Chapitre I : Introduction au calcul anélastique

I) Introduction:

Face aux forts séismes, la plupart des structures ont un comportement non linéaire avant rupture et les effets non-linéaires, qui en découlent, sont souvent importants dans ces structures. Il est donc nécessaire de prendre en compte le comportement anélastique (plastique et/ou endommagement) des matériaux dans l'évaluation du comportement des structures à la rupture.

II) Notion de loi de comportement:

Le dimensionnement des éléments de structure repose sur la connaissance des caractéristiques physiques et mécaniques (E, υ, R_e, A%, …) des matériaux qui les constituent. Il en est de même pour le choix des matériaux dans le respect des contraintes imposées par le cahier des charges.
Ces caractéristiques sont fournies par les essais mécaniques qui sont interprétés par des diagrammes. Chaque diagramme correspond à une loi de comportement du matériau étudié.
L'intérêt principal d'une telle loi est qu'elle peut être utilisée pour la prévision du comportement du matériau (élastique, plastique, rupture).
L'exemple le plus simple et le plus instructif est celui donné par l'essai de traction de l'acier:

II-1) Essai de Traction de l'acier:

1) Principe:
Pour déterminer la loi de comportement en traction de l'acier, c'est-à-dire tracer le diagramme contrainte-déplacement, on impose une déformation progressive à une éprouvette sur laquelle on a tracé 2 repères distants de L_0 et on mesure simultanément l'effort F et l'allongement ($L-L_0$) correspondant (figure I.1).

2) Eprouvettes:
Forme: circulaire ou non (carrée, rectangulaire, …)

$$\text{Dimensions: } \begin{cases} d : \text{diamètre (éprouvette circulaire)} \\ a : \text{épaisseur (éprouvette plate)} \\ b : \text{largeur} \quad \text{(éprouvette plate)} \\ L_0 : \text{longueur initiale entre repères} \\ S_0 : \text{section initiale} \end{cases}$$

<u>Aciers</u>: En général, on prend $L_0 = 100$ mm et $S_0 = 150$ mm^2
(Eprouvette proportionnelle: $L_0^2 = K^2.S_0$, Normes Européennes: $K = 31.92 \div 66.67$)

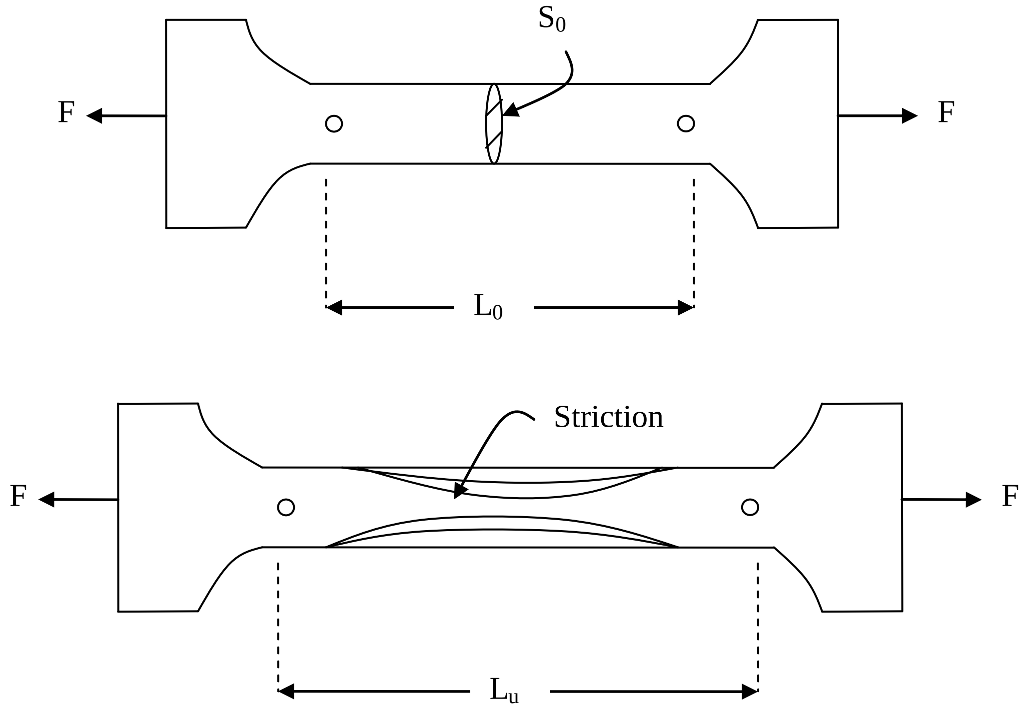
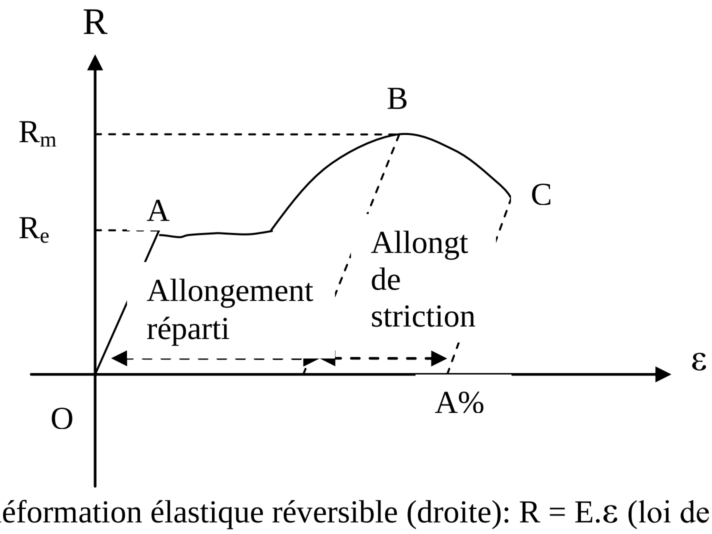


Figure I.1: Essai de traction de l'acier

3) Diagramme conventionnel:

Le diagramme de traction est dit conventionnel lorsque les mesures de résistance et d'allongement unitaires sont rapportées aux valeurs initiales L_0 et S_0. C'est donc la représentation de la charge unitaire $R = F/S_0$ en fonction du taux d'allongement $\varepsilon = (L - L_0)/L_0$



OA: Domaine de déformation élastique réversible (droite): $R = E.\varepsilon$ (loi de Hooke), E: module d'Young
AB : Domaine de déformation plastique répartie
BC : Domaine de striction (déformation plastique localisée) et C : Point de rupture
A% : coefficient d'allongement (allongement après rupture), $A\% = 100.(L_u - L_0)/L_0$
R_e : limite d'élasticité (ou d'écoulement) = F/S_0 (MPa)
R_m : contrainte de rupture (résistance à la traction) = F_m/S_0 (MPa)
Z : coefficient de striction = $100.(S_0-S_u)/S_0$, S_u : section minimale de l'éprouvette après rupture
υ: coefficient de Poisson = $(D_0-D_u)/D_u$, D_0: diamètre imposé et D_u: diamètre ultime
G : coefficient de Lamé (module de cisaillement) = $E/2.(1+ \upsilon)$, G(MPa)

Remarques:

1) Lorsque le point de passage du domaine élastique au domaine plastique n'est pas clair sur la courbe de traction, on considère par convention la résistance $R_{e0.2}$ (correspondant à une déformation relative de 0.2%) au lieu de la limite d'élasticité R_e
2) L'énergie emmagasinée par unité de volume est égale à la surface sous la courbe

4) Diagramme rationnel:

a) Définition:

C'est une représentation de la courbe de traction avec en abcisses la déformation rationnelle et en ordonnées la contrainte vraie.

b) Contrainte vraie: C'est la contrainte rapportée à la section instantanée (S_v): $\sigma_v = F/ S_v$.

c) Allongement rationnel: ε_v (ou ε_r) = $\int_{L_0}^{L_u} \frac{dL}{L} = \ln(1+\varepsilon)$.

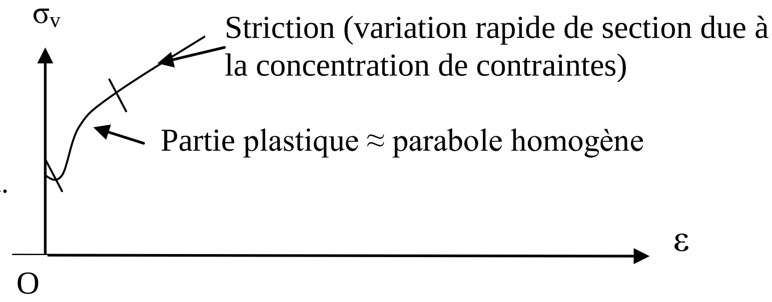
d) Coefficient d'écrouissage (ou de consolidation) n

L'écrouissage a lieu dans la partie parabolique.

Forme analytique: $\sigma = K.\varepsilon_v^n$

<u>Remarque:</u>

L'écrouissage est un traitement mécanique permettant de modifier certaines propriétés de l'acier (σ, μ) par pliage ou étirage à froid. Conséquence: la limie élastique augmente mais la ductilité diminue.



5) Ductilité

La ductilité d'un matériau est son aptitude à se déformer au-delà de sa limite élastique.

Pour son appréciation, on utilise le coefficient de striction (Z): $\begin{cases} 0.1 \prec Z \prec 0.5 : \text{matériau semi fragile} \\ Z \succ 0.5 : \text{matériau ductile} \end{cases}$

Mais pour les calculs, on utilise le coefficient $\mu = \frac{X_m}{X_e} = \frac{\text{Déplacement maximal}}{\text{Déplacement élastique limite}}$

Exercice corrigé:

1) Montrer que σ_v peut s'écrire $\sigma_v = \sigma\,(1+\varepsilon)$

$V = S_0.L_0 = S_V.L = S_V\,(L_0 + \Delta L) \rightarrow S_V = S_0.L_0.\ 1/(L_0 + \Delta L)$

$\sigma_v = F/ S_v = F.\ (L_0 + \Delta L)/ S_0.L_0 = \sigma\,(1+ \Delta L/L) = \sigma\,(1+\varepsilon)$

2) Montrer que la déformation rationnelle $\varepsilon_v = \ln(1+\varepsilon)$

$$\varepsilon_v = \int_{L_0}^{L_u} \frac{dL}{L} = \ln L\Big|_{L_0}^{L_u} = \ln L_u - \ln L_0 = \ln\frac{L_u}{L_0} = \ln\frac{L_0 + \Delta L}{L_0} = \ln(1+\varepsilon)$$

3) Calculer le coefficient d'écrouissage (n) pour un acier doux dont l'allongement est égal à l'allongement plastique avant striction

$V = S_0.L_0 = S_V.L \rightarrow L_0/L = S_V/S_0$

$F = \sigma.S \rightarrow dF/F = d\sigma/\sigma + dS/S = 0 \rightarrow dS/S = -\,d\sigma/\sigma$

$\rightarrow \varepsilon_v = \ln(1+\varepsilon) = \ln L/ L_0 = \ln S_0/ S_V = -\ln S_V/S_0 \rightarrow d\varepsilon_v = -\,dS/S$

$dS/S = -\,d\varepsilon_v = -\,d\sigma/\sigma \rightarrow d\sigma/\sigma = d\varepsilon_v \rightarrow d\sigma / d\varepsilon_v = \sigma$ (début de striction, tangente de pente $d\sigma / d\varepsilon_v$)

$\sigma = K.\varepsilon_v^n \rightarrow d\sigma / d\varepsilon_v = n.K.\varepsilon_v^{n-1} = \sigma = k.\varepsilon_v^n \rightarrow n.\varepsilon_v^{n-1} = \varepsilon_v^n \rightarrow n = \frac{\varepsilon_v^n}{\varepsilon_v^{n-1}} = \varepsilon_v$

$\rightarrow n = \varepsilon_v$, ($\varepsilon_v$ est ici l'allongement avant striction).