République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
Université Mohamed BOUDIAF - M'sila

Faculté de Technologie
Département de Génie Electrique

MODULE *: TP Traitement numérique du signal & TP Modélisation et identification des systèmes*

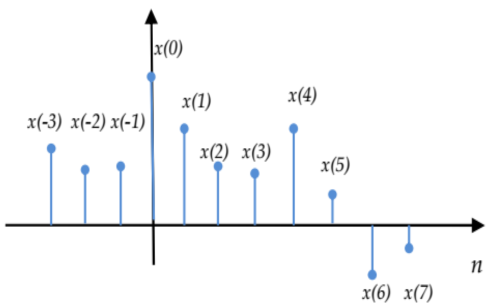
ANNEE D'ETUDE : *1^er^ Année Master Robotique*

ENSEIGNANT : *Dr. HERIZI Abdelghafour*

TP 2 : Représentation des systèmes et signaux (convolution, corrélation et génération du bruit)

Rappels :

Un signal discret s(n) est une suite de N échantillons régulièrement espacés de Te secondes: $x(0), x(T_e), x(2T_e), \dots, x((N-1)T_e)$ où $F_e = 1/T_e$ est la fréquence d'échantillonnage. Le tracé graphique d'un signal discrétisé en temps peut s'effectuer simplement à l'aide de la fonction **stem** sous matlab.



- L'énergie d'un signal $x(n)$ est fournie sous matlab par **sum(x.^2)**. Concernant la puissance moyenne, il faut diviser l'énergie par le nombre d'éléments de **x(n)**.
- Pour la corrélation et la convolution, on utilisera, respectivement, les fonctions **xcorr** et **conv**. A noter que la convolution ou la corrélation de x et h de durée respective N et M est un signal $y(n)$ de durée (N+M-1)
- La fonction **b=m+s*randn(N,1)** permet de générer un vecteur bruit b de distribution pseudo normale (Gaussienne) de taille N de moyenne m et de variance s^2 dont la puissance est $P_s = m^2 + s^2$.

I. Objectif du TP :

- Etude des systèmes linéaires et invariants/temps.
- Ecrire l'algorithme de la fonction conv
- Ecrire l'algorithme de la fonction xcorr
- Génération des variables aléatoire et calcul des moments

II. Systèmes linéaires invariants/temps :

Un système est défini mathématiquement comme étant un operateur (une transformation) qui agit sur une entrée $E(x(n))$ pour produit une sortie $S(y(n))$.

$$x(n) \longrightarrow \boxed{h(n)} \longrightarrow y(n)$$

II.1 Relation entrée/sortie :

On définit la réponse impulsionnelle d'un système LIT comme étant la sortie obtenue quand on attaque le système par une impulsion :

$$\delta(n) = \begin{cases} 1 & n = 0 \\ 0 & n \neq 0 \end{cases} \tag{1}$$

E	S
$\delta(n)$	$h(n-m)$
$x(m)\delta(n-m)$	$x(m)h(n-m)$
$\sum_m x(m)\delta(n-m)$	$\sum_m x(m)h(n-m)$
$x(n) * \delta(n)$	$x(n) * h(n)$
$x(n)$	$y(n)$

III. Produit de convolution :

Le produit de convolution est définit par :

$$x(m) * h(n-m) = \sum x(m)h(n-m) \tag{2}$$

Alors :

$$y(n) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} x(m)h(n-m) \tag{3}$$

$h(n)$: réponse impulsionnelle.

En procédant par un changement de variable :

$$y(n) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} h(m)x(n-m) \tag{4}$$

$h(n)$ caractérise entièrement le système.

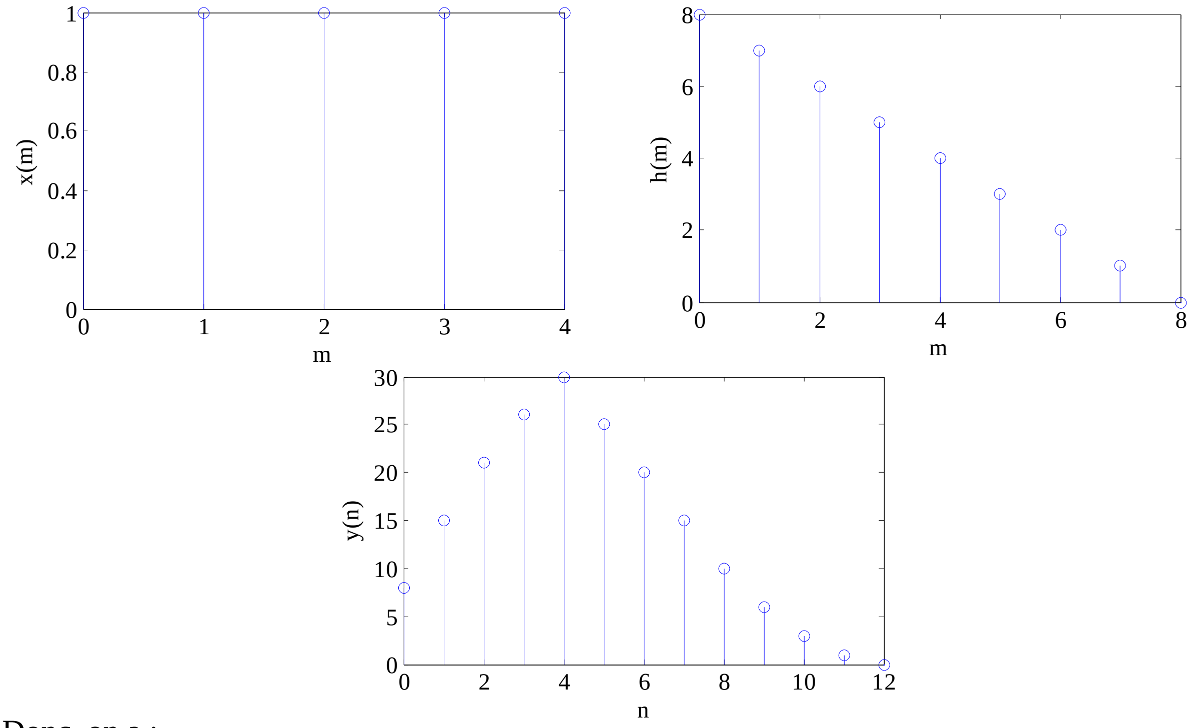
III.1 Exemple :

Soit les deux séquences suivantes :

$$x(m) = \begin{cases} 1 & m = 0,1,2,3,4 \\ 0 & ailleurs \end{cases}$$

$$h(m) = \begin{cases} 8-m & m = 0,1,2,3,4,5,6,7,8 \\ 0 & ailleurs \end{cases}$$

$y(n) = \sum x(m)h(n-m)$



Donc, on a :

$y(1) = \sum x(m)h(n-m) = 8 + 7 = 15$
$y(1) = 8 + 7 + 6 = 21$

A retenir, pour calculer $y(n)$, il faut :

- Rabattre $h(n)$
- Translater $h(-n)$
- Accumuler les produits $x(m)h(n-m)$ pour chaque n

La longueur de la séquence = longueur de $x(n)$ plus la longueur de la séquence $h(n)$ moins 1. C'est-à-dire :

$L_y = L_x + L_h - 1$

Pour le cas continu :

$$y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau \quad (5)$$

IV. Fonctions de corrélation :

Les fonctions de corrélation caractérisent de degré de dépendance entre les variables aléatoires.

IV.1 Fonction d'autocorrélation :

On définit la fonction d'autocorrélation par :

$$R_{xx}(T) = \int x(t)x(t+T)dt \quad (6)$$

Si $T = 0$:

$R_{xx}(0) = \int |x(t)|^2 dt$

Si $x(t)$ réel : R est aussi réelle et paire.

On montre que la fonction R est max à l'origine.

Pour des signaux discrets :

$$R_{xx}(m) = \sum_n x(n)x(n+m) \tag{7}$$

IV.2 Fonction d'inter-corrélation :

Pour deux signaux continus $x(t)$ et $y(t)$, le produit de corrélation est décrit par :

$$R_{xy}(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)y(t+\tau)dt \tag{8}$$

Cas des signaux discrets :

$$R_{xy}(m) = \sum_n x(n)y(n+m) \tag{9}$$

L'inter-corrélation est liée à la convolution par la relation :

$$R_{xy}(n) = x(-n) * y(n) \tag{10}$$

V. Variables aléatoires :

Etant donner un signal aléatoire x qui est caractérisé par une fonction densité de probabilité (fdp) $f(x)$, on peut déduire sa valeur aléatoire et sa variance comme suit :

En continu :

$$E(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx \tag{11}$$

$$\sigma^2 = E(x^2) - (E(x))^2 \tag{12}$$

En discret :

$$E(x) = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i \tag{13}$$

$$E(x^2) = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i^2 \tag{14}$$

Où :

$x_i, i = 1,2,\dots,N$ sont des observations (variables aléatoires) indépendantes qui suivent la même fonction densité de probabilité.

On peut écrire que la fdp de la somme des variables aléatoires $Q = \sum_{i=1}^{N} x_i$ est le produit de convolution des fdps de chaque variable aléatoire, alors :

$$f(Q) = f(x_1) * f(x_2) * \dots * f(x_N) \tag{15}$$

Si nous n'avons pas des mesures réelles, on peut générer des variables aléatoires via des fonctions MATLAB (random, rand, rnd).

Exemples à tester avant le TP

1. Le programme suivant permet de générer un Dirac en 0 : δ(n)=1 pour n=0 et vaut 0 ailleurs

```
clc ; clear all ; close all ;
t=-10:10;
x=[zeros(1,10),1,zeros(1,10)];
stem(t,x);
axis([-10 10 -0.5 1.5]);
title('Dirac');
xlabel('n');ylabel('Amplitude');
```

2. Le programme suivant permet de générer un échelon U(n)=1 pour n≥0 et 0 pour n<0

```
clc ; clear all ; close all ;
t=-20:20;
x=[zeros(1,20),ones(1,21)];
stem(t,x);
title('Echelon unite');
xlabel('n');ylabel('Amplitude');
```

VI. Manipulations :

VI.1 Manipulation 1 :

Soit :

$x(t) = \sin(t)$

$h(t) = \exp(-t)$

- Ecrire l'algorithme de convolution pour calculer $y(t)$, $y = x * h$. Soit :

$x = [0\ 0\ 0\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 0\ 0\ 0];\ L_x = 11$

$y = [0\ 0\ 4\ 3\ 2\ 1\ 0\ 0\ 0];\ L_y = 9$

- Calculer $Z = x * y$.
- Donner l'interprétation géométrique.

Soit :

$h = [1\ 7];\ L_h = 2$

$y = [2\ 17\ 26\ 35];\ L_y = 4$

Tel que : $y = x * h$.

- Déduire x.

VI.2 Manipulation 2 :

Soit :

$x(t) = \exp(-t)$

$y(t) = \exp(-4t)$

- Calculer la fonction d'inter-corrélation R_{xy}.

VI.3 Manipulation 3 :

Soit les mesures x_i suivent la loi de gauss donnée par :

$f(x_i) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} \exp\left(\frac{(x_i-\mu)^2}{2\sigma^2}\right)$, avec : $\mu = 0$ et $\sigma = 1$

- Calculer la fdp de $Q = f(x) * f(x)$.
- Générer N valeurs aléatoire (N=100, N=1000, N=10000).
- Déduire pour chaque valeur de N (N=100, N=1000, N=10000)

  $E(x) = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i$, $E(x^2) = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i^2$ et $\sigma^2 = E(x^2) - (E(x))^2$

- Constater.