CHAPITRE 3

LIMITES ET CONTINUITÉ D'UNE FONCTION DE VARIABLE RÉELLE

3.1 Généralités sur les aplications et les fonctions

Soient I et $J \subset \mathbb{R}$, et f une relation de I vers J. Alors, on a les concepts suivantes :

Définition 3.1. (Fonction) La fonction f définie par un ensemble de départ $I \subset \mathbb{R}$ et par un ensemble d'arrivée $J \subset \mathbb{R}$ est une relation de I vers J dans laquelle chaque élément de I appelé antécédent possède au plus un élément dans l'ensemble J appelé image. On écrit

$$\begin{array}{rcl} f : I & \to & J \\ x & \to & y, \text{ tel que } y = f(x). \end{array}$$

3.1.1 Parité et périodicité d'une fonction

Définition 3.2. Un ensemble $I \subset \mathbb{R}$, est dit symétrique par rapport à l'origine 0 si

$$\forall x : \ x \in I \Rightarrow -x \in I.$$

Définition 3.3. (Fonction paire) La fonction $f : I \to \mathbb{R}$ est dite paire si

$$\forall x \in I : \ -x \in I, \text{ et } \ f(-x) = f(x).$$

Définition 3.4. (Fonction impaire) La fonction $f : I \to \mathbb{R}$ est dite impaire si

$$\forall x \in I : \ -x \in I, \text{ et } \ f(-x) = -f(x).$$

Définition 3.5. (Fonction périodique) La fonction $f : I \to \mathbb{R}$ est dite impaire s'il existe un réel p strictement positif tels que

$$\forall x \in I : \ x + p \in I, \ x - p \in I \text{ et } \ f(x + p) = f(x). \tag{3.1}$$

On appelle période de f le plus petit nombre positif p satisfait (3.1).

Remarque 3.1. Il est évident que $\forall k \in \mathbb{N}^* : \ f(x + kp) = f(x)$.

3.1.2 Fonctions monotones et fonctions bornées

Définition 3.6. La fonction f définie sur I est dite :

1. Croissante, si $\forall (x, x') \in I^2 : \ x \leq x' \Rightarrow f(x) \leq f(x')$,
2. Décroissante, si $\forall (x, x') \in I^2 : \ x \leq x' \Rightarrow f(x) \geq f(x')$,
3. Strictement croissante, si $\forall (x, x') \in I^2 : \ x \leq x' \Rightarrow f(x) < f(x')$,
4. Strictement décroissante, si $\forall (x, x') \in I^2 : \ x \leq x' \Rightarrow f(x) > f(x')$,
5. Monotone, si elle est croissante ou décroissante,
6. Strictement monotone, si elle est strictement croissante ou strictement décroissante,
7. Majorée, si $\exists M \in \mathbb{R}, \ \forall x \in I : \ f(x) \leq M$,
8. Minorée, si $\exists m \in \mathbb{R}, \ \forall x \in I : \ f(x) \geq m$.

Théorème 3.1. *Toute fonction majorée (resp. minorée) admet une borne supérieure (resp. inférieure), notée $\sup_I f$ (resp. $\inf_I f$).*

3.1.3 Maximum et minimum d'une fonction

Définition 3.7. On dit que f admet un maximum (resp. minimum) au point $x_0 \in I$ si

$$\forall x \in I : \ f(x) \leq f(x_0) \quad (\text{resp. } \forall x \in I : \ f(x) \geq f(x_0)).$$

3.2 Limite d'une fonction

3.2.1 Notion de voisinage

Définition 3.8. Une partie $V \subset \mathbb{R}$ est un voisinage de $x_0 \in \mathbb{R}$ s'il contient un intervalle ouvert $\theta \subset \mathbb{R}$ contenant x_0, i.e.

$$x_0 \in \theta \subset V.$$

Notons par $\mathcal{V}(x_0)$ l'ensemble des voisinages du point x_0. Ainsi, on peut reformuler les termes de la définition précédente de la manière suivante :

$$V \in \mathcal{V}(x_0) \Leftrightarrow \exists r > 0, \text{ telle que } \theta =]x_0 - r, x_0 + r[\subset V \quad .$$

Définition 3.9. Une partie $V \subset \mathbb{R}$ est dite voisinage de $+\infty$ (resp. de $-\infty$) si elle contient un intervalle ouvert de la forme $]a, +\infty[$ (resp. $]-\infty, a[$), $a \in \mathbb{R}$. Cela signifie que :
V est un voisinage de $+\infty$ (resp. de $-\infty$)$\Leftrightarrow \exists I =]a, +\infty[\subset V (]-\infty, a[\subset V.)$

3.2.2 Limite finie d'une fonction en un point

Définition 3.10. Soit f une fonction définie dans un voisinage V de x_0, sauf peut-être en x_0. On dit que f admet une limite $l \in \mathbb{R}$ quand x tend vers x_0 si

$$\forall \varepsilon > 0, \ \exists \delta > 0, \ \forall x \in V : \ |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon.$$

On note, dans ce cas $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = l$.

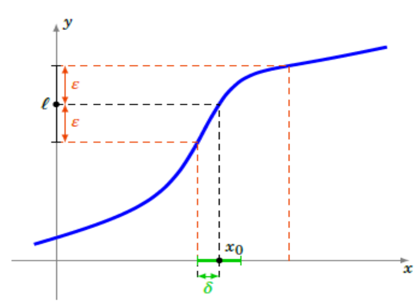


FIGURE 3.1 – Lien entre δ et ε.

Proposition 3.1. *Si f admet une limite au point x_0, cette limite est unique.*

3.2.3 Limite d'une fonction finie à droite et à gauche en un point

Définition 3.11. On dit que f admet une limite l à droite (respectivement à gauche) en x_0 si :

$$\forall \varepsilon > 0, \ \exists \delta > 0, \ \forall x \in V : \ 0 < x - x_0 < \delta \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon,$$

respectivement

$$\forall \varepsilon > 0, \ \exists \delta > 0, \ \forall x \in V : \ 0 < x_0 - x < \delta \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon.$$

On note dans ce cas $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ >}} f(x) = l$, (resp $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ <}} f(x) = l$).

Théorème 3.2.

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = l \Leftrightarrow \lim_{\substack{x \to x_0 \\ >}} f(x) = \lim_{\substack{x \to x_0 \\ <}} f(x) = l.$$

3.2.4 Limite à l'infini et limite infinie

Définition 3.12.

1. On dit que f a pour limite l en $+\infty$, et on note $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = l$, si
$$\forall\varepsilon > 0,\ \exists\delta > 0,\ \forall x \in V:\ x > \delta \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon.$$
2. On dit que f a pour limite l en $-\infty$, et on note $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = l$, si
$$\forall\varepsilon > 0,\ \exists\delta > 0,\ \forall x \in V:\ x < -\delta \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon.$$
3. On dit que f a pour limite $+\infty$ en x_0, et on note $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = +\infty$, si
$$\forall A > 0,\ \exists\delta > 0,\ \forall x \in V:\ |x - x_0| < \delta \Rightarrow f(x) > A.$$
4. On dit que f a pour limite $-\infty$ en x_0, et on note $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = -\infty$, si
$$\forall A > 0,\ \exists\delta > 0,\ \forall x \in V:\ |x - x_0| < \delta \Rightarrow f(x) < -A.$$
5. On dit que f a pour limite $+\infty$ en $+\infty$, et on note $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$, si
$$\forall A > 0,\ \exists\delta > 0,\ \forall x \in V:\ x > \delta \Rightarrow f(x) > A.$$
6. On dit que f a pour limite $+\infty$ en $-\infty$, et on note $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$, si
$$\forall A > 0,\ \exists\delta > 0,\ \forall x \in V:\ x < -\delta \Rightarrow f(x) > A.$$
7. On dit que f a pour limite $-\infty$ en $-\infty$, et on note $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$, si
$$\forall A > 0,\ \exists\delta > 0,\ \forall x \in V:\ x < -\delta \Rightarrow f(x) < -A.$$

3.2.5 Opérations sur les limites

Théorème 3.3. *Soient $f,\ g$ deux fonctions définies dans un voisinage V de x_0 et telle que $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = l \in \mathbb{R}$ et $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = l' \in \mathbb{R}$, alors nous avons*

1. $\lim\limits_{x\to x_0} (f \pm g)(x) = l \pm l'$,
2. $\lim\limits_{x\to x_0} (f.g)(x) = l.l'$,
3. $\lim\limits_{x\to x_0} (\lambda.f)(x) = \lambda.l$,
4. $\lim\limits_{x\to x_0} \left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{l}{l'}$, *si* $l' \neq 0$,
5. $\lim\limits_{x\to x_0} (|f(x)|) = |l|$,
6. $\lim\limits_{x\to x_0} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{l}$ *si* $l \geq 0$ *et* $n \in \mathbb{N}$.

De plus, si $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = +\infty$ où $-\infty$, alors $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{1}{f(x)} = 0$.

3.2.6 Limite d'une fonction composée

Proposition 3.2. *Soient $f : I \to \mathbb{R}$ et $g : J \to \mathbb{R}$ deux fonctions tel que $f(I) \subset J$, $x_0 \in I$ et $(l, l') \in \mathbb{R}^2$. Si $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = l$ et $\lim\limits_{x\to l} g(x) = l'$, alors $\lim\limits_{x\to x_0} (g \circ f)(x) = l'$.*

Remarque 3.2. Lorsque les limites ne sont pas finies, les résultats précédents de le théorème ci-dessus restent valables. Mais il y a des situations où l'on ne peut rien dire sur les limites. Par exemple si $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = -\infty$. Dans ces cas où il est impossible de conclure, nous disons que ce sont des formes indéterminées. Ces cas sont les suivants : $+\infty - \infty,\ 0 \times \infty,\ \frac{\infty}{\infty},\ \frac{0}{0},\ 1^{\infty},\ 0^0$ et ∞^0.

3.2.7 Limites dans les inégalités

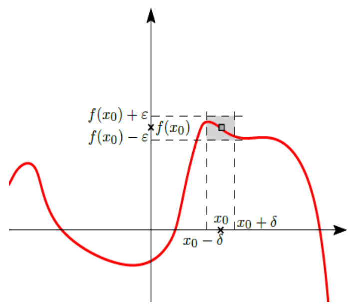
Théorème 3.4. *Soient f, g et h des fonctions définies dans un voisinage V de x_0 et telle que*

1. *Si* $\forall x \in V : \ f(x) \leq g(x), \ \lim\limits_{x \to x_0} f(x) = l$ *et* $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = l'$, *alors* $l \leq l'$
2. *Si* $\forall x \in V : \ f(x) \leq g(x), \ \lim\limits_{x \to x_0} f(x) = +\infty$ *et* $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = +\infty$, *alors* $l \leq l'$
3. *(Théorème des gendarmes) : Si* $\forall x \in V : \ f(x) \leq h(x) \leq g(x), \ \lim\limits_{x \to x_0} f(x) = l$ *et* $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = l$, *alors* $\lim\limits_{x \to x_0} h(x) = l$.

3.3 Continuité d'une fonction de variable réelle

Définition 3.13. (Continuité en un point) Soit I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction.
On dit que f est continue au point x_0 de I si $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$, c'est à dire

$$\forall \varepsilon > 0, \ \exists \delta = \delta(\varepsilon), \ \forall x \in V(x_0) : \ |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon.$$



3.3.1 Caractérisation séquentielle de la continuité

Proposition 3.3. *On dit que f est continue au point x_0 de I si et seulement si*

$$\forall (u_n) \subset V(x_0) : \ \lim_{n \to +\infty} u_n = x_0 \Rightarrow \lim_{n \to +\infty} f(u_n) = f(x_0).$$

3.3.2 Continuité à droite et continuité à gauche

Définition 3.14. On dit que la fonction f est continue à droite (resp. à gauche) au point x_0 de I si elle est définie au moins dans un ensemble de la forme $[x_0, x_0 + r[, r > 0$, (resp. de la forme $]x_0 - r, x_0[, r > 0$) et $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ >}} f(x) = f(x_0)$,

(resp. $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ <}} f(x) = f(x_0)$.

Définition 3.15.
1. On dit qu'une application f admet une discontinuité de première espèce en x_0 si et seulement si elle n'est pas continue en x_0 et possède une limite à droite et une limite à gauche en x_0.
2. Lorsque f n'est pas continue et n'admet pas de discontinuité de première espèce en x_0, on dit qu'elle admet une discontinuité de seconde espèce en x_0.

3.3.3 Prolongement par continuité

Définition 3.16. Soit f une fonction définie sur $I - \{x_0\}$ et admettant une limite finie l en x_0. On appelle prolongement par continuité de f en x_0 la fonction $\tilde{f}$, définie sur I par

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x), & \text{si } x \neq x_0, \\ l, & \text{si } x = x_0. \end{cases}$$

La fonction $\tilde{f}$ est continue en x_0.

3.3.4 Opérations algébriques sur les applications continues

Théorème 3.5. *Soient f, g deux fonctions continues en un point x_0 et $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors les fonctions $f + g$, $\lambda.f$ et $f.g$ sont continues en x_0.*
Si de plus $g(x_0) \neq 0$ alors $\frac{f}{g}$ est continue en x_0.

Proposition 3.4. *Si f est définie sur un voisinage V de x_0 et continue en x_0 et si g est définie sur un voisinage W de $y_0 = f(x_0)$ et continue en y_0, alors la fonction composée $g \circ f$ est continue en x_0.*

3.4 Continuité sur un intervalle

Définition 3.17.
1. On dit qu'une fonction est continue sur un intervalle ouvert $]a, b[$ si elle est continue en tout point de l'intervalle $]a, b[$.
2. On dit qu'une fonction est continue sur un intervalle fermé $[a, b]$ si elle est continue sur $]a, b[$ et continue à droite en a et à gauche en b.

3.4.1 Continuité uniforme

Définition 3.18. Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction. f est dite uniformément continue sur I si et seulement si

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta = \delta(\varepsilon),\ \forall (x, x') \in I^2 :\ |x - x'| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x')| < \varepsilon.$$

Remarque 3.3. δ ne dépend que de ε, contrairement à la définition de la continuité où δ dépend aussi de x_0.

Proposition 3.5. *Si f est uniformément continue sur I, alors f est continue sur I.*

Théorème 3.6. *(théorème de Heine) Toute fonction continue sur un segment $[a, b]$ est uniformément continue sur $[a, b]$.*

3.5 Le théorème des valeurs intermédiaires et ses applications

Théorème 3.7. *(Bolzano-Cauchy) Soit f une fonction definie et continue sur le segment $[a, b]$ telle que $f(a)f(b) < 0$ (c'est-a-dire que $f(a)$ et $f(b)$ sont de signes contraires), alors il existe au moins un point $\exists c \in]a, b[$ vérifiant $f(c) = 0$.*

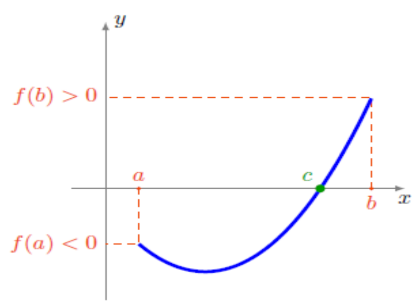
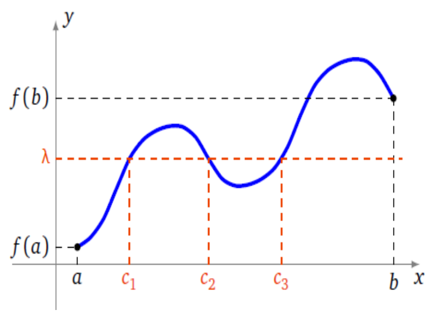


FIGURE 3.2 – Une illustration du théorème de Bolzano-Cauchy.

3.5.1 Le théorème des valeurs intermédiaires

Théorème 3.8. *Soit f une fonction definie et continue sur un intervalle I et soient $(a, b) \in I^2$. Alors pour tout nombre λ, compris entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe un nombre $c \in]a, b[$ tel que $f(c) = \lambda$.*
Et si de plus f est stictement monotone, alors le nombre c est unique.



Corollaire 3.1. *Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur un intervalle I. Alors $f(I)$ est un intervalle.*

Proposition 3.6. *Si $f : [a,b[\to \mathbb{R}$ est continue et strictement croissante, alors f est une bijection de $[a,b[$ sur $[f(a), \lim\limits_{\substack{x \to b \\ <}} f(x)[$.*

Théorème 3.9. *(Theoreme de Weirstrass) Soit f une fonction definie et continue sur un intervalle $[a,b]$. Alors f atteint ses bornes supérieure et inferieure, c'est-a-dire*

$$\exists (x_1, x_2) \in [a,b]^2 : \ f(x_1) = \sup_{[a,b]} f(x) \ \ et \ \ f(x_2) = \inf_{[a,b]} f(x).$$

Cela signifie que $f(x_1) = \max\limits_{[a,b]} f(x)$ et $f(x_2) = \min\limits_{[a,b]} f(x)$.

Théorème 3.10. *(Théorème du point fixe) Si f est une fonction continue de $[a,b]$ vers $[a,b]$, alors il existe $x_0 \in [a,b]$ tel que $f(x_0) = x_0$. Le point x_0 est appelle point fixe de f.*

3.5.2 Les fonctions monotones et la continuité

Théorème 3.11. *(Théorème de la bijection) Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction. Si f est continue et strictement monotone sur I, alors*

1. *f établit une bijection de l'intervalle I dans l'intervalle image $J = f(I)$,*
2. *La fonction réciproque $f^{-1} : J \to I$ est continue et strictement monotone sur J et elle a le même sens de variation que f.*

CHAPITRE 4

DÉRIVABILITÉ DES FONCTIONS D'UNE VARIABLE RÉELLE

4.1 La dérivée en un point

Définition 4.1. Soit f une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. Soit x_0 un point de I. On dit que f est dérivable en x_0 si la limite

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

existe et est finie. Cette limite est appelée derivée de f au point x_0 et on la note $f'(x_0)$.

Remarque 4.1. En posant $h = x - x_0$ appelée accroissement de la variable x en x_0, on obtient $x = x_0 + h$ et la derivée s'écrit alors

$f'(x_0) = \lim\limits_{h \to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$, ou

$f(x_0 + h) - f(x_0) = f'(x_0)h + h.\varepsilon(x), \quad$ où $\lim\limits_{h \to 0} \varepsilon(x) = 0$

Donc si $f'(x_0) \neq 0$, le nombre $f'(x_0).h$ est une valeur approchée de $f(x_0 + h) - f(x_0)$ et on peut écrire, (si h assez petit)

$$f(x_0 + h) - f(x_0) \approx f'(x_0)h.$$

4.1.1 Dérivée à droite et à gauche

Définition 4.2. Soit f une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. Soit x_0 un point de I. (ou bien une extrémité de I).

1. On dit que f est dérivable à droite en x_0 si la limite suivante existe

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ >}} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0},$$

   et on la note $f'_d(x_0)$.

2. On dit que f est dérivable à gauche en x_0 si la limite suivante existe

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ <}} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0},$$

   et on la note $f'_g(x_0)$.

Proposition 4.1. *Une fonction f est dérivable en x_0 si et seulement si elle est dérivable à droite et à gauche en x_0 et $f'_d(0) = f'_g(0)$.*

4.1.2 Interprétation géométrique de la dérivée

Soit f une fonction dérivable en x_0 et (C_f) la courbe représentative de f. L'équation de la tangente (T) à la courbe (C_f) au point $M_0(x_0, f(x_0))$ est

$$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0).$$

$f'(x_0)$ représente la pente de la droite tengente à la courbe (C_f) au point $M_0(x_0, f(x_0))$.

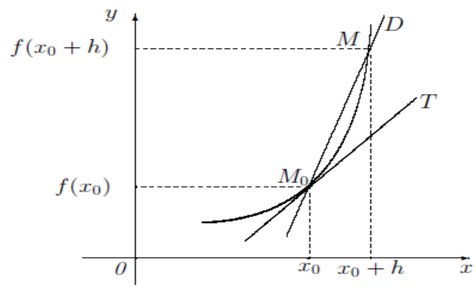


FIGURE 4.1 – la tangente (T) de (C_f) en M_0

4.1.3 Dérivabilité et continuité

Proposition 4.2. *Une fonction f dérivable en x_0 est forcement continue en x_0.*

Remarque 4.2. La réciproque est fausse, pour plus détail voir l'exemple **??**.

4.1.4 Dérivabilité sur un intervalle

Définition 4.3. On dit qu'une fonction f est dérivable sur I si et seulement si elle est dérivable en tout point $x_0 \in I$. On définit alors la fonction dérivée

$$\begin{array}{rcl} f' : I & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & f'(x). \end{array}$$

4.2 Opération sur les dérivées

Proposition 4.3. *Soient $f, g : I \to \mathbb{R}$ deux fonctions dérivables sur I et $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors, on a*

1. $(f+g)' = f' + g'$,
2. $(\lambda.f)' = \lambda.f'$,
3. $(f.g)' = f'.g + f.g'$,
4. $\left(\frac{1}{f}\right)' = \frac{-f'}{f^2}$ *où* $f \neq 0$,
5. $\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'.g - g'.f}{g^2}$, *où* $g \neq 0$.

4.2.1 Dérivée d'une fonction composée

Proposition 4.4. *Si f est dérivable en x_0 et g est dérivable en $f(x_0)$ alors $g \circ f$ est dérivable en x_0 et de dérivée*

$$(g \circ f)'(x_0) = g'(f(x_0)).f'(x_0)$$

Exemple 4.1. Soit la fonction f définie par $f(x) = \sin(x^3)$. Alors, on a

$$f'(x) = (x^3)'.\sin'(x^3) = 3x^2.\cos(x^3).$$

4.2.2 Dérivée d'une fonction réciproque

Théorème 4.1. *Soit I un intervalle ouvert. Soit $f : I \to J$ dérivable et bijective dont on note $f^{-1} : J \to I$ la bijection réciproque. Si f^{-1} ne s'annule pas sur I alors f^{-1} est dérivable et on a pour tout $x \in J$*

$$(f^{-1})'(f(x)) = \frac{1}{f'(x)}.$$

4.2.3 Dérivées successives

Soient $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable et f' sa dérivée. Si la fonction $f' : I \to \mathbb{R}$ est aussi dérivable on note $(f')' = f''$ la dérivée seconde de f. Plus généralement on note

$$f^{(0)} = f,\ f^{(1)} = f',\ f^{(2)} = f'', ..., f^{(n+1)} = (f^{(n)})'$$

Si la dérivée $n-$ ième $f^{(n)}$ existe on dit que f est n fois dérivable.

4.2.4 Fonction de classe C^∞

Définition 4.4. Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert I, soit n un entier tel que $n \geq 1$.

- Si les dérivées $f', f'', ..., f^{(n)}$ existent et si $f^{(n)}$ est continue sur I, on dit que f est de classe C^n sur I.
- On dit que f est de classe C^∞ sur I si toutes les dérivées $f^{(n)}$ existent et sont continues sur I.

4.3 Extremum local, théorème de Rolle

4.4 Extremum local

Définition 4.5. Soit f une fonction définie sur un intervalle I.

1. On dit que x_0 est un point critique de f si $f'(x_0) = 0$.
2. On dit que f admet un maximum local en x_0 (resp. un minimum local en x_0) s'il existe un intervalle ouvert J contenant x_0 tel que
$$\forall x \in I \cap J :\ f(x) \leq f(x_0) \quad (\text{resp. } f(x) \geq f(x_0)).$$
3. On dit que f admet un extremum local en x_0 si f admet un maximum local ou un minimum local en ce point.
4. On dit que f admet un maximum global en x_0 si
$$\forall x \in I :\ f(x) \leq f(x_0).$$

Théorème 4.2. *Soit I un intervalle ouvert et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable. Si f admet un maximum local (ou un minimum local) en x_0 alors $f'(x_0) = 0$.*

Remarque 4.3. La réciproque du théorème 4.2 est fausse. Par exemple la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, définie par $f(x) = x^3$ vérifie $f'(0) = 0$ mais $x_0 = 0$ n'est ni un maximum local ni un minimum local.

Méthode de la dérivée seconde

Théorème 4.3. *Soit I un intervalle ouvert, x_0 et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable deux fois telle que*

$-1)$ $f'(x_0) = 0$ *(est un point stationnaire),*

$-2)$ $f''(x_0)$ *existe.*

Alors

$-i)$ *Si $f''(x_0) > 0$, f admet un minimum local en x_0,*

$-ii)$ *Si $f''(x_0) < 0$, f admet un maximum local en x_0,*

$-iii)$ *Si $f''(x_0) = 0$ ou devient infinie, on ne peut rien dire.*

Remarque 4.4. Si $f''(x_0) = 0$, il faut pousser l'étude de f à l'aide de la formule de Taylor. Telle que f admet des dérivées d'ordre ≥ 3, nous verrons cela dans analyse 2 (voir [**?**]).

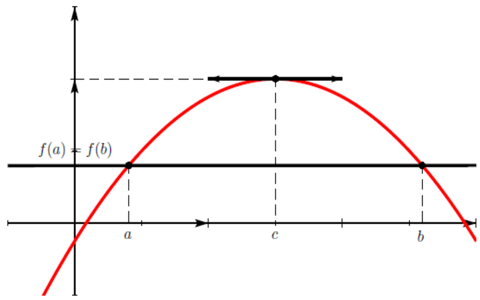
4.4.1 Théorème de Rolle

Théorème 4.4. *Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction telle que*

1. *f est continue sur $[a, b]$,*
2. *f est dérivable sur $]a, b[$,*
3. *$f(a) = f(b)$.*

Alors il existe $c \in]a, b[$ tel que $f'(c) = 0$.

Remarque 4.5. (Interprétation géométrique) Il existe au moins un point du graphe de f où la tangente est horizontale (voir le figure au-dessous).



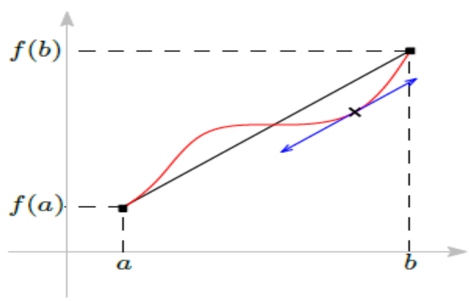
4.4.2 Théorème de Lagrange ou des accroissements finis

Théorème 4.5. *Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction vérifiant*

1. *f est continue sur $[a, b]$,*
2. *f est dérivable sur $]a, b[$,*
3. *$f(a) = f(b)$.*

Alors $\exists c \in]a, b[$: $f(b) = f(a) = f'(c)(b - a)$.

Remarque 4.6. (Interprétation géométrique) il existe au moins un point du graphe de f où la tangente est parallèle à la droite (AB) où $A = (a, f(a))$ et $B = (b, f(b))$. (voir le figure au-dessous).



4.4.3 Sens de variation d'une fonction dérivable

Les résultats précédents permettent d'établir un lien entre le sens de variation d'une fonction et le signe de sa dérivée. Nous avons le théorème suivant

Théorème 4.6. *Soit $(a, b) \in \overline{\mathbb{R}}^2$, tel que $a < b$. Si f est une fonction dérivable sur $]a, b[$. Alors*

1. *f est constante sur $[a, b]$ si et seulement si $\forall x \in]a, b[$: $f'(x) = 0$,*
2. *f est croissante $[a, b]$ si et seulement si $\forall x \in]a, b[$: $f'(x) \geq 0$,*
3. *f est décroissante $[a, b]$ si et seulement si $\forall x \in]a, b[$: $f'(x) \leq 0$,*
4. *Si $\forall x \in]a, b[$: $f'(x) > 0$, on a f est strictement décroissante sur $[a, b]$,*
5. *Si $\forall x \in]a, b[$: $f'(x) < 0$, on a f est strictement décroissante sur $[a, b]$.*

Remarque 4.7. La réciproque au point (4) (et aussi au (5)) est fausse. Par exemple la fonction $x \to x^3$ est strictement croissante et pourtant sa dérivée s'annule en 0.

4.5 Règle de l'Hospital

4.5.1 Première règle de l'Hospital

Théorème 4.7. *Soient $f,\ g : I \to \mathbb{R}$ deux fonctions dérivables, et $x_0 \in I$. On suppose que*

1. $f(x_0) = g(x_0) = 0,$
2. $\forall x \in I - \{x_0\} : \quad g'(x) \neq 0.$

Si $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = l,\ (l \in \mathbb{R})$ *alors* $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = l.$

Remarque 4.8. La réciproque est en général fausse. En effet :
Soit $f(x) = x^2 \cos(\frac{1}{x})$ et $g(x) = x$. Alors, on a $\lim\limits_{x \to 0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$. Tandis que
$\lim\limits_{x \to 0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim\limits_{x \to 0} [2x \cos(\frac{1}{x}) + \sin(\frac{1}{x})]$, n'existe pas car $\lim\limits_{x \to 0} \sin(\frac{1}{x})$ n'existe pas.

4.5.2 Deuxième règle de l'Hospital

Théorème 4.8. *Soient f, g deux fonctions definies et derivables dans un voisinage épointé I de x_0 fini ou infini) telles que*

1. $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \infty$ *et* $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = \infty$
2. $\forall x \in I : \quad g'(x) \neq 0.$

Si $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = l$*, existe, finie ou infinie, alors*

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = l.$$

FONCTIONS USUELLES

5.1 Fonctions circulaires réciproques

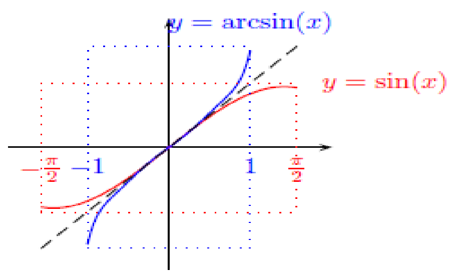
5.1.1 Fonction arcsinus

Définition 5.1. La fonction sinus, sur l'intervalle $]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$ est continue et strictement croissante. Par application du théorème de la bijection 3.11, on peut affirmer que la fonction sinus, restreinte à l'intervalle $]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$ définie une bijection de $]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$ sur $[-1,1]$. La bijection réciproque, nommée $\arcsin$, définie par

$$\begin{array}{rcl} \arcsin:[-1,1] & \to &]-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}[\\ x & \mapsto & \arcsin x, \end{array}$$

c'est-à-dire $\forall x\in[-1,1],\ \forall y\in]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[: y=\arcsin x \Leftrightarrow x=\sin y$.

Remarque 5.1. (Représentation graphique de $\arcsin$) Comme on le sait, dans un repère orthonormé, la courbe d'une fonction et sa fonction inverse sont symétriques par rapport à la droite d'équation : $y=x$, (voir le figure au-dessus)



Propriétés 5.1.
1. $\forall x\in[-1,1]:\arcsin(\sin x)=x$, et $\forall x\in[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]:\sin(\arcsin x)=x$.
2. La fonction $\arcsin$ est continue, strictement croissante, impaire dérivable sur $[-1,1]$ de dérivée

$$(\arcsin x)'=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

3. $\forall x\in[-1,1]:\cos(\arcsin x)=\sqrt{1-x^2}$.
4. $\forall x\in[-1,1]:\tan(\arcsin x)=\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$.

5.1.2 Fonction arccosinus

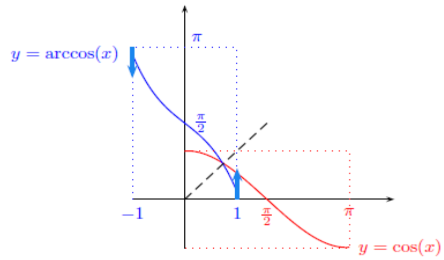
La fonction cosinus est paire 2π périodique, continue et dérivable et si $x\in[0,\pi]:\cos' x=-\sin x<0$. Donc elle est strictement décroissante sur $[0,\pi]$. Elle est donc bijective de $[0,\pi]$ dans $\cos([0,\pi])=[-1,1]$.

Définition 5.2. La bijection réciproque de $\cos$ est appelée fonction arccosinus et est notée $\arccos$. Ainsi

$$\begin{array}{rcl} \arccos:[-1,1] & \to & [0,\pi] \\ x & \mapsto & \arccos x, \end{array}$$

c'est-à-dire $\forall x\in[-1,1],\ \forall y\in[0,\pi]: y=\arccos x \Leftrightarrow x=\cos y$.

Représentation graphique de $\arccos$

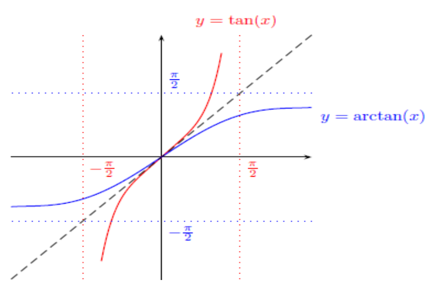


Propriétés 5.2.
1. $\forall x \in [-1,1] : \arccos(\cos x) = x$, et $\forall x \in [0,\pi] : \cos(\arccos x) = x$.
2. La fonction $\arcsin$ est continue, strictement décroissante, paire dérivable sur $[-1,1]$ de dérivée
$$(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$
3. $\forall x \in [-1,1] : \sin(\arccos x) = \sqrt{1-x^2}$.
4. $\forall x \in [-1,1] : \tan(\arcsin x) = \frac{\sqrt{1-x^2}}{x}$.
5. $\forall x \in [-1,1] : \arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}$.

5.1.3 Fonction arctangente

Définition 5.3. La fonction tangente est une bijection de $]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$ à valeurs dans $\mathbb{R}$. Sa bijection réciproque est appelée fonction arctangente et est notée $\arctan$, donc
$$\begin{array}{rcl} \arctan : \mathbb{R} & \to &]-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}[\\ x & \mapsto & \arctan x, \end{array}$$
c'est-à-dire
$$\forall x \in \mathbb{R},\ \forall y \in]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[: y = \arctan x \Leftrightarrow x = \tan y.$$

Représentation graphique de $\arctan$



Propriétés 5.3.
1. $\forall x \in \mathbb{R} : \arctan(\tan x) = x$, et $\forall x \in]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[: \tan(\arctan x) = x$.
2. La fonction $\arctan$ est continue, strictement croissante, impaire dérivable sur $\mathbb{R}$ de dérivée
$$(\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2}.$$
3. $\lim\limits_{x\to+\infty} \arctan x = \frac{\pi}{2}$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} \arctan x = \frac{\pi}{2}$.
4. $\arctan x + \arctan \frac{1}{x} = \begin{cases} \frac{\pi}{2} & : x > 0; \\ -\frac{\pi}{2} & : x < 0. \end{cases}$

5.2 Fonctions hyperboliques.

5.2.1 Fonctions sinus et cosinus hyperboliques

Définition 5.4. Les fonctions sinus hyperbolique sh et cosinus hyperbolique ch sont définies sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ par

$$shx = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \quad \text{et} \quad chx = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

Propriétés 5.4.

1. Les fonctions sh et ch sont dérivables sur $\mathbb{R}$ avec, pour tout $x \in \mathbb{R}$

$$sh'x = chx \quad \text{et} \quad ch'x = shx.$$

2. La fonction sh est impaire, strictement croissante sur $\mathbb{R}$ et

$$\lim_{x \to -\infty} chx = -\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x \to +\infty} chx = +\infty.$$

3. La fonction ch est paire, strictement décroissante sur $]-\infty, 0]$, strictement croissante sur $[0, +\infty[$ et

$$\lim_{x \to -\infty} chx = \lim_{x \to +\infty} chx = +\infty.$$

4. $ch^2x - sh^2x = 1.$

5.2.2 Fonction tangente hyperbolique

Définition 5.5. La fonction tangente hyperbolique est définie par

$$\begin{aligned} th : \mathbb{R} &\to \ ]-1, 1[\\ x &\mapsto thx = \frac{shx}{chx} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}. \end{aligned}$$

Propriétés 5.5.

1. Les fonctions th est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$

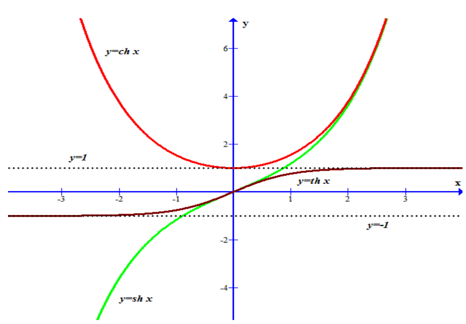
$$th'x = \frac{1}{ch^2}x = 1 - th^2x.$$

2. La fonction th est impaire, strictement croissante sur $\mathbb{R}$ et

$$\lim_{x \to -\infty} thx = -1 \quad \text{et} \quad \lim_{x \to +\infty} thx = 1.$$

3. $\forall x \in thx = \frac{1-e^{-2x}}{1+e^{-2x}}.$

Représentation graphique des fonctions sh, ch et th



5.2.3 Formulaire de trigonométrie hyperbolique

Propriétés 5.6. Pour tout $a, b \in \mathbb{R}$, nous avons

$sh(a+b) = sha.chb + cha.shb$	$th(2a) = \frac{2tha}{1+th^2a}$
$sh(a-b) = sha.chb - cha.shb$	$sha + shb = 2sh\frac{a+b}{2}.ch\frac{a-b}{2}$
$ch(a+b) = cha.chb + sha.shb$	$sha - shb = 2sh\frac{a-b}{2}.ch\frac{a+b}{2}$
$ch(a-b) = cha.chb - sha.shb$	$cha + chb = 2ch\frac{a+b}{2}.ch\frac{a-b}{2}$
$ch(2a) = ch^2a + sh^2a$	$cha - chb = 2sh\frac{a-b}{2}.sh\frac{a+b}{2}$
$ch(2a) = 2ch^2a - 1 = 1 + 2sh^2a$	$th(a+b) = \frac{tha+thb}{1+tha.thb}$
$sh(2a) = 2cha.sha$	$th(a-b) = \frac{tha+thb}{1-tha.thb}$

5.3 Fonctions hyperboliques inverses.

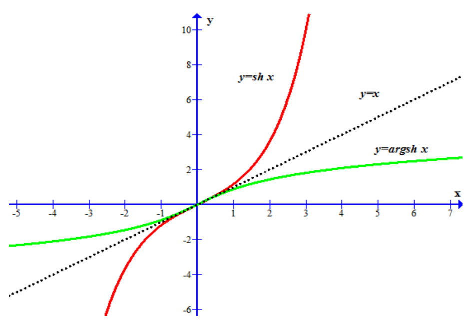
5.3.1 Fonction argument sinus hyperbolique.

Définition 5.6. La fonction sinus hyperbolique définie une bijection de $\mathbb{R}$ sur son image $\mathbb{R}$. L'application réciproque est appelée fonction argument sinus hyperbolique et notée $argsh$, c'est-à-dire

$$\begin{aligned} argsh : \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto argshx, \end{aligned}$$

c'est-à-dire $\forall x \in \mathbb{R},\ \forall y \in \mathbb{R} : y = argshx \Leftrightarrow x = shy.$

Représentation graphique de $argsh$



Propriétés 5.7.
1. $\forall x \in \mathbb{R} : argsh(shx) = x$, et $\forall x \in [0, \pi] : sh(argshx) = x.$
2. La fonction $argsh$ est continue, strictement croissante, impaire dérivable sur $[-1, 1]$ de dérivée
$$(argshx)' = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}.$$
3. $\forall x \in \mathbb{R} : argshx = \ln(x + \sqrt{x^2+1}).$

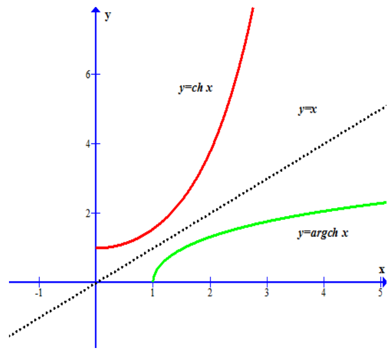
5.3.2 Fonction argument cosinus hyperbolique.

Définition 5.7. La fonction cosinus hyperbolique définie une bijection de $[0, +\infty[$ sur son image $[1, +\infty[$. L'application réciproque est appelée fonction argument cosinus hyperbolique et notée $argch$, c'est-à-dire

$$\begin{aligned} argch : [1, +\infty[&\to [0, +\infty[\\ x &\mapsto argchx, \end{aligned}$$

c'est-à-dire
$$\forall x \in [1, +\infty[,\ \forall y \in [0, +\infty[: y = argchx \Leftrightarrow x = chy.$$

Représentation graphique de $argch$

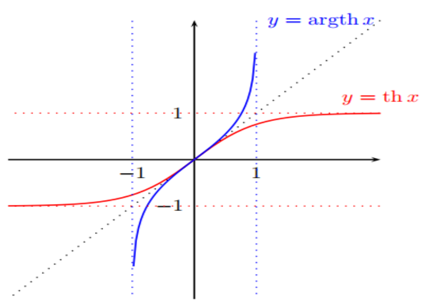


Propriétés 5.8.
1. $\forall x \in [0, +\infty[: argch(chx) = x$, et $\forall x \in [1, +\infty[: ch(argchx) = x$.
2. La fonction $argch$ est continue, strictement croissante, dérivable sur $]1, +\infty[$ de dérivée
$$(argchx)' = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}}.$$
3. $\forall x \in [1, +\infty[: argchx = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1})$.

5.3.3 Fonction argument tangente hyperbolique.

Définition 5.8. La fonction tangente hyperbolique définie une bijection de $\mathbb{R}$ sur son image $] - 1, 1$. L'application réciproque est appelée fonction argument tangente hyperbolique et notée $argth$, c'est-à-dire
$$argch :] - 1, 1[\to \mathbb{R}, \quad x \mapsto argthx,$$
c'est-à-dire, $\forall x \in] - 1, 1[, \ \forall y \in \mathbb{R} : y = argthx \Leftrightarrow x = thy$.

Représentation graphique de $argth$



Propriétés 5.9.
1. $\forall x \in \mathbb{R} : argth(thx) = x$, et $\forall x \in] - 1, 1[: th(argthx) = x$.
2. La fonction $argth$ est continue, strictement croissante, impaire, dérivable sur $] - 1, 1[$ de dérivée
$$(argthx)' = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}.$$
3. $\forall x \in] - 1, 1[: argthx = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$.