✍ Examen d'Analyse (Session Normale) ✍

1er Année Socle Commun Durée : 1 h et 30 min Module Analyse 1

Exercice 1: 6 points

Soit l'ensemble A définie par $A = \left\{5 - \frac{1}{2n-1} \ : \ n \in \mathbb{N}^*\right\}$. Alors,

1. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^* : 4 \leq 5 - \frac{1}{2n-1} < 5$. En on déduit la bornitude de A.
2. Montrer que la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ de terme générale $u_n = 5 - \frac{1}{2n-1}$ est strictement croissante et puis calculer sa limite.
3. Déterminer $\inf(A)$. Est ce que A admet le petit élément (i.e.,$\min(A)$) ?
4. Déduire $\sup(A)$. Est ce que A admet le grand élément (i.e.,$\max(A)$) ?
5. En utilisant le propriété caractéristique de borne supérieure, sup, montrer que $\sup(A) = 5$.

Exercice 2: 7 points

Soit la suite (u_n) définie par la relation de récurrence $\begin{cases} u_0 = 9e \\ u_{n+1} = 3\sqrt{u_n} \end{cases}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Posons $v_n = \ln\left(\frac{u_n}{9}\right)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1. Montrer que la suite (v_n) est une suite geométrique et calculer son raison q et la premier terme v_0.
2. Écrire v_n et u_n en fonction de n.
3. Calculer les limites $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

Exercice 3: 7 points

Soit la fonction f définie sur $D =]-2, 2]$ par $f(x) = \sqrt{\frac{2-x}{x+2}}$.

1. Montrer que f est continue sur D. Est-elle dérivable ?
2. Montrer que f est strictement décroissante sur $]-2, 2]$. Puis calculer $f(D)$.
3. Montrer que l'équation $f(x) = x$ admet une solution unique dans l'intervalle $]0, 1[$.