Université de Msila		Faculté des Mathématiques et d'Informatique
Socle commun : 2021/2022	**Correction d'exercices du Série N : 01 (Les nombres reéls)**	Module : Analyse 1

CORRECTION D'EXERCICE 1

1.
   a. Si $x \geqslant 0$, on a par définition $|x| = x$, et comme $-x \leqslant x$, donc $\max\{-x, x\} = x$. Alors $|x| = \max\{-x, x\}$.
   b. Si $x \leqslant 0$, on a $|x| = -x$, et $-x \geqslant x$, donc $\max\{-x, x\} = -x$. Alors $|x| = \max\{-x, x\}$. Puis
$$|x| = \max\{-x, x\}$$

2. On a $\begin{cases} -|x| \leqslant x \leqslant |x| \\ -|y| \leqslant y \leqslant |y| \end{cases} \Rightarrow -(|x|+|y|) \leqslant x+y \leqslant |x|+|y|.$
Donc, $|x+y| \leqslant \Big||x|+|y|\Big| = |x|+|y|$, c'est-à-dire l'inéqualité triangulaire est satisfaite.

3. Montrons que $\forall x, y \in \mathbb{R} : \Big||x|-|y|\Big| \leqslant |x-y|$. Alors, on a $\begin{cases} x = x-y+y \\ y = y-x+x \leqslant |y| \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} |x|-|y| \leqslant |x-y| \\ |y|-|x| \leqslant |x-y| \end{cases}$
car $|-y| = |y|$ et $|y-x| = |x-y|$. Donc, nous concluons que $\forall x, y \in \mathbb{R} : \Big||x|-|y|\Big| \leqslant |x-y|$.

4. La démonstration est similaire, c'est à dire, on a pour tout $x, y \in \mathbb{R}$:
$\begin{cases} x = x+y-y \\ y = y+x-x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} |x|-|y| \leqslant |x+y| \\ |y|-|x| \leqslant |x+y| \end{cases}$
D'où le résultat $\forall x, y \in \mathbb{R} : \Big||x|-|y|\Big| \leqslant |x+y|$.

5. Pour tout $x, y \in \mathbb{R}$, et comme $|x-y| = |y-x|$, alors, on a :
$\begin{cases} 2x = x+y+x-y \\ 2y = x+y+y-x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2|x| \leqslant |x+y|+|x-y| \\ 2|y| \leqslant |x+y|+|y-x| \end{cases} \Rightarrow 2(|x|+|y|) \leqslant 2(|x+y|+|x-y|).$
D'où le résultat $|x|+|y| \leqslant (|x+y|+|x-y|)$.

6. Par récurrence. Alors, on note
$$P(n): \quad \forall x_1, x_2, \ldots x_n \in \mathbb{R} : \left|\sum_{k=1}^{n} x_k\right| \leqslant \sum_{k=1}^{n} |x_k|.$$
   a. **Initiation** : Pour $n = 2$, on a : $\left|\sum_{k=1}^{2} x_k\right| = |x_1 + x_2| \leqslant \sum_{k=1}^{2} |x_k| = |x_1| + |x_2|$,(l'inégalité triangulaire). Donc, $P(2)$ est vraie.
   b. **Hérédité** : On suppose que $P(n)$ est vraie, c'est-à-dire
$$\left|\sum_{k=1}^{n} x_k\right| \leqslant \sum_{k=1}^{n} |x_k|,$$

et on montre que $P(n+1)$ vraie , c'est-à-dire

$$\left|\sum_{k=1}^{n+1} x_k\right| \leqslant \sum_{k=1}^{n+1} |x_k|.$$

On a d'après l'hypothèse, pour tous $x_1, x_2, ... x_n, x_{n+1} \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} \left|\sum_{k=1}^{n+1} x_k\right| &\leqslant \left|\sum_{k=1}^{n} x_k\right| + |x_{n+1}|, \text{(l'inégalité triangulaire)} \\ &\leqslant \sum_{k=1}^{n} |x_k| + |x_{n+1}| \leqslant \sum_{k=1}^{n+1} |x_k|. \end{aligned}$$

Alors, $P(n+1)$ est vraie. Par concéquant

$$\forall x_1, x_2, ... x_n \in \mathbb{R} : \left|\sum_{k=1}^{n} x_k\right| \leqslant \sum_{k=1}^{n} |x_k|.$$

Remarque 1

On peut corriger la question 5 dans l'exercice précédent, comme suit :

Montrons que $\forall x, y \in \mathbb{R} : |x| + |y| \leqslant |x+y| + |x-y|$. Alors, on distinguer 4 cas.

1. Si $x \geqslant 0$ et $y \geqslant 0$, on a $|x| + |y| = x + y \leqslant x + y + \underbrace{|x-y|}_{\geqslant 0} = |x| + |y| + |x-y|$.
2. Si $x \geqslant 0$ et $y \leqslant 0$, on a $|x| + |y| = x - y$, comme $|x-y| = x - y$ car $x - y \geqslant 0$. Donc, $|x| + |y| = x - y \leqslant x - y + \underbrace{|x+y|}_{\geqslant 0} = |x-y| + |x+y|$.
3. Si $x \leqslant 0$ et $y \geqslant 0$, on a $|x| + |y| = \underbrace{-x+y}_{\geqslant 0} = |x-y| \leqslant |x| + |y| + |x-y|$.
4. Si $x \leqslant 0$ et $y \leqslant 0$, on a $|x| + |y| = -x - y$, comme $|x+y| = -x - y$ car $x + y \leqslant 0$. Donc, $|x| + |y| = -x - y \leqslant -x - y + \underbrace{|x-y|}_{\geqslant 0} = |x+y| + |x-y|$.

   En fin, on a $\forall x, y \in \mathbb{R} : |x| + |y| \leqslant |x+y| + |x-y|$.

★★☆☆

Correction d'exercice 2

Soit $A \subseteq \mathbb{R}$, $(A \neq \phi)$. On définit l'ensemle $-A = \{-x : x \in A\}$. L'ensemle $-A$ est boronée aussi, car

$$A \text{ (bornée)} \Leftrightarrow \exists M \in \mathbb{R}_+ : -M \leqslant x \leqslant M \Leftrightarrow -M \leqslant -x \leqslant M \Leftrightarrow (-A) \text{ (bornée)}.$$

1. Montrons que $\inf(-A) = -\sup(A)$.
   On a $\forall x \in A : x \leqslant \sup(A) \Leftrightarrow \forall x \in A : -x \geqslant -\sup(A) \Leftrightarrow \forall y \in -A,\ (y = -x) : y \geqslant -\sup(A)$. Donc $-\sup(A)$ est un minorant de $-A$, et comme $\inf(-A)$ est le plus grand des minorants, alors on obtient,

$$\inf(-A) \geqslant -\sup(A). \tag{1}$$

★★☆☆

D'autre part, on a $\forall y \in (-A) : y \geqslant \inf(-A) \Leftrightarrow \forall y \in (-A) : -y \leqslant -\inf(-A) \Leftrightarrow \forall x \in A, (x = -y) : x \leqslant -\inf(-A)$. Donc $-\inf(-A)$ est un majorant de A, et comme $\sup(A)$ est le plus petit des majorants de A, alors on obtient,

$$\sup(A) \leqslant -\inf(-A) \Leftrightarrow \inf(-A) \leqslant -\sup(A). \tag{2}$$

D'après (1) et (2), on a le résultat.

2. Pour, $\sup(-A) = -\inf(A)$, la démonstration et similaire.

Correction d'exercice 3

Soient A et B deux parties non vides et bornées de $\mathbb{R}$. Alors,

1. Montrons que si $A \subset B$, on a $\inf(B) \leqslant \inf(A) \leqslant \sup(A) \leqslant \sup(B)$.

$$\inf A \leqslant \sup(A) \text{ (clair)}. \tag{3}$$

On a $A \subset B \Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R} : x \in A \Rightarrow x \in B \Rightarrow x \geqslant \inf(B)$. donc $\inf(B)$ est un minorant de A, et comme $\inf(A)$ est le plus garnd des minorants de A, on obtient

$$\inf B \leqslant \inf(A). \tag{4}$$

D'autre par, on a aussi $A \subset B \Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R} : x \in A \Rightarrow x \in B \Rightarrow x \leqslant \sup(B) \Rightarrow \sup(A) \leqslant \sup(B)$, car, $\sup(B)$ est majorant de A.

2. a. On remarque que $A \cap B \subseteq A$ (bornée), donc, $A \cap B$ est bornée.

   b. $\begin{cases} A \cap B \subseteq A \\ A \cap B \subseteq B \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \inf(A) \leqslant \inf(A \cap B) \\ \inf(B) \leqslant \inf(A \cap B) \end{cases} \Rightarrow \max\{\inf(A), \inf(B)\} \leqslant \inf(A \cap B)$.

   c. $\inf(A \cap B) \leqslant \sup(A \cap B)$ (évident).

   d. $\begin{cases} A \cap B \subseteq A \\ A \cap B \subseteq B \end{cases}$
   $\Rightarrow \begin{cases} \sup(A \cap B) \leqslant \sup(A) \\ \sup(A \cap B) \leqslant \sup(B) \end{cases} \Rightarrow \sup(A \cap B) \leqslant \min\{\sup(A), \sup(B)\}$.
   Donc, le résultat est immédiate.

3. Montrons que $\sup(A \cup B) = \max\{\sup(A), \sup(B)\}$.

   a. Montrons que $\sup(A \cup B) = \max\{\sup A, \sup(B)\}$. comme $\mathbb{R}$ est totalement ordonné, alors, on a $\sup(A) \leqslant \sup(B)$ ou $\sup(B) \leqslant \sup(A)$.
   Supposons que $\sup(A) \leqslant \sup(B)$, donc $\max\{\sup A, \sup B\} = \sup(B)$, alors, il suffit démontrer $\sup(A \cup B) = \sup(B)$. On a $B \subset (A \cup B) \Rightarrow \sup(B) \leqslant \sup(A \cup B)....(*)$
   Comme $\sup(B)$ est un majorant de B et de A, car $\sup(A) \leqslant \sup(B)$
   Soit $x \in (A \cup B)$, alors $x \in A$ ou $x \in B$ ce implique que $x \leqslant \sup B$, $\forall x \in (A \cup B)$ c'est-à-dire $\sup(B)$ est un majorant de $(A \cup B)$, comme $\sup(A \cup B)$ est le plus petit des majorant de $(A \cup B)$. Donc $\sup(A \cup B) \leqslant \sup(B)...(**)$.
   de $(*)$ et $(**)$, on en déduit que

$$\sup(A \cup B) = \max\{\sup A, \sup(B)\}.$$

   b. Pour $\inf(A \cup B) = \min\{\inf A, \inf B\}$, la démonstration est analogue.

★★☆☆

Correction d'exercice 4

1. Pour $A_1 =]1,5]$, on a $\max(A_1) = 5 = \sup(A_1)$, $(5 \in A_1)$, $\inf(A_1) = 1$, $\min(A_1)$ n'existe pas.
Montrons que $\inf(A_1) = 1$.

$$\inf(A_1) \Leftrightarrow \begin{cases} (i)\ \forall x \in A_1 : \ 1 \leqslant x, (vraie) \\ (ii)\ \forall \varepsilon > 0,\ \exists a \in A_1 : \qquad 1 \leqslant a < 1+\varepsilon. \end{cases}$$

Montrons (ii).
Soit $\varepsilon > 0$ (assez petit). On cherchant $a_0 \in A_1$ tel que $1 \leqslant a_0 < 1+\varepsilon$.
On choisit $a_0 = 1 + \dfrac{\varepsilon}{2}$, alors, a_0 est satisfait le relation (ii), (on peut utiliser la dansité de $\mathbb{R}$).
D'où le résultat.

2. Pour $A_2 =]-2,5] \cup \{8\}$, on a $\max(A_2) = 8 = \sup(A_2)$, $(8 \in A_2)$, $\inf(A_2) = -2$ (la démonstration est similaire), $\min(A_2)$ n'existe pas.

3. On a $x \in A_3 \Leftrightarrow -4 \leqslant x \leqslant -1 \Leftrightarrow -1 \leqslant \dfrac{1}{x} \leqslant \dfrac{-1}{4} \Leftrightarrow$. Donc, $A_3 = [-1, \dfrac{-1}{4}]$, par concéquant $\max(A_3) = \dfrac{-1}{4} = \sup(A_3)$, $(\dfrac{-1}{4} \in A_2)$, $\inf(A_3) = -1 = \min(A_3)$, car $\dfrac{-1}{4} \in A_3$.

4. Soit l'ensemble $A_4 = \{3 + \frac{2}{n} : n \in \mathbb{N}^*\}$. Alors on a
$\forall n \in \mathbb{N}^* : n \geqslant 1 \Leftrightarrow 0 < \dfrac{1}{n} \leqslant 1 \Leftrightarrow 0 < \dfrac{2}{n} \leqslant 2 \Leftrightarrow 3 < 3 + \dfrac{2}{n} \leqslant 5$. Donc, $A_4 \subseteq]3,5]$, et on aussi pour $n = 1$, $3 + \dfrac{2}{n} = 5 \in A_4$, c'est-à-dire $\max(A_4) = 5 = \sup(A_4)$, on montre que $\inf(A_4) = 3$.
En effet

$$3 = \inf(A_4) \Leftrightarrow \begin{cases} (i)\ \forall x \in A_4 : \ 3 \leqslant x, (vraie) \\ (ii)\ \forall \varepsilon > 0,\ \exists a \in A_4 : \qquad 3 \leqslant a < 3+\varepsilon. \end{cases}$$

Le relation (i) évident, alors, on montre (ii).
Soit $\varepsilon > 0$, (assez petit). On a : $a < 3 + \varepsilon \Leftrightarrow 3 + \dfrac{2}{n} < 3 + \varepsilon \Leftrightarrow n > \dfrac{2}{\varepsilon}$. Donc, il suffit de choisir $n_0 = \left[\dfrac{2}{\varepsilon}\right] + 1$, par concéquant l'élément $a_0 = 3 + \dfrac{2}{n_0} \in A_4$ et vérifié (ii). $\min(A_4)$ n'existe pas, car $3 \notin A_4$.

5. a. On pose $A = A_{2n} \cup A_{2n+1}$, où

$$A_{2n} = \{1 + \frac{1}{2n} : \quad n \in \mathbb{N}^*\} \text{ et } A_{2n+1} = \{-1 + \frac{1}{2n+1} : \quad n \in \mathbb{N}\}.$$

Alors, on a

$$n \geqslant 1 \Rightarrow 0 < \frac{1}{2n} \leqslant \frac{1}{2} \Rightarrow 1 < 1 + \frac{1}{2n} \leqslant \frac{3}{2}.$$

Donc, $A_{2n} \subset]1, \dfrac{3}{2}]$, comme $\dfrac{3}{2}$ est un majorant de A_{2n} et $\dfrac{3}{2} \in A_{2n}$, alors, $\sup(A_{2n}) = \dfrac{3}{2} = \max(A_{2n})$.
On a 1 est un minorant de A_{2n} et $1 \notin A_{2n}$, alors, d'après une propriété (remarque, voir cours analyse 1), on a

$$\inf(A_{2n}) = 1 \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0,\ \exists x_0 \in A_{2n} : 1 \leqslant x_0 < 1 + \varepsilon. \tag{5}$$

$x_0 = 1 + \dfrac{1}{2n} < 1 + \varepsilon \Rightarrow n > \dfrac{1}{2\varepsilon}$, donc, il suffit de prendre $n_\varepsilon = \left[\dfrac{1}{2\varepsilon}\right] + 1$ pour garantir la condition (5). Comme $1 \notin (A_{2n})$ donc, $\min(A_{2n})$ n'existe pas.

b) Pour A_{2n+1}, on a $A_{2n+1} \subseteq]-1,0]$, et par, une démonstration similaire, on aura $\inf(A_{2n+1}) = -1$ et comme $-1 \notin (A_{2n+1})$ donc, $\min(A_{2n+1})$ n'existe pas.
On a aussi, $0 \in (A_{2n+1})$ et majorée A_{2n+1}, donc $\sup(A_{2n+1}) = 0 = \max(A_{2n+1})$.
De une propriété, on en déduit que

$$\inf(A_n) = \inf(A_{2n} \cup A_{2n+1}) = \min\{\inf(A_{2n}), \inf(A_{2n+1})\} = \min\Big\{-1, 1\Big\} = -1$$

$$\sup(A_n) = \sup(A_{2n} \cup A_{2n+1}) = \max\{\sup(A_{2n}), \sup(A_{2n+1})\} = \max\left\{0, \frac{3}{2}\right\} = \frac{3}{2}.$$

Il est claire que $\max(A_n) = \frac{3}{2}$ et $\min(A_n)$ n'existe pas, car $\sup(A_n) \in A_n$ et $\inf(A_n) \notin A_n$, $(A_n \subset]-1,0] \cup]1, \frac{3}{2}])$.

6. Soit l'ensemble $A_6 = \{\sin(\frac{n\pi}{2}) : n \in \mathbb{N}^*\}$. On remarque la fonction f définie par $f(x) = \sin(\frac{n\pi}{2})$ est périodique. Donc, pour $n = 2k$ ou $n = 2k+1$, $(k \in \mathbb{N}^*)$. Alors on obtient :
$A_6 = \{\sin(k\pi + \frac{\pi}{2}), \sin(k\pi) : k \in \mathbb{N}^*\} = \{-1, 0, 1\}$. Le reste est facile.

7. a) A_6 est borné donc A_6 admet une borne inférieure a telle que $a \geqslant 0$ car il est le grands des minorants.
Comme pour tout $n > 0$ et $m > 0$, on a :

$$\begin{aligned} a &\leqslant \frac{1}{n} + \frac{1}{m}, \text{ en prenant } m = 1, \text{on a} \\ a &\leqslant \frac{2}{n} \to 0, \text{ si, } n \to +\infty. \end{aligned}$$

Ce qui implique que $0 \leqslant a \leqslant 0$, on a donc $a = 0$. Alors $\min(A_6) = 0 \notin (A_6)$, cela signifie que le $\min(A_6)$ n'existe pas, et les minorants sont $m \in]-\infty, 0]$.

Correction d'exercice 5

1. On a

$$\begin{aligned} A &= \{x \in \mathbb{R}_+^* : 0 < x + \frac{1}{2x} < 2\} \cup \{x \in \mathbb{R}_-^* : -2 < x + \frac{1}{2x} < 0\} \\ &= \{x \in \mathbb{R}_+^* : 2x^2 + 4x + 1 < 0\} \cup \{x \in \mathbb{R}_-^* : 2x^2 + 4x + 1 > 0\} \end{aligned}$$

Comme la discriminant Δ de $2x^2 + 4x + 1$ est $\Delta = 8$ Alors sont racines $x_1 = \frac{-2-\sqrt{2}}{2}$, et $x_2 = \frac{-2+\sqrt{2}}{2}$, et ça signe est (voir le tableau au-dessous)

x	$-\infty$		x_1		x_2		0		$+\infty$
$x^2 + 4x + 1$		$+$	0	$-$	0	$+$	‖	$+$	

Donc $A = \phi \cup \left( ]-\infty, \frac{-2-\sqrt{2}}{2}[\cup]\frac{-2+\sqrt{2}}{2}, 0[\right) =]-\infty, \frac{-2-\sqrt{2}}{2}[\cup]\frac{-2+\sqrt{2}}{2}, 0[$.

2. $\inf(A)$, $\min(A)$ et $\max(A)$ n'existons pas, et $\sup(A) = 0$.

Correction d'exercice 6

Soit $[x]$ la partie entière de x. Alors,

1. Montrons que $\forall x, y \in \mathbb{R} : x \leqslant y \Rightarrow [x] \leqslant [y]$.
Sachant que la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = [x]$ est croissante sur $\mathbb{R}$. Donc, on a
$$\forall x, y \in \mathbb{R} : x \leqslant y \Rightarrow f(x) \leqslant f(y),$$
c'est-à-dire
$$\forall x, y \in \mathbb{R} : x \leqslant y \Rightarrow [x] \leqslant [y].$$

2. Montrons que $\forall x \in \mathbb{R}$, $\forall a \in \mathbb{Z} : [x+a] = [x] + a$.
Posons $[x] = n$, $(n \in \mathbb{Z})$, alors d'après la proposition
$$\forall x \in \mathbb{R} : [x] \leqslant x < [x] + 1.$$
On a, $n \leqslant x < n+1 \Rightarrow (n+a) \leqslant x < (n+a)+1$, sachant que les nombres $(n+a)$ et $(n+a)+1$ sont des entiers successifs, , on en déduit que $[x+a] = n+a = [x]+a$

3. Généralement $\forall x, y \in \mathbb{R} : \quad [x+y] \neq [x]+[y]$ et $[xy] \neq [x][y]$.
Contre exemple : On prend $x = \frac{1}{2}$ et $y = \frac{1}{2}$. Alors, $[x+y] = \left[\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right] = [1] = 1$, mais $[x] = \left[\frac{1}{2}\right] = 0 = [y]$. Donc, $[x+y] = 1 \neq 0 = [x]+[y]$.
Pour le deuxième, on prend $x = y = \sqrt{2}$, on peut vérifiant facilement que
$$[xy] = 2 \neq 1 = [x][y].$$

4. Si $x \in \mathbb{Z}$, posons $[x] = x$ et comme $-x \in \mathbb{Z}$. Alors, $[-x] = -x$. Donc $[x]+[-x] = x - x = 0$.
Si $x \notin \mathbb{Z}$, posons $[x] = n$ c'est à dire $n \leqslant x < n+1$ par conséquent $-n-1 \leqslant -x < -n$, et puis $[-x] = -n-1$. D'où le résultat $[x]+[-x] = n-n-1 = -1$.

★★☆☆

Remarque 2

On peut corriger l'exercice précédent, comme suit :
Pour tous $x, y \in \mathbb{R}$, on a $[x] \leqslant x \leqslant y \Rightarrow [x] \leqslant y$. Comme $[x]$ est un entier, alors forcément $[y] \geqslant [x]$, car la partie entière est unique.

★★☆☆

Correction d'exercice 7

1. On a $E \subset \mathbb{R}$ (bornée). alors,
$$\exists a,\ b \in \mathbb{R},\ \forall x \in E :\ a \leqslant x \leqslant b. \tag{6}$$
Donc, d'après l'équation (6), comme ,$\forall x \in E :\ a \leqslant x \leqslant b \Rightarrow [a] \leqslant [x] \leqslant [b]$, car la fonction $x \mapsto [x]$ est croissante. Par conséquent, on a
$$\exists a'_{(a'=[a])},\ b'_{(b'=[b])} \in \mathbb{R},\ \forall x'_{(x'=[x])} \in [E] :\ a' \leqslant x' \leqslant b'.$$

★★☆☆

D'où la bornitude de l'ensemble $[E]$.

2. D'après, les propriétés de partie entière, on a

$$\forall x \in E: \ [x] \leqslant x < [x]+1.$$

Ça signifie que

$$\inf([E]) \leqslant \inf(E) \text{ et } \sup(E) \leqslant \sup([E])+1.$$

En effet, on a : $\forall x \in E: \ \inf([E]) \leqslant [x] \leqslant x$. Donc, $\inf([E])$ est un minorant de E, comme $\inf(E)$ est le grand des minorants on obtient,

$$\inf([E]) \leqslant \inf(E).$$

D'autre par on a aussi : $\forall x \in E: \ x < [x]+1 \leqslant \sup([E])+1$. Par conséquent, $\sup([E])+1$ est un majorant de E. Comme $\sup(E)$ est le petit des majorants, d'où le résultat $\sup(E) \leqslant \sup([E])+1$.

Remarque 3

L'inégalité $\sup(E) \leqslant \sup([E])+1$, est large malgré l'inégalité
$\forall x \in E: \ [x] \leqslant x < [x]+1$, est stricte. Par exemple
Si $E = [2,4[$, alors $[E] = \{2,3\}$. On a donc,

$$\begin{cases} 2 = \inf([E]) \leqslant \inf(E) = 2, \\ 4 = \sup(E) \leqslant \sup([E])+1 = 3+1 = 4. \end{cases}$$

★★☆☆

Correction d'exercice 8

1. On utilisant raisonnement par l'absurde.
Supposons qu'il existe deux entiers non nuls p et q tels que $\sqrt{5} = \frac{p}{q}$. On peut supposer que la fraction $\frac{p}{q}$ est irréductible (i.e; $PGCD(p,q) = 1$). On a donc $5 = \frac{p^2}{q^2}$ ou encore $p^2 = 5q^2$. Nécessairement 5 divise p^2, car, encore $PCCD(p^2,q^2) = 1$. Il existe, donc $p' \in \mathbb{N}$ tel que $p = 5p'$ et alors $25p'^2 = 5q^2$ ou encore $5p'^2 = q^2$. On peut alors affirmer de la même façon que précédemment que 5 divise q^2 et donc que 5 divise q. L'entier 5 est donc un diviseur commun à p et q ce qui vient contredire le fait que la fraction $\frac{p}{q}$ est irréductible.

2. Montrons par l'absurd. Supposons que $x \in \mathbb{Q}^*$, $y \notin \mathbb{Q}$, et $(x+y) \in \mathbb{Q}$. Alors, $\exists z \in \mathbb{Q}$ tel que $x+y = z$. Donc, $y = z - x \in \mathbb{Q}$. Contradiction

3. Montrons par contre exemple. On a $x = 1-\sqrt{5} \notin \mathbb{Q}$ et $x = 1-\sqrt{5} \notin \mathbb{Q}$, mais $x+y = 1 \in \mathbb{Q}$ et $xy = -24 \in \mathbb{Q}$.

★★☆☆

Correction d'exercice supplémentaire 1

Soit l'ensemble E définie par $E = \{\frac{xy}{x^2+y^2} : x,y \in \mathbb{R}^*\}$.

1. Pour tout $x,y \in \mathbb{R}^*$, on a $(x+y)^2 \geqslant 0 \Leftrightarrow -(x^2+y^2) \leqslant 2xy \Leftrightarrow \dfrac{-1}{2} \leqslant \dfrac{xy}{x^2+y^2}$ (1). Ce qui signifie que E est une partie de $\mathbb{R}$ minorée et évidemment non vide, donc E admet une borne inférieure.

★★☆☆

(1) montre que $\frac{-1}{2}$ est un minorant de E, la borne inférieure étant le plus grand des minorants donc $\inf(E) \geqslant \frac{-1}{2}$.

Si on pose $y = -x$, on obtient $\frac{xy}{x^2+y^2} = \frac{-x^2}{2x^2} = \frac{-1}{2}$. Cela montre que $\inf(E) \leqslant \frac{-1}{2}$. Par conséquent $\inf(E) = \frac{-1}{2}$.

2. Pour tout $x, y \in \mathbb{R}^*$, on a $(x-y)^2 \geqslant 0 \Leftrightarrow x^2+y^2 \geqslant 2xy \Leftrightarrow \frac{xy}{x^2+y^2} \leqslant \frac{1}{2}$ (2). Ce qui signifie que E est une partie de $\mathbb{R}$ manjorée et évidemment non vide, donc E admet une borne supérieure.

(2) montre que $\frac{1}{2}$ est un majorant de E, la borne supérieure étant le plus petit des majorants donc $\sup(E) \leqslant \frac{1}{2}$.

Si on pose $y = x$, on obtient $\frac{xy}{x^2+y^2} = \frac{x^2}{2x^2} = \frac{1}{2}$. Cela montre que $\sup(E) \geqslant \frac{1}{2}$. Par conséquent $\sup(E) = \frac{1}{2}$.

3. $\sup(E), \inf(E) \in E$ donc, $\sup(E) = \max(E) = \frac{1}{2}$ et $\inf(E) = \min(E) = -\frac{1}{2}$

Correction d'exercice supplémentaire 2

1. Pour l'égalité $\max\{x,y\} = \frac{x+y+|x-y|}{2}$, on déstingue deux cas
   a. Si $x \leqslant y$, alors, $\max\{x,y\} = y$ et $|x-y| = y-x$. Donc,
   $$\frac{x+y+|x-y|}{2} = \frac{x+y+y-x}{2} = y = \max\{x,y\}.$$
   b. Si $y \leqslant x$, alors, $\max\{x,y\} = x$ et $|x-y| = x-y$. Donc,
   $$\frac{x+y+|x-y|}{2} = \frac{x+y+x-y}{2} = x = \max\{x,y\}.$$
2. Pour $\min\{x,y\} = \frac{x+y-|x-y|}{2}$, la même méthode
   a. Si $x \leqslant y$, alors, $\min\{x,y\} = x$ et $|x-y| = y-x$. Donc,
   $$\frac{x+y-|x-y|}{2} = \frac{x+y-(y-x)}{2} = x = \min\{x,y\}.$$
   b. Si $y \leqslant x$, alors, $\min\{x,y\} = y$ et $|x-y| = x-y$. Donc,
   $$\frac{x+y-|x-y|}{2} = \frac{x+y-(x-y)}{2} = y = \min\{x,y\}.$$

★★☆☆

CORRECTION D'EXERCICE SUPPLÉMENTAIRE 3

On a $A=\{x\in\mathbb{Q}:x^2<2\}=\{x\in\mathbb{Q}:-\sqrt{2}\leqslant x<\sqrt{2}\}=]-\sqrt{2},\sqrt{2}[\cap\mathbb{Q}$.

1. a. Comme $\mathbb{Q}$ dense dans $\mathbb{R}$, alors il existe r dans $\mathbb{Q}$ tel que $-\sqrt{2}<r<\sqrt{2}$. Donc, A est non vide. De plus, $\sqrt{2}$ est un majorant de A et$-\sqrt{2}$ est un minorant de A c'est à dire A est bornée.

   b. Comme $\mathbb{R}$ vérifie l'axiome de la borne supérieure alors la partie A admet une borne supérieure où $\sup(A)=\sqrt{2}$ et une borne inférieure dans $\mathbb{R}$ tel que $\inf(A)=-\sqrt{2}$.

   c. Montrons $\sup(A)=\sqrt{2}$, c'est à dire $\sup(A)=\sqrt{2}\Leftrightarrow\forall\varepsilon>0,\exists r_0\in\mathbb{Q}:\sqrt{2}-\varepsilon<r_0\leqslant\sqrt{2}$. $(*)$
   Comme $]\sqrt{2}-\varepsilon,\sqrt{2}[\cap\mathbb{Q}\subset A$, $\sqrt{2}-\varepsilon,\sqrt{2}\in\mathbb{R}$ et $\mathbb{Q}$ dense dans $\mathbb{R}$. Alors, il existe $r_0\in\mathbb{Q}$ tel que $\sqrt{2}-\varepsilon<r_0<\sqrt{2}$. D'où le résultat.

2. (Par l'absurde) Supposons que, $\sup(A)=q\in\mathbb{Q}$, $q\neq\sqrt{2}$, car $\sqrt{2}\notin\mathbb{Q}$.
   1^{er} cas : Si $q<\sqrt{2}$. Alors $\mathbb{Q}$ étant dense dans $\mathbb{R}$. Donc il existe $r\in\mathbb{Q}$ tel que $q<r<\sqrt{2}$, par conséquent $r^2<2$, donc $r\in A$ et $r>q$. Cela contredit le fait que q est majorant de A.
   2^{eme} cas : Si $q>\sqrt{2}$. Comme aussi $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$. Donc il existe $r'\in\mathbb{Q}$ tel que $\sqrt{2}<r'<q$. Mais r' est un majorant rationnel de $A=]-\sqrt{2},\sqrt{2}[\cap\mathbb{Q}$ avec $r'<q$, ce qui contredit le fait que q est le plus petit des majorant de A. (Contradiction)

3. Similaire

★★☆☆

CORRECTION D'EXERCICE SUPPLÉMENTAIRE 4

Déterminons la borne inférieure de le ensemble D, où $D=\{x^2+y^2:(x,y)\in\mathbb{R}^2 \text{ et } xy=1\}$.

1. a. $\forall(x,y)\in\mathbb{R}^2$, on a

$$\begin{aligned}(x-y)^2\geqslant 0 &\Leftrightarrow x^2+y^2-2xy\geqslant 0\\ &\Leftrightarrow x^2+y^2\geqslant 2xy\\ &\Leftrightarrow x^2+y^2\geqslant 2,\text{ car } xy=1.\end{aligned}$$

   En peut écrire D comme suit $D=\{x^2+\frac{1}{x^2}:x\in\mathbb{R}^*\}$. Donc, 2 est un minorants de D et $2\in D$, (pour $x=1$), c'est-à-dire $\min(D)=2$, d'où, d'après les propriétes $\inf(D)=\min(D)=1$.

   b. Posons $f(x)=x^2+\frac{1}{x^2}$, comme $\lim\limits_{x\to\mp\infty}f(x)=+\infty$. Donc, D n'est pas majorée.

2. Exercice.

★★☆☆

REMARQUE 4

On peut montrer la question $(1)-a$, comme suit.

★★☆☆

Supposons que $\exists M > 0$, $\forall x \in \mathbb{R}^* : x^2 + \frac{1}{x^2} < M$. Alors, pour $x = \sqrt{M}$, on trouve, $M + \frac{1}{M} < M \Rightarrow \frac{1}{M} < 0$. (Contradiction), par conséquent, l'ensemle E n'est pas borné supérieurement.