SESSION DE RATTRAPAGE

ANALYSE-1 S1

Université de M'sila

Faculté des Mathématiques et de l'Informatique

1^{ier} Socle Commun

جامعة محمد بوضياف - المسيلة

Université Mohamed Boudiaf - M'sila

Module : Analyse-1

Examen (Session de Rattrapage) : 28/06/ 2020-2021

Durée de l'Examen : 1 Heure et 30 Minutes

Ce sujet comporte 3 exercices :

— Exercice 1 : **Les ensembles bornées, sup, inf, max, min.** .... **7 points**
— Exercice 2 : **Les suites numériques**... **6 points**
— Exercice 3 : **Les fonctions** .... **7 points**

Correction d'Exercice 1 : (7 pts)

1 - On a pour tout $n \in \mathbb{N}$:

0.5 pt $2 + \frac{1}{3n+1} = \frac{2(3n+1)+1}{3n+1} = \frac{6n+3}{3n+1}$.

$3n+1 \geq 1 \Leftrightarrow 0 < \frac{1}{3n+1} \leq 1 \Leftrightarrow 2 < 2 + \frac{1}{3n+1} \leq 3$. Donc, $A \subset \left]2, 3\right]$, c'est-à-dire A est

01 pt bornée.

2 - a) On a : $\forall n \in \mathbb{N}$: $u_{n+1} - u_n = 2 + \frac{1}{3n+4} - (2 + \frac{1}{3n+1}) = \frac{-3}{(3n+4)(3n+1)} < 0$. Donc,

01 pt (u_n) est strictemenet décroissante sur $\mathbb{N}$.

0.5 pt **b)** $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \lim\limits_{n \to +\infty} (2 + \overbrace{\frac{1}{3n+1}}^{\nearrow 0}) = 2$.

0.5 pt **3 -** D'après le théorème des suites monotones, on a $\inf(A) = \inf\{u_n : n \in \mathbb{N}\} = \lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 2$.

0.5 pt Comme $2 \notin A$, alors, $\min(A)$ n'existe pas.

4 - On remarque que 3 et un majorant de A, car $\forall n \in \mathbb{N} : 2 + \frac{1}{3n+1} \leq 3$ et $3 \in A$ pour $n = 0$.

0.5 pt Donc, $\sup(A) = 3$.

0.5 pt En on déduit que $\max(A) = 3$.

5 - On montre que $\inf(A) = 2$.

$$\inf(A) = 2 \Leftrightarrow \begin{cases} (i) & \forall u_n \in A \quad : u_n \geq 2 \\ (ii) & \forall \varepsilon > 0, \exists u_{n_0} \in A \quad : u_{n_0} < 2 + \varepsilon. \end{cases}$$

0.5 pt D'après ce que précédent (i) est évident, car $A \subset \left]2, 3\right]$

Montrons (ii). Soit $\varepsilon > 0$, alors, on a

$u_n \in A \Rightarrow \exists n \in \mathbb{N} : u_n = 2 + \frac{1}{3n+1}$. Donc,

$2 + \varepsilon > u_{n_0} \Leftrightarrow 2 + \varepsilon > 2 + \frac{1}{3n_0+1} \Leftrightarrow \frac{1}{3n_0+1} < \varepsilon \Leftrightarrow 3n_0 + 1 > \frac{1}{\varepsilon} \Leftrightarrow n_0 > \frac{1-\varepsilon}{3\varepsilon}$, $(\varepsilon < 1)$

01 pt d'après le théorème d'Archimède un tel naturel n_0 existe tel que $n_0 > \frac{1-\varepsilon}{3\varepsilon}$.

0.5 pt On choisit, habituellement $n_0 = \left[\frac{1-\varepsilon}{3\varepsilon}\right] + 1$ pour garantir (ii).

Correction d'Exercice 2 : (6 pts)

1 - Posons, $P(n)$: $u_n \geq 1$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

0.5 pt **a) Initialisation** : On a : $u_0 = 2 \geq 1$, donc, $P(0)$ est vraie.

b) Hérédité : Supposons que $P(n)$ est vraie, c'est-à-dire $\forall n \in \mathbb{N}$: $u_n \geq 1$, et on monter que $P(n+1)$ est vraie, c'est-à-dire $\forall n \in \mathbb{N}$: $u_{n+1} \geq 1$. Donc, on a :

$$u_n \geq 1 \Leftrightarrow 2u_n \geq 2 \Leftrightarrow 2u_n - 1 \geq 1 \Leftrightarrow \sqrt{2u_n - 1} \geq 1.$$

Par conséquent, $\forall n \in \mathbb{N}$: $u_{n+1} \geq 1$. D'où $P(n+1)$ est vraie.

01 pt Alors, $u_n \geq 1$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

2 - Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

1.5 pt $$u_{n+1} - u_n = \sqrt{2u_n - 1} - u_n = \frac{-u_n^2 + 2u_n - 1}{\sqrt{2u_n - 1} + u_n} = \frac{-(u_n - 1)^2}{\sqrt{2u_n - 1} + u_n} < 0.$$

0.5 pt Donc, la suite (u_n) est strictement décroissante sur $\mathbb{N}$.

01 pt **3 -** La suite (u_n) est minorée par 1 et strictement décroissante.

0.5 pt Donc, d'après le théorème des suites monotones, elle converge vers une limite $l \geq 1$.

0.5 pt Posons $\lim\limits_{n\to+\infty} u_{n+1} = \lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 1$.

0.5 pt Ce qui entraine que $l = \sqrt{2l - 1} \Leftrightarrow l^2 - 2l + 1 = 0 \Leftrightarrow (l-1)^2 = 0 \Leftrightarrow l = 1$.

Correction d'Exercice 3 : (7 pts)

1 - On a $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ >}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x\to 1\\ >}} \frac{a}{x} = a$, et $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ <}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x\to 1\\ <}} \frac{3-x^2}{2} = 1$. Donc, on aura

01 pt f est continue en $1 \Leftrightarrow a = 1$.

2 - Posons $a = 1$. Alors, on a $f(x) = \begin{cases} \dfrac{3-x^2}{2} & : x \leq 1 \\ \dfrac{1}{x} & : x > 1 \end{cases}$

a) D'après ce qui précède, et comme les fonctions $x \mapsto \frac{3-x^2}{2}$ et $x \mapsto \frac{1}{x}$ (respectivement) sont continues sur les intervalles $]-\infty, 1[$ et $]1, +\infty[$ (resp). D'où le résultat, f est conti-

01 pt nue sur $\mathbb{R}$.

b) La fonction $x \mapsto \frac{3-x^2}{2}$ est dérivable sur $]-\infty, 1[$, car elle est polynôme, et la fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ aussi dérivable sur $]1, +\infty[$, car elle est rationnelle. Donc, il est rester de démon-

0.5 pt trer la dérivabilité en point 1.

0.5 pt $$\lim_{\substack{x\to 1\\ <}} \frac{f(x) - f(1)}{x-1} = \lim_{\substack{x\to 1\\ <}} \frac{\frac{3-x^2}{2} - 1}{x-1} = \lim_{\substack{x\to 1\\ <}} \frac{1-x^2}{2(x-1)} = \lim_{\substack{x\to 1\\ <}} \frac{-(x+1)}{2} = -1 = f'_g(1).$$

0.5 pt $$\lim_{\substack{x\to 1\\ >}} \frac{f(x) - f(1)}{x-1} = \lim_{\substack{x\to 1\\ >}} \frac{\frac{1}{x} - 1}{x-1} = \lim_{\substack{x\to 1\\ >}} \frac{-1}{x} = -1 = f'_d(1).$$

0.5 pt $f'_d(1) = f'_g(1)$, c'est-à-dire, f est dérivable en point 1. Donc, f est dérivable sur $\mathbb{R}$.

c) D'après ce qui précède f continue sur $[0, 2] \subset \mathbb{R}$ et dérivable sur $]0, 2[\subset \mathbb{R}$. Donc, de le théorème des accroissements finis (Lagrange), il existe $c \in]0, 2[$ tel que

01 pt $f(2) - f(0) = (2-0)f'(c)$. D'où $f'(c) = -\frac{1}{2}$.

Trouvons les valeurs de c. On distincts deux cas.

0.5 pt Si $0 < c \leq 1$, alors on a : $f'(c) = -c$. Donc, on trouve, $-c = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow c = \frac{1}{2} \in]0, 1[$.

Si $1 \leq c < 2$, alors on a : $f'(c) = -\frac{1}{c^2}$. Par conséquent,

0.5 pt $f'(c) = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow c^2 = 2 \Leftrightarrow (c = -\sqrt{2} \vee c = \sqrt{2}) \Rightarrow c = \sqrt{2} \in]1, 2[$.

FIN.