

## Troisième série: Analyse élasto-plastique

### Exo 1:

Soit la poutre AB, de section rectangulaire encastée à droite et simplement appuyée à gauche:

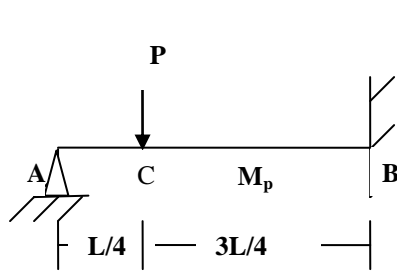


Schéma statique

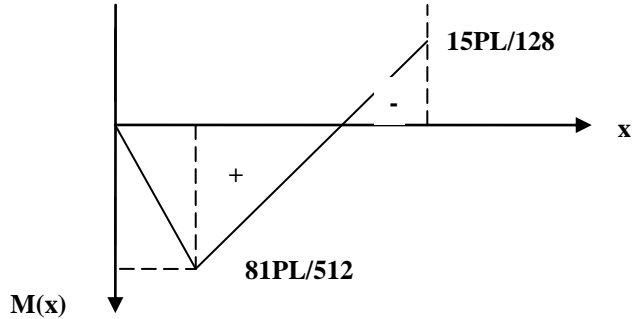
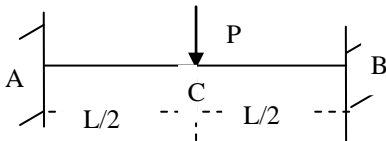


Diagramme des moments

- 1) Déterminer - par l'analyse élasto-plastique- la charge de ruine  $P_L$  de toute la structure
- 2) Retrouver ce résultat par la méthode cinématique

### Exo 2:

Mêmes questions que précédemment pour la poutre suivante:



$$\begin{aligned} R_A &= R_B = P/2 ; \\ M_A &= M_B = -PL/8 \\ M_C &= PL/8 \end{aligned}$$

### Exo 3:

Mêmes questions que précédemment pour la poutre suivante:

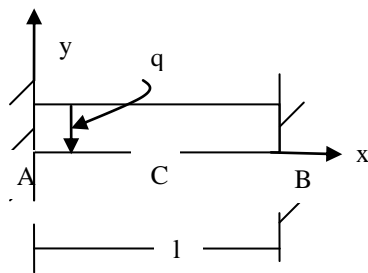
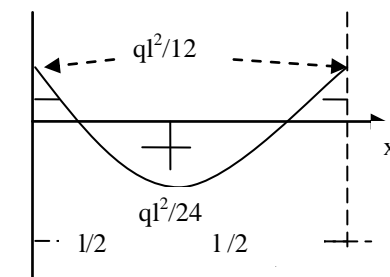


Schéma statique



M(x) Diagramme des moments

## Solutions

### Exo 1:

Il y a 2 sections potentiellement critiques: B et C

Le moment max ( $81PL/512$ ) se trouve au niveau de la section C. Donc, elle sera la première à plastifier

1) Détermination de la charge de ruine par l'analyse élasto-plastique:

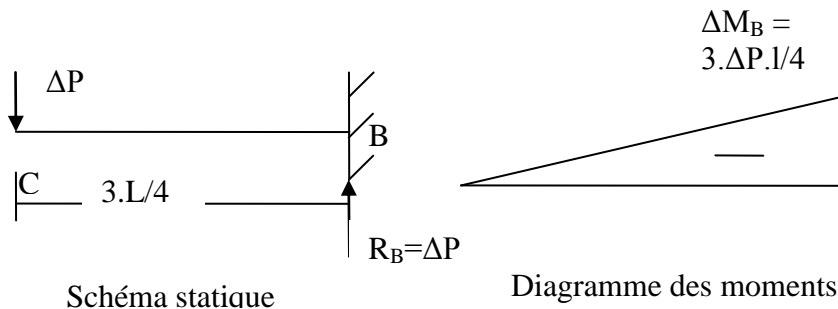
a) On augmente la charge P jusqu'à plastification entière de C.

Alors,  $M_L = 81PL/512 \implies P_{L1} = 512 \cdot M_L / 81L$

Pour cette charge  $P_{L1}$ , le moment fléchissant en B est:

$$M_B = 15 \cdot P_{L1} \cdot L / 128 = 60 \cdot M_L / 81$$

b) On augmente  $P_{L1}$  de  $\Delta P$ , ce qui rend l'étude isostatique:

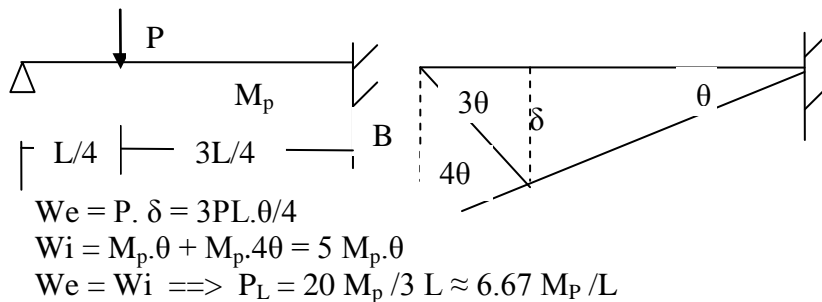


B plastifie à  $M_B + \Delta M_B = M_L$  (ou  $M_p$ ). Alors,  $60M_L/81 + 3L\Delta P/4 = M_L$   
 $\implies \Delta P = 28 \cdot M_L / 81L$

D'où, la charge de ruine de toute la structure (A, B et C plastifiées):

$$P_L = P_{L1} + \Delta P = 540 M_L / 81L = 20 M_L / 3 L \approx 6.67 M_L / L = 6.67 M_p / L$$

2) Détermination de la charge de ruine par la méthode cinématique:



$$W_e = P \cdot \delta = 3PL \cdot \theta / 4$$

$$W_i = M_p \cdot \theta + M_p \cdot 4\theta = 5 M_p \cdot \theta$$

$$W_e = W_i \implies P_L = 20 M_p / 3 L \approx 6.67 M_p / L$$

### Exo 2:

Le système a 3 sections potentiellement critiques: A, B et C.

Le moment max ( $Pl/8$ ) se trouve au niveau des 3 sections. Donc, elles plastifieront toutes en même temps.

1) Détermination de la charge de ruine par l'analyse élasto-plastique:

On augmente la charge P jusqu'à plastification des 3 sections.

Alors,  $M_L = PL/8 \implies P_L = 8 \cdot M_L / L = 8 \cdot M_p / L$

2) Détermination de la charge de ruine par la méthode cinématique:

$$W_e = P \cdot \delta = PL \cdot \theta / 2$$

$$W_i = M_p \cdot \theta + M_p \cdot (2\theta) + M_p \cdot \theta = 4 M_p \cdot \theta$$

$$W_e = W_i \implies P_L = 8 M_p / L$$

### Exo 3:

Il y a 3 sections potentiellement critiques: A, B et C.

D'autre part, on constate que le moment max ( $ql^2/12$ ) se trouve au niveau des sections A et B.

Par conséquent, elles seront les premières à plastifier

1) Détermination de la charge de ruine par l'analyse élasto-plastique:

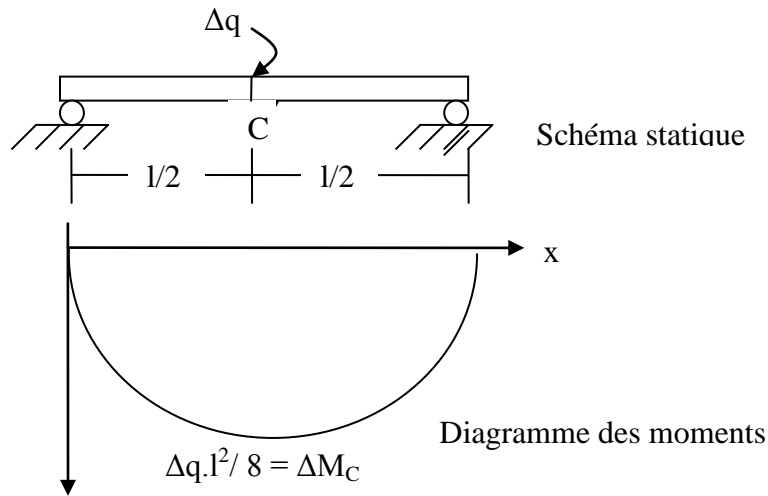
On augmente la charge P jusqu'à plastification entière de A et B.

Alors,  $M_L = ql^2/12 \implies q_1 = 12 \cdot M_L / l^2$

Pour cette charge  $q_1$ , le moment fléchissant en C est:

$M_C = q_1 \cdot l^2 / 24 = M_L / 2$ .

On augmente  $q_1$  de  $\Delta q$ , ce qui rend l'étude isostatique (avec 2 rotules en A et B):



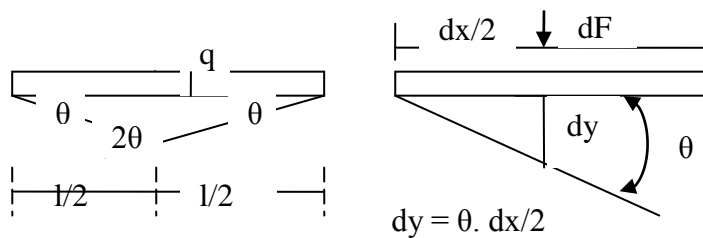
C plastifie à  $M_C + \Delta M_C = M_L$ . Alors,  $M_L / 2 + \Delta q \cdot l^2 / 8 = M_L$

$\implies \Delta q \cdot l^2 / 8 = M_L / 2 \implies \Delta q = 4 \cdot M_L / l^2$ .

Donc, la charge de ruine de toute la structure est:

$q_L = q_1 + \Delta q = 12 \cdot M_L / l^2 + 4 \cdot M_L / l^2 = 16 M_L / l^2 = 16 M_p / l^2$

2) Détermination de la charge de ruine par la méthode cinématique:



$$W_e = \iint dF \cdot dy = 2 \cdot \iint_{l/2} q \cdot dx \cdot dy = \frac{q \cdot l^2 \cdot \theta}{4}$$

Ou bien  $W_e = F_1 \cdot \delta_1 + F_2 \cdot \delta_2$

$$W_e = (q \cdot l/2) \cdot (l \cdot \theta/4) + (q \cdot l/2) \cdot (l \cdot \theta/4) = q l^2 \cdot \theta / 4$$

$$W_i = M_p \cdot \theta + M_p \cdot 2\theta + M_p \cdot \theta = 4 M_p \cdot \theta$$

$$W_e = W_i \implies q_L = 16 M_p / l^2$$

