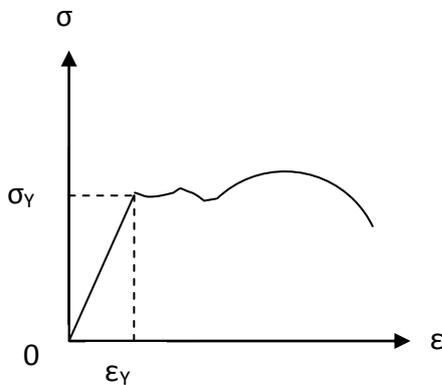


# Chapitre 3: Analyse élasto-plastique des structures

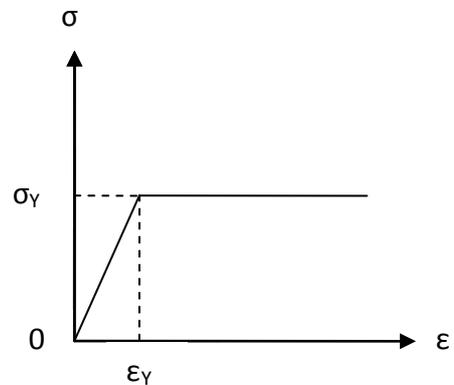
## I) Introduction

L'analyse élasto-plastique (incrémentale) consiste à étudier la structure chargée progressivement et déterminer l'apparition successive de la plasticité (rotules plastiques) en utilisant la courbe idéalisée de comportement et la loi correspondante. Toutefois, si on s'intéresse uniquement à déterminer la charge ultime de ruine, on étudie la structure en supposant que la plasticité est immédiatement atteinte c'est-à-dire en négligeant le comportement élastique qui n'a pas d'incidence sur l'évaluation de la capacité portante de la structure: c'est l'analyse plastique pure. Dans ce cas, on utilise les 'courbe et loi dérivée' correspondant à un matériau parfaitement plastique.

## II) Modèles de comportement des matériaux



Comportement réel (matériau ductile)



Comportement idéalisé (matériau EPP)

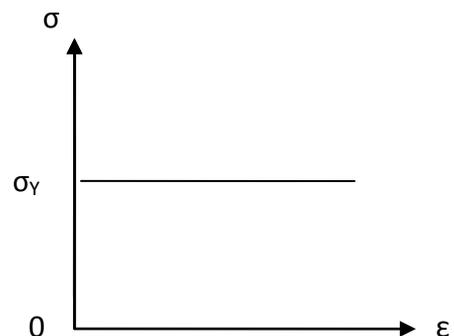
**N.B:** EPP : Elasto Plastique Parfait

$$\text{Pour la courbe idéalisée: } \sigma(\epsilon) = \begin{cases} E \cdot \epsilon & \text{si } 0 \leq \epsilon \leq \epsilon_Y (= \sigma_Y / E) \\ \sigma_Y & \text{si } \epsilon \geq \epsilon_Y \end{cases}$$

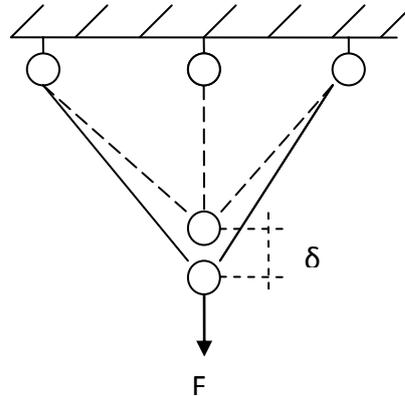
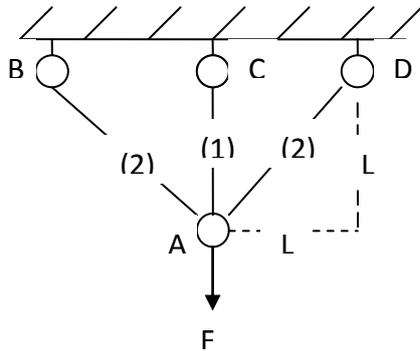
Matériau parfaitement plastique

$$E \rightarrow \infty$$

$$\text{et } \sigma(\epsilon) = \sigma_Y \text{ si } \epsilon > 0$$



### III) Exemple d'analyse en chargement uniaxial (traction, compression)



#### 1) Etude statique

a) Système hyperstatique de degré  $h = 1$

L'hyperstaticité est levée par les équations de compatibilité

$$\begin{cases} \delta_1 = \delta \\ \delta_2 = \delta \cdot \cos \pi/4 = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \delta \quad (\delta \text{ faible}) \end{cases}$$

b) Isolation du nœud (A):

$$2 \cdot N_2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + N_1 = F \rightarrow \boxed{N_1 + \sqrt{2} \cdot N_2 = F}$$

c) Contrainte et déplacement

$$\begin{cases} \delta = \frac{N}{S} \rightarrow \sigma_1 = \frac{N_1}{S} \text{ et } \sigma_2 = \frac{N_2}{S} \text{ car } (S_1 = S_2 = S) \\ \varepsilon = \frac{\Delta L}{L} \rightarrow \varepsilon_1 = \frac{\delta}{L} \text{ et } \varepsilon_2 = \frac{\delta}{2L} \text{ car } (\delta_1 = \delta, \delta_2 = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \delta \text{ et } L_2 = \sqrt{2} \cdot L) \end{cases}$$

#### 2) Analyse élasto-plastique

Chargement progressif et modèle de comportement EPP

2-1) Comportement purement élastique (pour toutes les barres):

$$\varepsilon \leq \varepsilon_Y \text{ et } \sigma = E \cdot \varepsilon$$

$$\begin{cases} \varepsilon_1 = \frac{\delta_1}{L_1} = \frac{\delta}{L} \leq \varepsilon_Y \text{ (ou } \frac{\sigma_Y}{E} \rightarrow \frac{\delta}{L} \leq \frac{\sigma_Y}{E} \\ \varepsilon_2 = \frac{\delta_2}{L_2} = \frac{\delta}{2L} \leq \varepsilon_Y \rightarrow \frac{\delta}{2L} \leq \frac{\sigma_Y}{E} \end{cases}$$

$$\text{Or: } F = N_1 + \sqrt{2} \cdot N_2 = S \cdot \sigma_1 + \sqrt{2} \cdot S \cdot \sigma_2 = S \cdot (\sigma_1 + \sqrt{2} \cdot \sigma_2)$$

$$\rightarrow F(\delta) = S.(E.\varepsilon_1 + \sqrt{2}.E.\varepsilon_2) = S.E.(\frac{\delta_1}{L_1} + \sqrt{2}\frac{\delta_2}{L_2})$$

$$\rightarrow F(\delta) = \frac{SE}{L}(1 + \frac{\sqrt{2}}{2}).\delta \quad (\text{car } \delta_1 = \delta \text{ et } \delta_2 = \frac{\sqrt{2}}{2}.\delta)$$

$$F_{\max} \Leftrightarrow \delta_{\max} = \varepsilon_Y = \frac{\sigma_Y}{E} = \frac{\delta}{L} \rightarrow \delta = \frac{L.\sigma_Y}{E}$$

$$\rightarrow \boxed{F_Y = S.\sigma_Y.(1 + \frac{\sqrt{2}}{2})}$$

La barre '1' (AC) est la 1<sup>ère</sup> à atteindre la limite d'élasticité ou début de plasticité car  $\varepsilon_1 > \varepsilon_2$ .

$$\text{Pour les 2 autres barres: } \delta = \frac{2.L.\sigma_Y}{E} \rightarrow F_Y = 2.S.\sigma_Y.(1 + \frac{\sqrt{2}}{2})$$

2-2) Comportement mixte (élastique pour les barres (2) et plastique pour la barre 1)

Au-delà de la limite élastique ( $\sigma_Y, \frac{L.\sigma_Y}{E}$ ), la barre (1) a déjà atteint la limite d'écoulement et se serait allongée indéfiniment si elle était seule. Mais à ce stade, les 2 autres barres ne sont qu'à la moitié de la déformation limite subie par la barre (1).

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Barre (1) plastifiée : } \varepsilon_1 \geq \varepsilon_Y \rightarrow \frac{\delta}{L} \geq \frac{\sigma_Y}{E} \\ \text{Barre (2) élastique : } \varepsilon_2 \leq \varepsilon_Y \rightarrow \frac{\delta}{2L} \leq \frac{\sigma_Y}{E} \rightarrow \frac{\delta}{L} \leq 2.\varepsilon_Y \text{ ou } 2.\frac{\sigma_Y}{E} \end{array} \right.$$

$$\text{Donc, pour toutes les barres on a: } \frac{\sigma_Y}{E} \leq \frac{\delta}{L} \leq \frac{2.\sigma_Y}{E} \text{ ou: } \boxed{\frac{L.\sigma_Y}{E} \leq \delta \leq \frac{2.L.\sigma_Y}{E}}$$

$$\text{Or, } F = N_1 + \sqrt{2}.N_2 = S.\sigma_1 + \sqrt{2}.S.\sigma_2 = S.(\sigma_1 + \sqrt{2}.\sigma_2)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma_1 = \sigma_Y \text{ (barre (1) plastifiée) : } \varepsilon_1 \geq \varepsilon_Y \rightarrow \frac{\delta}{L} \geq \frac{\sigma_Y}{E} \\ \sigma_2 = E.\varepsilon_2 = E.\frac{\delta_2}{L_2} = E.\frac{\delta}{2.L} \end{array} \right\} \rightarrow F(\delta) = S.(\sigma_Y + \sqrt{2}.E.\frac{\delta}{2.L})$$

$$\text{Donc pour } \frac{L.\sigma_Y}{E} \leq \delta \leq \frac{2.L.\sigma_Y}{E}, \text{ on a: } \boxed{F(\delta) = S.\sigma_Y + \sqrt{2}.E.S.\frac{\delta}{2.L}}$$

$$F_{\max} \Leftrightarrow \delta = \frac{2.L.\sigma_Y}{E} \rightarrow F_L = S.\sigma_Y + \sqrt{2}.E.S.\frac{2.L.\sigma_Y}{2.L}$$

$$\text{C'est-à-dire: } \boxed{F_L = S.\sigma_Y.(1 + \sqrt{2})}$$

2-3) Comportement au-delà du domaine mixte

$$\delta \geq \frac{2.L.\sigma_Y}{E} \text{ ou } \frac{\delta}{L} \geq \frac{2.\sigma_Y}{E}$$

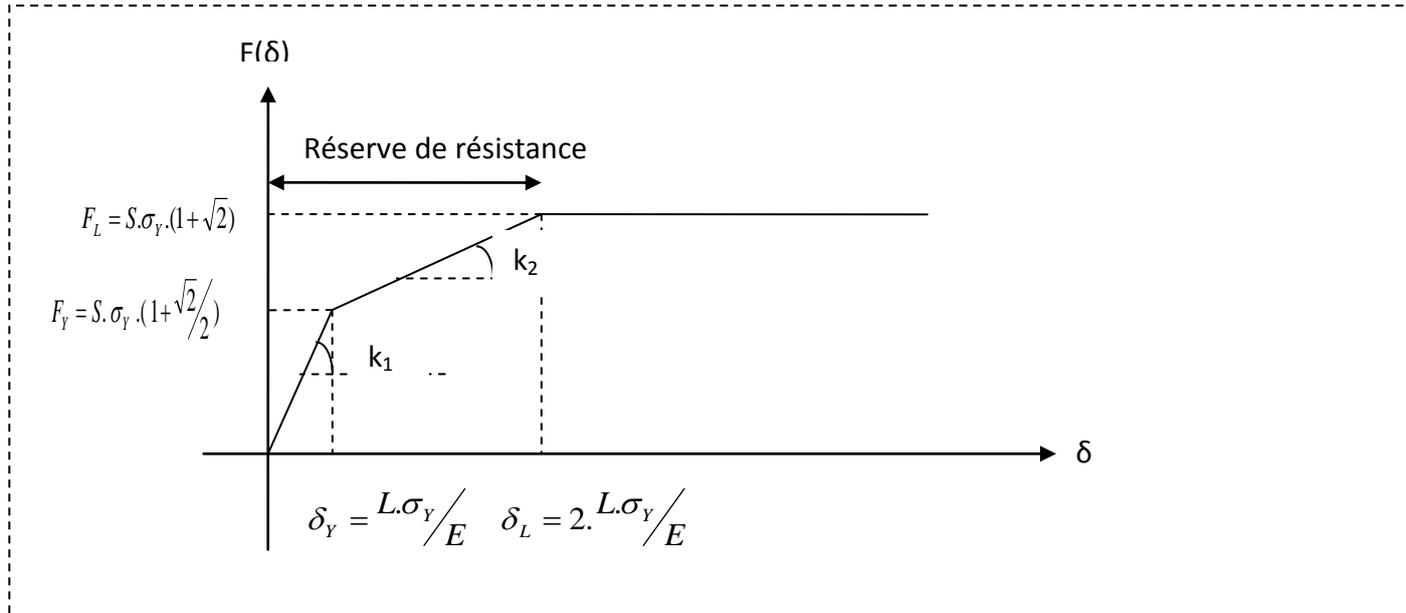
Au-delà de cette limite, toutes les barres ont plastifié, c'est-à-dire:  $\sigma_1 = \sigma_Y$  et  $\sigma_2 = \sigma_Y$

Or,  $F = S.(\sigma_1 + \sqrt{2}.\sigma_2) \rightarrow F(\delta) = S(\sigma_Y + \sqrt{2}.\sigma_Y)$

C'est-à-dire:  $F(\delta) = S.\sigma_Y.(1 + \sqrt{2})$

2-4) Bilan

Si on trace la courbe  $F(\delta)$  pour les 3 domaines (élastique pur, mixte et plastique pur), on obtient:



Domaine	$0 \leq \delta \leq \delta_Y$	$\delta_Y \leq \delta \leq \delta_L$	$\delta \geq \delta_L$
Comportement des barres	Toutes les barres ont un comportement élastique avec une rigidité $k_1$ .	Barre 1: comportement plastique Barres 2: comportement élastique	Toutes les barres sont plastifiées. $F$ est constante et $\delta$ croît indéfiniment: $\delta \rightarrow \infty$ La rigidité $k (= F/ \delta)$ $k \rightarrow 0$ La ruine se produit.

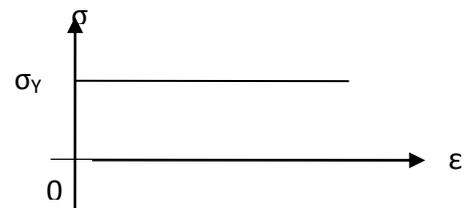
En pratique, si on impose une force:

$$\begin{cases} F \leq F_Y & : \text{comportement élastique de la structure} \\ F_Y \leq F \leq F_L & : \text{structure plastifiée en partie mais pouvant résister} \\ F \geq F_L & : \text{ruine de la structure} \end{cases}$$

### 3) Analyse plastique pure

Si on néglige la phase élastique (on suppose la plastification immédiatement atteinte) c'est-à-dire que le matériau est parfaitement plastique ( $E \infty$ ), on a:

$$\sigma(\varepsilon) = \sigma_Y \text{ si } \varepsilon > 0$$



Quelle est la force limite  $F_L$  ?

$$F = N_1 + \sqrt{2}.N_2 = S.(\sigma_1 + \sqrt{2}.\sigma_2) = S.(\sigma_Y + \sqrt{2}.\sigma_Y)$$

$$F(\delta) = S.\sigma_Y(1 + \sqrt{2})$$

→  $F_L = S.\sigma_Y(1 + \sqrt{2})$ . On retrouve le résultat précédent de  $F_L$ .

### 4) Comparaison entre l'analyse élastoplastique et l'analyse plastique pure

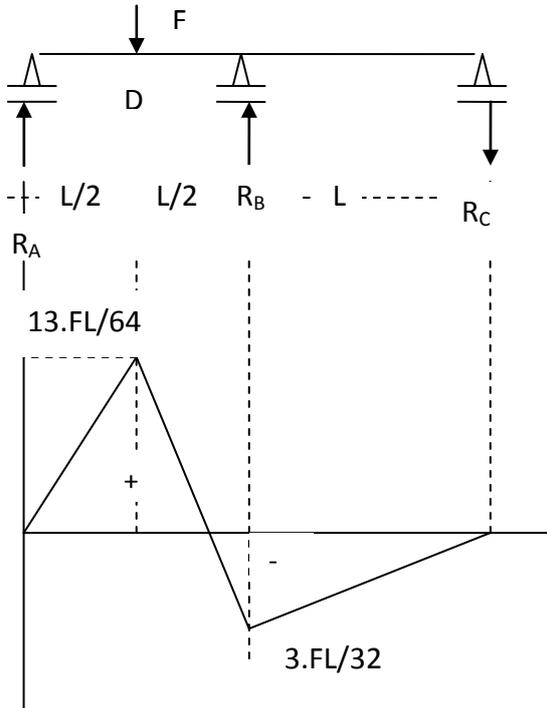
A la limite du comportement élastique,  $F = \begin{cases} F_Y & : \text{analyse élastoplastique} \\ F_L & : \text{analyse plastique} \end{cases}$

$$\frac{F_L}{F_Y} = \frac{(1 + \sqrt{2}).S.\sigma_Y}{(1 + \sqrt{2}/2).S.\sigma_Y} = \sqrt{2} \cong 1.414 \rightarrow F_L = 1.414.F_Y = F_Y + 0.41.F_Y.$$

A la limite du comportement élastique, la structure dispose de 41 % de réserve de sécurité avant la ruine.

Donc si on néglige la phase élastique, on a un calcul plus simple mais moins économique.

## IV) Exemple d'analyse en flexion simple



1) Système hyperstatique de degré 1  
(poutre continue sur 3 appuis simples)

2) Calcul des réactions d'appui

La méthode des 3 moments par ex nous donne:

$$R_A = 13.F/32, R_B = 122.F/32 \text{ et } R_C = 13.F/32$$

Vérification:  $R_A + R_B - R_C = F$ .

3) Diagramme des moments fléchissants

$$M_A = 0 = M_C, M_B = 3FL/32 \text{ et } M_D = 13FL/64$$

$$M_D > M_B \quad (13/64 = 0.2 \text{ et } 3/32 = 0.09)$$

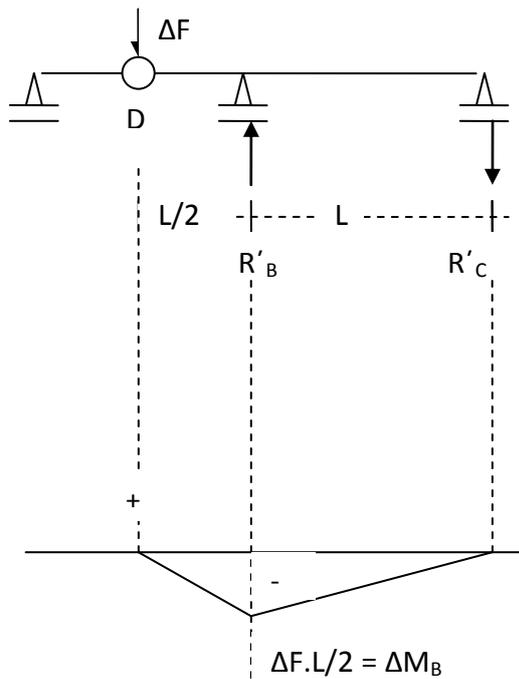
Donc la 1<sup>ère</sup> plastification apparaît en D

### 1) Analyse élastoplastique:

On augmente F jusqu'à ce que la section D plastifie  $\Rightarrow M_L = 13.F.L/64 \rightarrow F_1 = 64.M_L/13L (\approx 5M_L/L)$

Pour cette charge, le moment fléchissant en B est:  $M_{B1} = - 3.F_1.L/32 = - 6.M_L/13$

On augmente  $F_1$  de  $\Delta F \Rightarrow$  Etude isostatique avec rotule en D.



1) Système isostatique

2) Ecriture des équations d'équilibre:

$$\rightarrow R'_C = \Delta F/2 \text{ et } R'_B = 3\Delta F/2$$

Vérification:  $R'_B - R'_C = \Delta F$ .

3) On constate que la section B plastifie pour:

$$M_L = M_{B1} + \Delta M_B = 6.M_L/13 + \Delta F.L/2$$

$$\Rightarrow \Delta F = 14M_L/13L$$

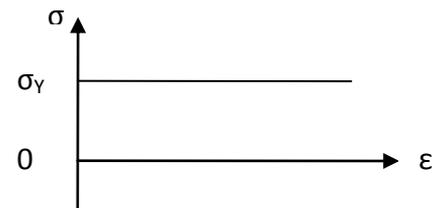
Donc, la charge d'effondrement de toute la structure

(D et B plastifiées toutes les 2) est:

$$F_L = F_1 + \Delta F = 6M_L/L$$

## 2) Analyse plastique pure:

$\sigma = \sigma_Y$  pour toutes les barres,



$$M_L = 3F_1.L/32 \rightarrow F_L = 32M_L/3L \approx 10.67M_L/L, (M_L = 2.\sigma_e .I/h)$$

**Comparaison entre l'analyse élastoplastique et l'analyse plastique:**

$$\frac{F_L \text{ analyse plastique}}{F_L \text{ analyse élastoplastique}} = \frac{10.67.M_L/L}{6.M_L/L} \approx 1.79$$

## V) Méthode "Push-over"

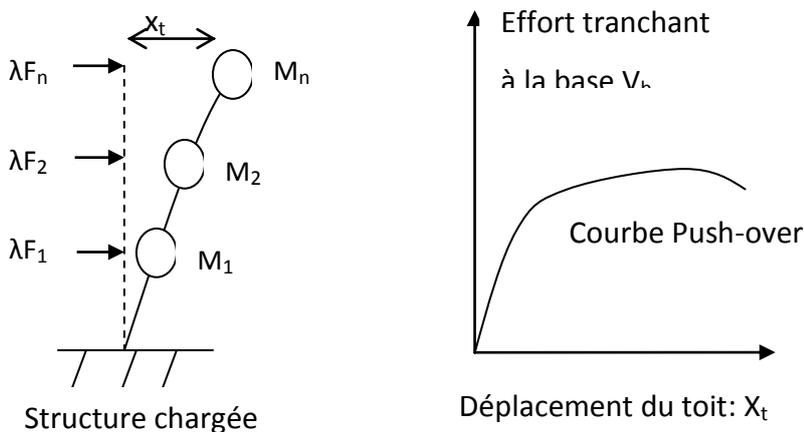
### V-1) Introduction:

L'analyse élasto-plastique constitue l'idée fondamentale de la méthode dite "Push-over" que nous présentons ici et qui est largement utilisée surtout dans la "conception en performance" récemment introduite en génie parasismique pour l'évaluation des structures.

### V-2) Définition:

La méthode "Push-over" (littéralement poussée progressive jusqu'à la rupture) est une méthode statique non linéaire. Elle consiste à appliquer à la structure des charges latérales suivant un certain modèle en augmentant l'intensité des charges jusqu'à ce que les modes de ruine commencent à apparaître dans la structure.

Les résultats de cette analyse sont représentés sous forme de courbe qui relie l'effort tranchant à la base au déplacement du sommet de la structure (figure suivante).



### Méthode Push-over

Une fois la courbe "push-over" obtenue, on cherche à la transformer en "courbe de capacité" équivalente reliant l'accélération d'une structure à un degré de liberté à son déplacement. Cette courbe de capacité est ensuite comparée à la courbe de "demande sismique" sur un même format pour en déduire le "point de performance". L'analyse statique push-over est basée sur l'hypothèse que la réponse de la structure peut être assimilée à celle d'un système à un degré de liberté équivalent, ce qui implique que la réponse est contrôlée par un seul mode de vibration constant.