SESSION NORMALE

ANALYSE-1 S1

Université de M'sila

Faculté des Mathématiques et de l'Informatique

1^{ier} Socle commun

1985

جامعة محمد بوضياف - المسيلة

Université Mohamed Boudiaf - M'sila

Module : Analyse-1

Correction d'examen (Session normale) : 24/02/ 2021

Durée de l'examen : 1 Heure et 30 Minutes

Ce sujet comporte 3 exercices :

- Exercice 1 : **Les ensembles bornées, sup, inf, max, min.** .... **6 points**
- Exercice 2 : **Les suites numériques** .... **7 points**
- Exercice 3 : **Les fonctions** .... **7 points**

Correction d'exercice 1 : (6 pts)

1 - Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a

0.5 pt $n \geq 1 \Leftrightarrow 2n-1 \geq 1 \Leftrightarrow 0 < \frac{1}{2n-1} \leq 1 \Leftrightarrow -1 \leq -\frac{1}{2n-1} < 0 \Leftrightarrow 4 \leq 5 - \frac{1}{2n-1} < 5.$

0.5 pt Alors, en on déduit que $A \subset [4, 5[$, c'est-à-dire A est bornée.

0.5 pt **2 - a)** On a : $\forall n \in \mathbb{N}^*$: $u_{n+1} - u_n = 5 - \frac{1}{2n+1} - (5 - \frac{1}{2n-1}) = \frac{2}{(2n+1)(2n-1)} > 0.$

0.5 pt Donc, $(u_n)_{n\geq 1}$ est strictement croissante sur $\mathbb{N}^*$.

0.5 pt **b)** $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} (5 - \overbrace{\frac{1}{2n-1}}^{\nearrow 0}) = 5.$

3 - Comme 4 et un minorant de A, car $\forall n \in \mathbb{N}^*$: $5 - \frac{1}{2n-1} \geq 4$ et $4 \in A$ (pour $n = 1$). Donc,

0.5 pt $\inf(A) = 4$.

0.5 pt Dans ce cas là, en on déduit que $\min(A) = 4$.

4 - D'après le théorème des suites monotones, on obtient $\sup(A) = \sup\{u_n : n \in \mathbb{N}^*\} =$

0.5 pt $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 5$.

0.5 pt Comme $5 \notin A$, alors, $\max(A)$ n'existe pas.

5 - Maintenant, on montre que $\sup(A) = 5$.

$$\sup(A) = 5 \Leftrightarrow \begin{cases} (i) \quad \forall u_n \in A & : u_n \leq 5 \\ (ii) \quad \forall \varepsilon > 0, \exists u_{n_0} \in A & : 5 - \varepsilon < u_{n_0}. \end{cases} \tag{1}$$

0.5 pt

0.5 pt D'après ce que précédent (i) est évident, car $A \subset [4, 5[$.

Montrons (ii). Soit $\varepsilon > 0$, alors, on a $u_n \in A \Rightarrow \exists n \in \mathbb{N}^*$: $u_n = 5 - \frac{1}{2n-1}$. Donc,

$5 - \varepsilon < u_{n_0} \Leftrightarrow 5 - \varepsilon < 5 - \frac{1}{2n_0 - 1} \Leftrightarrow \frac{1}{2n_0-1} < \varepsilon \Leftrightarrow 2n_0 - 1 > \frac{1}{\varepsilon} \Leftrightarrow n_0 > \frac{1+\varepsilon}{2\varepsilon}$, d'après le théorème d'Archimède un tel naturel n_0 existe tel que $n_0 > \frac{1+\varepsilon}{2\varepsilon}$, on choisit, habituellement

01 pt $n_0 = \left[\frac{1+\varepsilon}{2\varepsilon}\right] + 1$ pour garantir (1).

Correctio d'exercice 2 :(7 pts)

1 - On a pour tout $n \in \mathbb{N}$:

02 pt $v_{n+1} = \ln(\frac{u_{n+1}}{9}) = \ln(\frac{3\sqrt{u_n}}{9}) = \ln(\sqrt{\frac{u_n}{9}}) = \ln\left(\frac{u_n}{9}\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{u_n}{9}\right) = \frac{1}{2}v_v.$

01 pt Donc, (v_n) est une suite geométrique de raison $q = \frac{1}{2}$ et $v_0 = \ln(\frac{u_0}{9}) = \ln(e) = 1$.

2 - Les termes générales des (v_n) et (u_n).

01 pt **a)** On a pour tout $n \in \mathbb{N}$: $v_n = v_0 q^n$, c'est-à-dire, $v_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n$.

01 pt **b)** Comme, $v_n = \ln(\frac{u_n}{9}) \Leftrightarrow u_n = 9e^{v_n}$. Alors, par conséquent, on aura, $u_n = 9e^{(\frac{1}{2})^n}$.

3 - On a

01 pt $\lim\limits_{x\to+\infty} v_n = \lim\limits_{x\to+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 0,$ car $q \in]-1,1[$.

01 pt $\lim\limits_{x\to+\infty} u_n = \lim\limits_{x\to+\infty} 9e^{(\frac{1}{2})^n} = 9e^0 = 9.$

Correction d'exercice 3 :(7 pts)

1 - a) Comme les fonctions suivantes $x \mapsto 2-x$, $x \mapsto x+2$, sont continues sur D. Alors, la fonction $x \mapsto \dfrac{2-x}{x+2}$ est continue sur D. Par conséquent la fonction $x \mapsto \sqrt{\dfrac{2-x}{x+2}}$ aussi continue sur $D =]-2,2]$. Car, $\forall x \in]-2,2]$: $\dfrac{2-x}{x+2} \geq 0$ et la fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ est

1.5 pt continue sur $\mathbb{R}_+$.

b) On a la fonction $x \mapsto \dfrac{2-x}{x+2}$ est dérivable sur D. Donc la fonction $x \mapsto \sqrt{\dfrac{2-x}{x+2}}$ est dérivable sur $]-2,2[$. car $\forall x \in]-2,2[$: $\dfrac{2-x}{x+2} > 0$ et la fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ est dérivable où

01 pt $x > 0$.

2 - a) On a pour tout $x \in]-2,2[$:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{\left(\frac{(2-x)}{(x+2)}\right)'}{2\sqrt{\frac{2-x}{x+2}}} = \frac{\frac{-4}{(x+2)^2}}{2\sqrt{\frac{2-x}{x+2}}} \\ &= \frac{-2\sqrt{(x+2)}}{(x+2)^2\sqrt{2-x}} = \frac{-2}{(x+2)^{\frac{3}{2}}\sqrt{2-x}}. \end{aligned}$$

01 pt

Donc, $\forall x \in]-2,2[$: $f'(x) < 0$. Car $\forall x \in]-2,2[$: $(x+2)^{\frac{3}{2}}\sqrt{2-x} > 0$. Par conséquent f

0.5 pt est strictement décroissante sur D.

b) D'après qui ce précède f est continue et strictement décroissante. Donc, d'après un

0.5 pt théorme (image d'intervalle par une fonction continue).

0n a : $\forall x \in]-2,2]$: $-2 < x \leq 2 \Rightarrow f(2) \leq f(x) < \lim\limits_{\substack{x \to -2 \\ >}} f(x) \Rightarrow 0 \leq f(x) < +\infty$. D'où

0.5 pt $f(D) = [0,+\infty[$.

3 - Posons $g(x) = f(x) - x$ pour tout $x \in]0,1[$. Alors, on remarque que la fonction g est satisfaite

0.5 pt toutes les conditions de théorème des valeurs intermédiaires. En effet

0.25 pt **a)** g est continue sur $]0,1[$, car les fonctions f et $x \mapsto x$ sont continues sur $]0,1[\subset]-2,2]$.

0.25 pt **b)** $g(0) = 1 > 0$ et $g(1) = \dfrac{1}{\sqrt{3}} - 1 = \dfrac{1-\sqrt{3}}{\sqrt{3}} < 0$, c'est-à-dire $g(0) \times g(1) < 0$. Donc, d'après le théorème précédente, il existe $c \in]0,1[$ tel que $g(c) = 0$. Par conséquent $f(c) - c = 0$,

0.25 pt c'est-à-dire l'équation $f(x) = x$ admet au moins une solution dans $]0,1[$.

0.25 pt Comme la fonction f est strictement décroissante, alors la solution est unique.

FIN.