✍ Examen d'Analyse (Remplacement) ✍

1[er] Année Socle Commun Durée : 1 h et 30 min Module Analyse 1

Exercice 1: 6 points

Soit l'ensemble A définie par $A = \left\{4 - \dfrac{3}{2\sqrt{n}+1} \,:\, n \in \mathbb{N}\right\}$. Alors,

1. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N} : 1 \leq 4 - \dfrac{3}{2\sqrt{n}+1} < 4$. En on déduit la bornitude de A.
2. Montrer que la suite (u_n) de terme générale $u_n = 4 - \dfrac{3}{2\sqrt{n}+1}$ est strictement croissante et puis calculer sa limite.
3. Déduire $\sup(A)$. Est ce que A admet le grand élément (i.e.,$\max(A)$) ?
4. Déterminer $\inf(A)$. Est ce que A admet le petit élément (i.e.,$\min(A)$) ?
5. En utilisant le propriété caractéristique de borne supérieure, sup, montrer que $\sup(A) = 4$.

Exercice 2: 7 points

Soit la suite (u_n) définie par $u_0 = 2$ et pour tout $n \in \mathbb{N} : u_{n+1} = \dfrac{2u_n - 1}{u_n}$.

1. Montrer que la suite (u_n) est minorée par 1.
2. Montrer que la suite (u_n) est strictement décroissante sur $\mathbb{N}$.
3. Soient $a \in \mathbb{R}^*$ et la suite (v_n) telle que $\forall n \in \mathbb{N} : v_n = \dfrac{a}{u_n - 1}$.
   (a) Montrer que (v_n) est une suite arithmétique et puis écrire v_n en fonction de a et n.
   (b) Calculer la limite $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$.

Exercice 3: 7 points

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{2x}{|x|+1}$.

1. Démontrer que f est bornée sur $\mathbb{R}$.
   (Indication : On utilisant l'inégalité : $\forall x \in \mathbb{R} : -|x| \leq x \leq |x|$).
2. Monter que f est impaire.
3. Étudier la dérivabilité de f en 0. Puis déduire elle est dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer f'.
4. Démontrer que f définit une bijection de $\mathbb{R}$ sur l'intervalle $]-2, 2[$. Exprimer f^{-1} en fonction de x.