SESSION NORMALE

ANALYSE-1 S1

Université de M'sila

Faculté des Mathématiques et de l'Informatique

1^{ier} Socle commun

1985

جامعة محمد بوضياف - المسيلة

Université Mohamed Boudiaf - M'sila

Module : Analyse-1

Correction d'examen (Remplacement) : 07/03/ 2021

Durée de l'examen : 1 Heure et 30 Minutes

Ce sujet comporte 3 exercices :

- Exercice 1 : **Les ensembles bornées, sup, inf, max, min.** .... **6 points**
- Exercice 2 : **Les suites numériques** .... **7 points**
- Exercice 3 : **Les fonctions** .... **7 points**

Correction d'exercice 1 : (6 pts)

1 - Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$\sqrt{n} \geq 1 \Leftrightarrow 2\sqrt{n}+1 \geq 1 \Leftrightarrow 0 < \frac{1}{2\sqrt{n}+1} \leq 1 \Leftrightarrow -1 \leq -\frac{1}{2\sqrt{n}+1} < 0 \Leftrightarrow -3 \leq -\frac{3}{2\sqrt{n}+1} <$

0.5 pt $0 \Leftrightarrow 1 \leq 5 - \frac{1}{2n-1} < 4$.

0.5 pt Alors, en on déduit que $A \subset [1, 4[$, c'est-à-dire A est bornée.

2 - a) On a : $\forall n \in \mathbb{N}:\ u_{n+1} - u_n = 4 - \frac{3}{2\sqrt{n+1}+1} - (4 - \frac{1}{2\sqrt{n}+1}) = \frac{6(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})}{(2\sqrt{n+1}+1)(2\sqrt{n}+1)} >$

0.5 pt 0.

0.5 pt Donc, $(u_n)_{n\geq 1}$ est strictement croissante sur $\mathbb{N}$.

0.5 pt **b)** $\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} (4 - \overbrace{\frac{3}{2\sqrt{n}+1}}^{\nearrow 0}) = 4.$

3 - D'après le théorème des suites monotones, on obtient $\sup(A) = \sup\{u_n : n \in \mathbb{N}\} =$

0.5 pt $\lim_{n\to+\infty} u_n = 4$.

0.5 pt Comme $4 \notin A$, alors, $\max(A)$ n'existe pas.

4 - Comme 1 et un minorant de A, car $\forall n \in \mathbb{N} : 4 - \frac{3}{2\sqrt{n}+1} \geq 1$ et $1 \in A$ (pour $n = 0$). Donc,

0.5 pt $\inf(A) = 1$.

0.5 pt Dans ce cas là, en on déduit que $\min(A) = 1$.

5 - Maintenant, on montre que $\sup(A) = 4$.

$$\sup(A) = 4 \Leftrightarrow \begin{cases} (i) \quad \forall u_n \in A & : u_n \leq 4 \\ (ii) \quad \forall \varepsilon > 0, \exists u_{n_0} \in A & : 4 - \varepsilon < u_{n_0}. \end{cases} \tag{1}$$

0.5 pt

0.5 pt D'après ce que précédent (i) est évident, car $A \subset [1, 4[$.

Montrons (ii). Soit $\varepsilon > 0$, alors, on a $u_n \in A \Rightarrow \exists n \in \mathbb{N} : u_n = 4 - \frac{3}{2\sqrt{n}+1}$. Donc,

$4 - \varepsilon < u_{n_0} \Leftrightarrow 4 - \varepsilon < 4 - \frac{3}{2\sqrt{n_0}+1} \Leftrightarrow \frac{3}{2\sqrt{n_0}+1} < \varepsilon \Leftrightarrow 2\sqrt{n_0}+1 > \frac{3}{\varepsilon} \Leftrightarrow n_0 >$ $\left(\frac{3-\varepsilon}{2\varepsilon}\right)^2$, $(\varepsilon < 3)$ d'après le théorème d'Archimède un tel naturel n_0 existe tel que $n_0 >$

0.5 pt $\left(\frac{3-\varepsilon}{2\varepsilon}\right)^2$, on choisit, habituellement $n_0 = \left[\left(\frac{3-\varepsilon}{2\varepsilon}\right)^2\right] + 1$ pour garantir (1).

Correctio d'exercice 2 :(7 pts)

1 - Posons $P(n)$: $\forall n \in \mathbb{N} : u_n > 1$.

0.5 pt **a)** Pour $n = 0$ on a $u_0 = 2 > 1$. Donc $P(0)$ est vraie.

b) Posons $P(n)$ est vraie et montrons que $P(n+1)$ est vraie. Alors, on a

01 pt $u_{n+1} - 1 = \frac{2u_n - 1}{u_n} - 1 = \frac{u_n - 1}{u_n} > 0$. D'où $u_{n+1} > 1$, c'est-à-dire $P(n+1)$ est vraie.

0.5 pt Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N} : u_n > 1$.

i. On a pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_{n+1} - u_n = \dfrac{-(u_n-1)^2}{u_n} < 0$. Donc u_n est strictement

01 pt décroissante sur $\mathbb{N}$.

A. On a pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} V_{n+1} &= \frac{a}{u_{n+1}-1} = a\frac{u_n}{u_n-1} \\ &= a\frac{u_n-1+1}{u_n-1} = a\Big(1+\frac{1}{u_{n+1}-1}\Big) \\ &= a+\frac{a}{u_{n+1}-1} = a+V_n. \end{aligned}$$

01 pt

Donc, (v_n) est une suite arithmétique de raison $r = a$ et de premier terme

01 pt $v_0 = \dfrac{a}{u_0-1} = a$.

01 pt Par conséquent, on a $v_n = v_0 + nr = a(1+n)$.

B. On a

01 pt $$\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty}\Big(\frac{1}{v_n}+1\Big) = \lim_{n\to+\infty}\Big(\overbrace{\frac{1}{a(1+n)}}^{\nearrow 0}+1\Big) = 1.$$

Correction d'exercice 3 :(7 pts)

c) On montre que f est bornée sur $\mathbb{R}$. On utilise l'indication précédent, on trouve

$$\forall x \in \mathbb{R}:\ -|x| \le x \le |x| \Rightarrow \forall x \in \mathbb{R}:\ -|x|-1 \le -|x| \le x \le |x| \le |x|+1$$

$$\Rightarrow \forall x \in \mathbb{R}:\ 2(-|x|-1) \le -2|x| \le 2x \le |x| \le 2(|x|+1).$$

Puis, on dévise par $|x|+1$, on obtient

$$\forall x \in \mathbb{R}:\ -2 = \frac{2(-|x|-1)}{|x|+1} \le \frac{-2|x|}{|x|+1} \le \frac{2x}{|x|+1} \le \frac{2|x|}{|x|+1} \le \frac{2(|x|+1)}{|x|+1} = 2.$$

01 pt Donc, $\forall x \in \mathbb{R}:\ -2 \le f(x) \le 2$. D'où la bornitude de f.

d)

$$f \text{ est impaire} \Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R} : -x \in \mathbb{R} \text{ et } f(-x) = -f(x).$$

Alors, pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a $-x \in \mathbb{R}$, car $\mathbb{R}$ est un corps commutatif, et on a

01 pt $f(-x) = \dfrac{-x}{|-x|+1} = -\dfrac{2x}{|x|+1} = -f(x)$. Donc, f est impaire.

e) On a

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{2x}{x+1} & : x \ge 0 \\ \dfrac{2x}{-x+1} & : x \le 0. \end{cases}$$

Montrons que f est dérivable en 0.

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ <}} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{\substack{x\to 0\\ <}} \frac{\frac{2x}{1-x}}{x} = \lim_{\substack{x\to 0\\ <}} \frac{2}{1-x} = 2 = f'_g(0).$$

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ >}} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{\substack{x\to 0\\ >}} \frac{\frac{2x}{1+x}}{x} = \lim_{\substack{x\to 0\\ >}} \frac{2}{1+x} = 2 = f'_d(0).$$

01 pt Donc, f est dérivable en point 0, car $f'_d(0) = 2 = f'_g(0)$, et on a $f'(0) = 1$.

On sait que les fonctions rationnelles $x \mapsto \dfrac{x}{x+1}$ et $x \mapsto \dfrac{x}{-x+1}$ sont dérivables sur leurs

01 pt intervalles des définitions $]0, +\infty[$ ($]-\infty, 0[$ resp). D'où la dérivabilité de f sur $\mathbb{R}$.

Par calcule simple sur les dérivées des fonctions usuelles, on trouve

$$f'(x) = \begin{cases} \dfrac{2}{(1+x)^2} & : x \geq 0 \\ \dfrac{2}{(1-x)^2} & : x \leq 0. \end{cases}$$

01 pt

f) i. Comme f est continue sur $\mathbb{R}$, (car elle est dérivable sur $\mathbb{R}$). Strictement croissante sur $\mathbb{R}$, puisque $\forall x \in \mathbb{R} : \ f'(x) > 0$. On a aussi

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} \frac{2x}{1-x} = -2, \ \lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{2x}{1+x} = 2.$$

01 pt Donc, d'après théorème de bijection, f est une bijective de $\mathbb{R}$ dans $f(\mathbb{R}) =]-2, 2[$.

ii. On a $\forall x \in \mathbb{R}, \forall x \in]-2, 2[: \ y = f(x) \Leftrightarrow x = f^{-1}(y)$. Alors, on aura

Si $x \geq 0$ on a $y = f(x) \Leftrightarrow y = \dfrac{2x}{x+1} \Leftrightarrow x(2-y) = y \Leftrightarrow x = \dfrac{y}{2-y} = f^{-1}(y)$.

Si $x \leq 0$ on a $y = f(x) \Leftrightarrow y = \dfrac{2x}{-x+1} \Leftrightarrow x(y+2) = y \Leftrightarrow x = \dfrac{y}{2+y} = f^{-1}(y)$. Donc, on trouve $f^{-1} :]-1, 1[\to \mathbb{R}$ telle que

$$f^{-1}(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{2-x} & : x \geq 0 \\ \dfrac{x}{2+x} & : x \leq 0. \end{cases}$$

01 pt

FIN.