi] \leqslant \pi\frac{n(n+1)}{2}.$$

Si on dévise par n^2, on obtient

$$\pi\frac{n(n+1)}{2n^2} - \frac{1}{n} < \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{k=n} [k\pi] \leqslant \pi\frac{n(n+1)}{2n^2}.$$

2. Comme, $\lim_{n\to+\infty} \left(\pi\frac{n(n+1)}{2n^2} - \frac{1}{n}\right) = \lim_{n\to+\infty} \pi\frac{n(n+1)}{2n^2} = \frac{\pi}{2}$, alors, d'après le théorème des gendaremes 3, on a, $\lim_{n\to+\infty} u_n = \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{k=n} [k\pi] = \frac{\pi}{2}$.

EXERCICE 6

Soient les suites $(u_n)_{n\geqslant 1}$ et $(v_n)_{n\geqslant 1}$ définies par

$$u_n = 1 + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} + ... + + \frac{1}{n^3} \text{ et } \ v_n = u_n + \frac{1}{n^2}.$$

1. Monter que les suites $(u_n)_{n\geqslant 1}$ et $(v_n)_{n\geqslant 1}$ sont adjacentes.
2. Conclure.

★★☆☆

CORRECTION D'EXERCICE 6

1. a. $(u_n)_{n\geqslant 1}$ est croissante. En effet, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$u_{n+1} - u_n = \sum_{k=1}^{k=n+1} \frac{1}{k^3} - \sum_{k=1}^{k=n} \frac{1}{k^3} = \frac{1}{(n+1)^3} > 0.$$

b. $(v_n)_{n\geqslant 1}$ est décroissante. En effet, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

★★☆☆

$$
\begin{aligned}
v_{n+1}-v_n &= u_{n+1}+\frac{1}{(n+1)^2}-u_n-\frac{1}{n^2}\\
&= \frac{1}{(n+1)^3}+\frac{1}{(n+1)^2}-\frac{1}{n^2}=\frac{n^2+n^2(n+1)-(n+1)^3}{n^2(n+1)^3}\\
&= -\frac{n^2+3n+1}{n^2(n+1)^3}\leqslant 0
\end{aligned}
$$

c) Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, on a :
$v_n-u_n=u_n+\dfrac{1}{n^2}-u_n=\dfrac{1}{n^2}$. Donc, $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n-u_n=\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1}{n^2}=0$.
Alors, les suites $(u_n)_{n\geqslant 1}$ et $(v_n)_{n\geqslant 1}$ sont adjacentes.

2) Le théorème 1 garantit alors que $(u_n)_{n\geqslant 1}$ et $(v_n)_{n\geqslant 1}$ convergent vers une même limite.

EXERCICE 7

Soit La suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ définie par $u_n=\cos\left(\dfrac{1}{n}\right)$. Montrer que elle est de Cauchy.

★★☆☆

CORRECTION D'EXERCICE 7

D'après la définition 2, $(u_n)_{n\geqslant 1}$ de Cauchy ssi

$$\forall\varepsilon>0,\ \exists n_0\in\mathbb{N}^*,\ \forall p,q\in\mathbb{N}:\quad p>q\geqslant n_0\Rightarrow |u_p-u_q|<\varepsilon.$$

Soit $\varepsilon>0$ et pour $p,q\in\mathbb{N}$, $(p>q)$. Alors, d'après les deux inégalités suivantes, on obtient

$$\forall x\in\mathbb{R}:\ |\sin x|\leqslant 1 \text{ et } |\sin x|\leqslant |x|.$$

$$|u_p-u_q|=|\cos\left(\frac{1}{p}\right)-\cos\left(\frac{1}{q}\right)|=2|\sin(\frac{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}}{2})\sin(\frac{\frac{1}{p}+\frac{1}{q}}{2})|\leqslant\frac{1}{p}+\frac{1}{q}\leqslant\frac{2}{q}<\varepsilon.$$

Donc, ce qui donne $q>\dfrac{2}{\varepsilon}$. Alors, il suffit de choisir $n_0=\left[\dfrac{2}{\varepsilon}\right]+1$ pour garntit l'implication présédente.

★★☆☆