Examen de Rattrapage

1$^{\text{er}}$ Année Socle Commun — Année Universitaire :2020/2021 — Module Analyse 1

Exercice 1: 7 points

Soit l'ensemble A définie par $A = \left\{ \dfrac{6n+3}{3n+1} : n \in \mathbb{N} \right\}$. Alors,

1. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N} : \dfrac{6n+3}{3n+1} = 2 + \dfrac{1}{3n+1}$. En on déduit que A est bornée.
2. Montrer que la suite (u_n) de terme générale $u_n = \dfrac{6n+3}{3n+1}$ est strictement décroissante et puis calculer sa limite.
3. Déduire $\inf(A)$. Est ce que A admet le petit élément (i.e.,$\min(A)$) ?
4. Déterminer $\sup(A)$, et $\max(A)$ s'il existe.
5. En utilisant le propriété caractéristique de inf, montrer que $\inf(A) = 2$.

Exercice 2: 6 points

Soit la suite (u_n) définie par la relation de récurrence

$$\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = \sqrt{2u_n - 1} \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

1. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N} : u_n \geq 1$.
2. Étudier la monotonie de la suite (u_n).
3. En déduire que la suite (u_n) est convergente. Déterminer sa limite.

Exercice 3: 7 points

Soient a un réel et f une fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \begin{cases} \dfrac{3-x^2}{2} & : x \leq 1 \\ \dfrac{a}{x} & : x > 1 \end{cases}$

1. Déterminer a pour que f soit continue en point 1.
2. Posons $a = 1$. Alors,
   (a) Déduire la continuité de f sur $\mathbb{R}$.
   (b) Étudier la dérivabilité de f sur $\mathbb{R}$.
   (c) Montrer qu'il existe $c \in]0,2[$ tel que : $f(2) - f(0) = 2f'(c)$. Trouver les valeurs de c possibles.