✍ إمتحان التحليل – دورة عادية – ✍

سنة أولى جذع مشترك | المدة :1 سا و 30 د | مقياس التحليل 1

التمرين الأول: (6 نقط)

لتكن A مجموعة معرفة كمايلي $A = \left\{5 - \frac{1}{2n-1} : n \in \mathbb{N}^*\right\}$.

1 بين أنه $\forall n \in \mathbb{N}^* : 4 \leq 5 - \frac{1}{2n-1} < 5$. ثم إستنتج محدودية A.

2 بين أن المتتالية $(u_n)_{n\geq 1}$ ذات الحد العام $u_n = 5 - \frac{1}{2n-1}$ متزايدة تماما وأحسب نهايتها.

3 حدد $\inf(A)$. هل تملك A أصغر عنصر $(\min(A))$؟

4 إستنتج $\sup(A)$. هل تملك A أكبر عنصر $(\max(A))$؟

5 بإستعمال الخاصية المميزة للحد الأعلى sup, برهن أن $\sup(A) = 5$.

التمرين الثاني: (7 نقط)

لتكن المتتالية (u_n) المعرفة بالعلاقة التراجعية $\begin{cases} u_0 = 9e \\ u_{n+1} = 3\sqrt{u_n}, \quad \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$, نضع لكل $n \in \mathbb{N}$,

$v_n = \ln\left(\frac{u_n}{9}\right)$.

1 برهن أن المتتالية (v_n) هي متتالية هندسية وأحسب أساسها q وحدها الأول v_0.

2 أكتب v_n و u_n بدلالة n.

3 أحسب النهايات $\lim\limits_{x\to+\infty} v_n$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} u_n$.

التمرين الثالث: (7نقط)

نعتبر الدالة f المعرفة على المجال $D =]-2;2[$ كمايلي : $f(x) = \sqrt{\frac{2-x}{2+x}}$

1 برهن أن الدالة f مستمرة على D. هل هي قابلة للإشتقاق ؟

2 برهن أن f متناقصة تماما على المجال $]-2,2[$. ثم أحسب $f(D)$.

3 برهن أن المعادلة $f(x) = x$ تقبل حلا وحيدا في المجال $]0,1[$.