Université Mohamed Boudiaf – M'sila

Faculté de Technologie

LICENCE
ENERGIES RENOUVELABLES ET ENVIRONNEMENT

Première Année, S1

ELECTRICITE

(1h30 cours, 1h30 TD, 1h30 TP)

H. Latelli, Faculté de Technologie,
Université Mohamed Boudiaf – M'sila

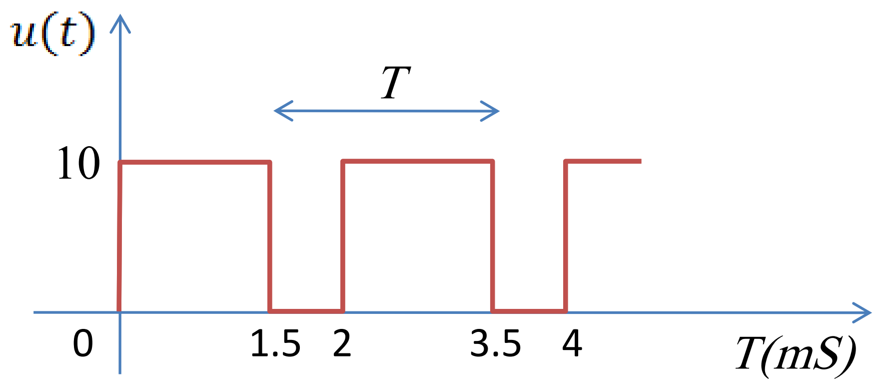
Chapitre II : Régime sinusoïdal

1. Notions de base : les grandeurs périodiques
2. Représentation des grandeurs sinusoïdales
3. Dipôles passifs linéaires en régime sinusoïdale
4. Puissance dissipée dans les dipôles passifs
5. Adaptation d’impédance en puissance
6. Résonance

1. Notions de base : les grandeurs périodiques

a) Période

Un signal périodique est caractérisé par sa période T :



$T = 2$ ms

b) Fréquence

La fréquence f (en hertz) correspond au nombre de périodes par unité de temps :

$$\boxed{f = \frac{1}{T}}$$

Pour $T = 2$ mS, $f = 500$ Hz (500 périodes par seconde).

c) Pulsation

La pulsation est définie par :

$$\boxed{\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T}}$$

$[\omega]$ = radians par seconde : rad/s

Pour $T = 2$ ms, $\omega = 3140$ rad/s.

d) Valeur moyenne

La valeur moyenne dans le temps de la tension $u(t)$ est notée $<u(t)>$:

$$\boxed{< u(t) >= U_m = \frac{1}{T}\int_0^T u(t)\,dt}$$

Pour le signal ci-dessus :

$$< u(t) >= \frac{1}{2}\int_0^2 10\,dt = \frac{1}{2}\left[\int_0^{1.5} 10\,dt + \int_{1.5}^2 0\,dt\right]$$

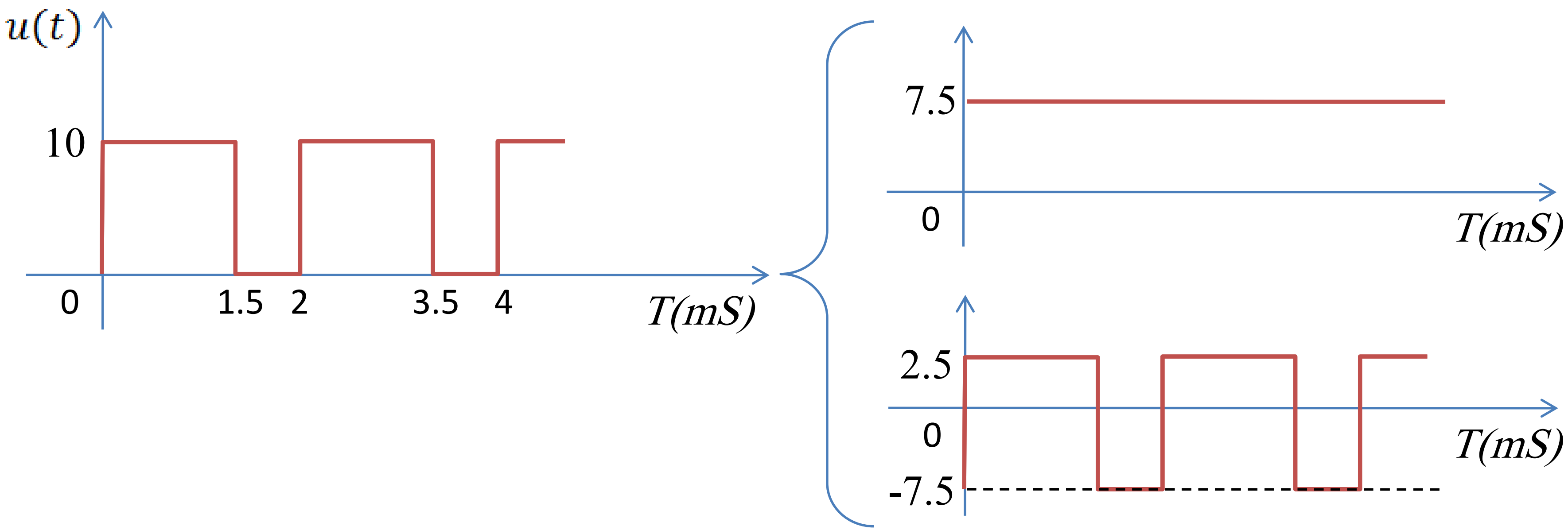
$$< u(t) >= 5[t]_0^{1.5}$$

$$< u(t) >= 7.5\,V$$

Une grandeur périodique a deux composantes :

- une composante continue DC : c'est la valeur moyenne $<u(t)>$,
- une composante alternative AC :

$$\boxed{u(t) = < u(t) > + u_{AC}(t)}$$



Remarque : la composante alternative a une valeur moyenne nulle :

$$< u_{AC}(t) > = 0$$

e) Valeur efficace RMS (Root Mean Square)

la valeur efficace U_{eff} de la tension u (t) est définie par :

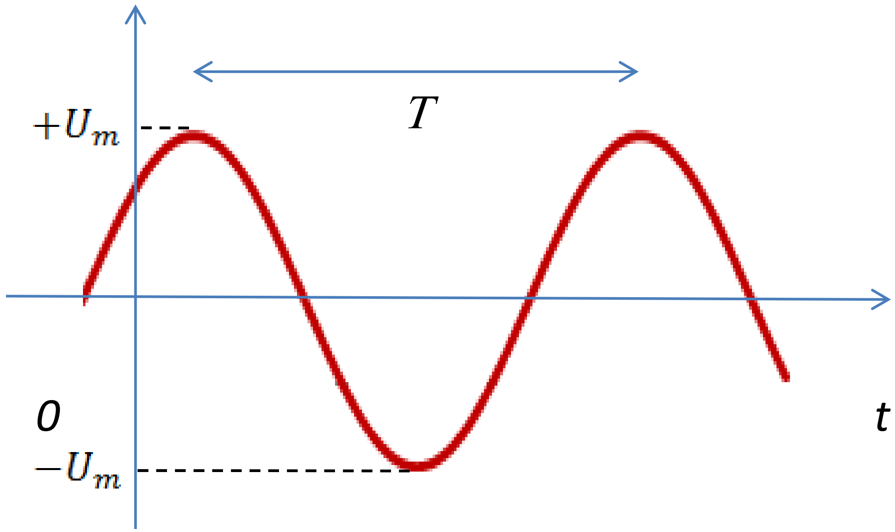
$$\boxed{U_{eff} = \sqrt{< u^2(t) >} = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T u^2(t)\,dt}}$$

$$< u^2(t) > = \frac{1}{2}\int_0^2 10^2\,dt = \frac{1}{2}\left[\int_0^{1.5} 10^2\,dt + \int_{1.5}^2 0\,dt\right]$$

$$< u^2(t) > = 50[t]_0^{1.5} = 75$$

$$U_{eff} = \sqrt{75} = 8.66\,V$$

Cas particulier des grandeurs sinusoïdales alternatives :



$$u(t) = U_m \sin(\omega t + \varphi_v)$$

U_m désigne la tension maximale ou tension crête. On montre facilement que :

$$\boxed{U_{eff} = \frac{U_m}{\sqrt{2}}}$$

Exemple : SONELGAZ fournit une tension sinusoïdale alternative avec une fréquence 50 Hz et de valeur efficace 220 V.

2. Représentation des grandeurs sinusoïdales

a) Définition

Soit un courant sinusoïdale défini par :

$$i(t) = I_m \sin(\omega t + \varphi_i) = I_{eff}\sqrt{2}\,\sin(\omega t + \varphi_i)$$

$i(t)$: sa valeur instantanée,
I_m : sa valeur maximum (amplitude),
ω : sa pulsation,
φ_i : sa phase à l'origine.

b) Représentation de Fresnel

C'est une représentation vectorielle des grandeurs sinusoïdales. Le vecteur de Fresnel associé au courant *i* (t) est défini de la façon suivante :

$$\boxed{\begin{cases} \|\vec{I}\| = I_{eff} \\ (Ox, \vec{I}) = \varphi_i \end{cases}}$$

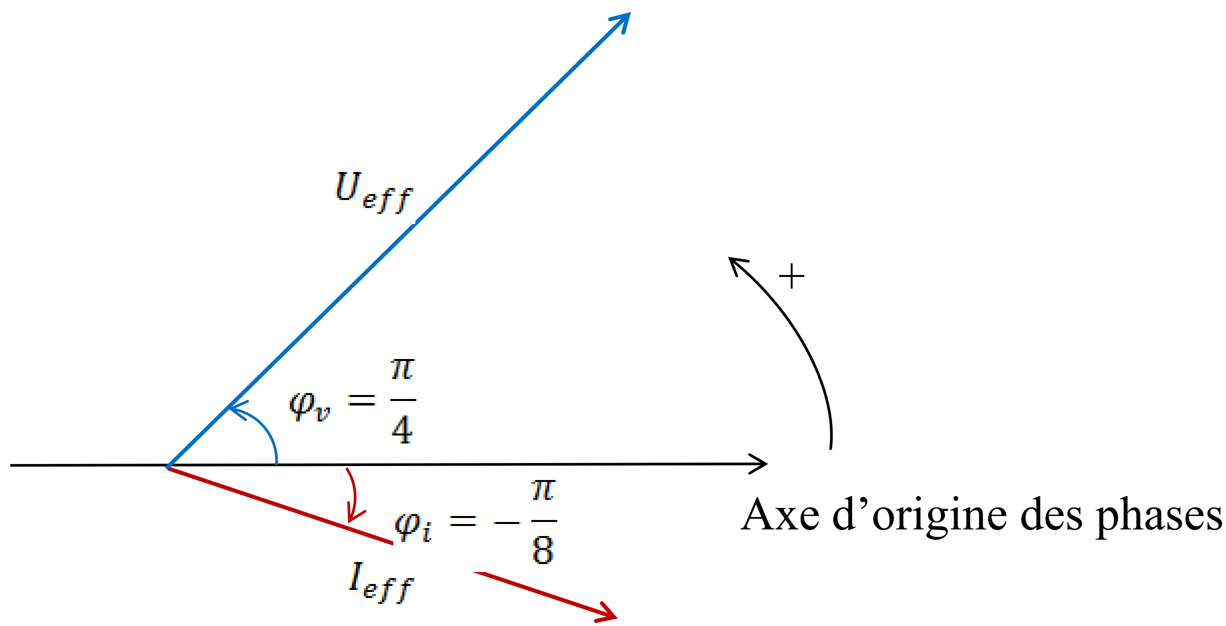
Exemple : soit :

$$i(t) = 3\sqrt{2}\sin(\omega t - \frac{\pi}{8})$$

$$u(t) = 5\sqrt{2}\sin(\omega t + \frac{\pi}{4})$$

$$\begin{cases} \| \vec{I} \| = I_{eff} = 3 \\ (Ox, \vec{I}) = \varphi_i = -\dfrac{\pi}{8} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \| \vec{U} \| = U_{eff} = 5 \\ (Ox, \vec{U}) = \varphi_v = \dfrac{\pi}{4} \end{cases}$$



c) Représentation complexe

Le nombre complexe I^* associé au courant i(t) est défini de la façon suivante :

$$I^* = \left(I_{eff}, \varphi_i\right)$$

Exemple : Déterminer le nombre complexe associé à la tension :

$$u(t) = 5\sqrt{2}\sin(\omega t + \frac{\pi}{4})$$

$$U^* = \left(5\ ,\ \frac{\pi}{4}\right) = 5\cos\frac{\pi}{4} + j\,5\sin\frac{\pi}{4} = \frac{5\sqrt{2}}{2} + j\,\frac{5\sqrt{2}}{2}$$

$$U^* = \frac{5\sqrt{2}}{2}(1 + j)$$

d) Déphasage (ou différence de phase) entre deux grandeurs sinusoïdales

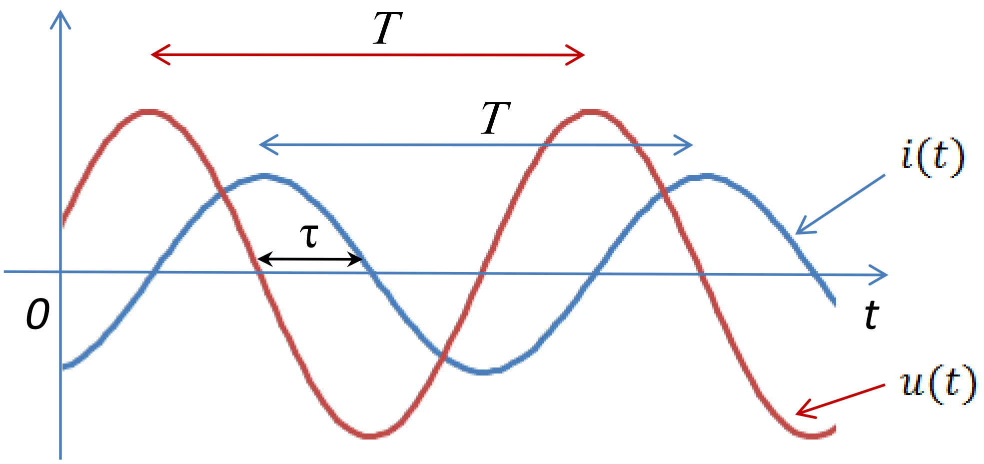
Soit deux grandeurs sinusoïdales (de même fréquence) :

$$i(t) = I_{eff}\sqrt{2}\sin(\omega t + \varphi_i) \quad , \quad u(t) = U_{eff}\sqrt{2}\sin(\omega t + \varphi_u)$$

Le ***déphasage*** de u par rapport à i est par convention :

$$\boxed{\varphi_{u/i} = \varphi_u - \varphi_i}$$

De même fréquence $\rightarrow$ de même pulsation $\rightarrow$ de même période.

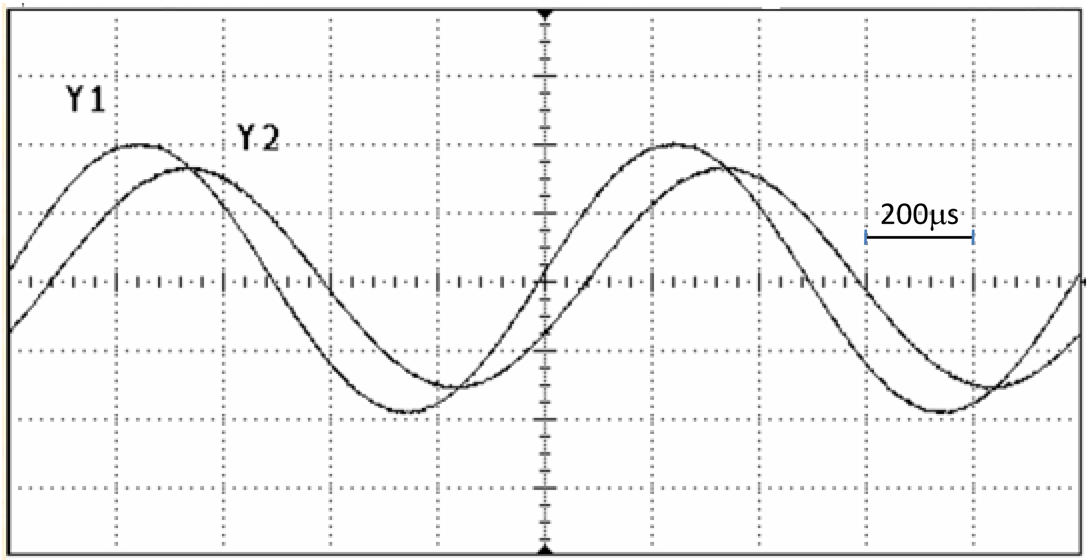


τ : décalage (en s) entre les deux signaux.

$$\left.\begin{array}{l} T \rightarrow 2\pi \\ \tau \rightarrow \varphi_{u/i} \end{array}\right\} \rightarrow \frac{T}{\tau} = \frac{2\pi}{\varphi_{u/i}(rad)} = \frac{360°}{\varphi_{u/i}(°)}$$

$$\boxed{\varphi_{u/i} = \frac{2\pi}{T}\tau\ (rad) = \frac{360}{T}\tau\ (°)}$$

Exemple : soit les signaux suivant :



On se propose de déterminer le déphasage entre ces deux signaux.

$$T = 1000\ \mu s \quad , \quad \tau = 100\ \mu s$$

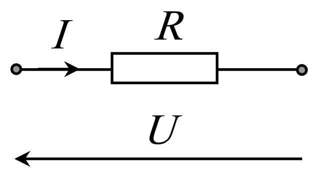
$$\varphi_{u/i} = \frac{360}{T}\tau\ (°) = \frac{360}{1000}100$$

$$\boxed{\varphi_{u/i} = 36°}$$

3. Dipôles passifs linéaires en régime sinusoïdale

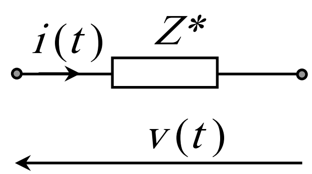
a) Notion d'impédance

En régime continu, un dipôle passif linéaire est caractérisé par sa ***résistance*** :



$$U = RI \;\rightarrow\; R = \frac{U}{I}$$

En régime sinusoïdal, un dipôle passif linéaire est caractérisé par son ***impédance complexe*** Z*:



Soit :

$$i(t) = I_m \sin(\omega t + \varphi_i) \;\rightarrow\; i^*(t) = I_m e^{j(\omega t + \varphi_i)}$$

$$u(t) = U_m \sin(\omega t + \varphi_u) \;\rightarrow\; u^*(t) = U_m e^{j(\omega t + \varphi_u)}$$

$$Z^* = \frac{u^*(t)}{i^*(t)} = \frac{U_m}{I_m}\, e^{j(\varphi_u - \varphi_i)} = \frac{U_{eff}}{I_{eff}}\, e^{j(\varphi_u - \varphi_i)}$$

$$Z^* = \frac{U_{eff}}{I_{eff}}\,[cos(\varphi_u - \varphi_i) + j\ sin(\varphi_u - \varphi_i)]$$

L'impédance Z (en Ω) est le module de Z^*:

$$Z = |Z^*| = \frac{U_m}{I_m} = \frac{U_{eff}}{I_{eff}}$$

Le déphasage de u par rapport à i correspond à l'argument de Z^* :

$$\varphi_{u/i} = \arg(Z^*) = \varphi_u - \varphi_i$$

Finalement , en notation complexe :

$$\boxed{Z^* = (Z\ \ ,\ \varphi_{u/i})}$$

On peut aussi l'écrire sous la forme algébrique :

$$\boxed{Z^* = R + jX}$$

$$R = Re\{Z^*\}, \qquad \text{est une résistance}$$

$$X = Im\{Z^*\}, \qquad \text{est une réactance}$$

Ces deux grandeurs s'expriment en ohms (Ω).

La phase de l'impédance est φ :

$$tg\varphi = \frac{Im\{Z^*\}}{Re\{Z^*\}} = \frac{X}{R} \rightarrow \varphi = Arctg\left(\frac{X}{R}\right)$$

b) Notion d'admittance

L'admittance complexe est l'inverse de l'impédance complexe :

$$Y^* = \frac{1}{Z^*}$$

Unité : la conductance s'exprime en $1/\Omega$ ou en Siemens.

L'admittance Y (en Siemens) est le module de Y^*:

$$Y = |Y^*| = \frac{1}{|Z^*|} = \frac{1}{Z} = \frac{I_m}{U_m} = \frac{I_{eff}}{U_{eff}}$$

$$\arg(Y^*) = -\arg(Z^*) = -\varphi_{u/i} = \varphi_{i/u} = \varphi_i - \varphi_u$$

$$Y^* = \left(Y \ , \ -\varphi_{u/i}\right) = \left(\frac{1}{Z} \ , \ \varphi_{i/u}\right)$$

On peut aussi l'écrire sous la forme algébrique :

$$Y^* = G + jB$$

$G = Re\{Y^*\}$, est une conductance

$B = Im\{Y^*\}$, est une susceptance

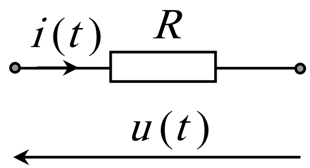
c) Relations entre *R*, *X*, *G* et *B*

$$Y^* = \frac{1}{Z^*} \rightarrow G + jB = \frac{1}{R + jX} = \frac{R - jX}{R^2 + X^2} = \frac{R}{R^2 + X^2} - j\frac{X}{R^2 + X^2}$$

$$G = \frac{R}{R^2 + X^2} \quad , \quad B = -\frac{X}{R^2 + X^2}$$

d) Cas particuliers

❑ Z* est une résistance pure :



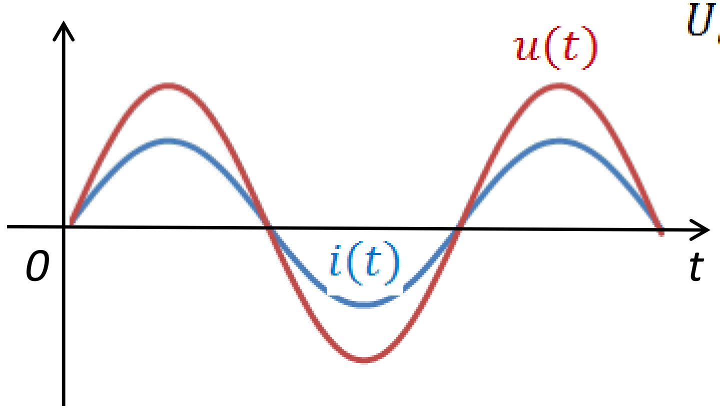
$$Z^* = R = \frac{u^*(t)}{i^*(t)} = \frac{U_{eff}}{I_{eff}}\, e^{j(\varphi_u - \varphi_i)}$$

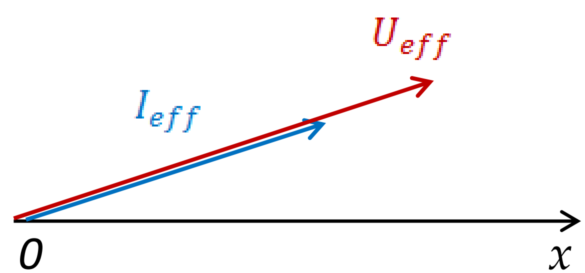
$$\varphi_{u/i} = \varphi_u - \varphi_i = \mathrm{Arg}\{Z^*\} = Arctg\left(\frac{0}{R}\right) = 0$$

$$\varphi_u = \varphi_i \rightarrow i(t)\ et\ u(t)\ \text{sont en phase}$$

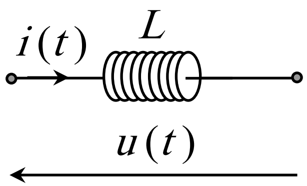
$$Z = R \quad , \quad Y = \frac{1}{R}$$

$$U_{eff} = R\, I_{eff}$$





❑ Z* est une bobine pure :



Soit :

$$i(t) = I_m \sin(\omega t + \varphi_i)$$

$$\rightarrow i^*(t) = I_m e^{j(\omega t + \varphi_i)}$$

$$u^*(t) = L\frac{di^*}{dt} = jL\omega\, I_m e^{j(\omega t + \varphi_i)} = jL\omega\, i^*(t)$$

$$\boxed{Z^* = \frac{u^*(t)}{i^*(t)} = jL\omega}$$

$$Z^* = jL\omega = \frac{u^*(t)}{i^*(t)} = \frac{U_{eff}}{I_{eff}}\, e^{j(\varphi_u - \varphi_i)}$$

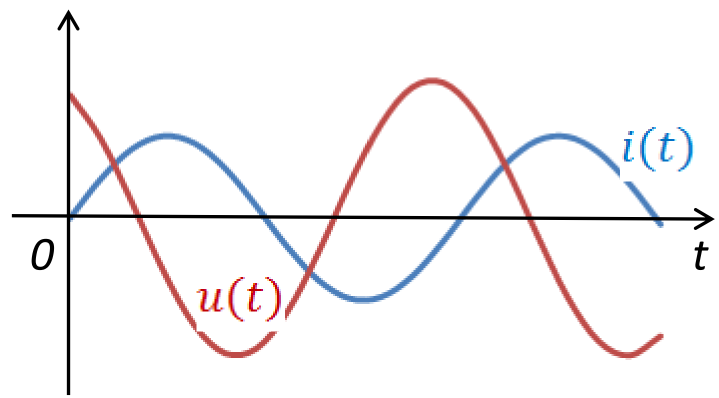
$$\varphi_{u/i} = \varphi_u - \varphi_i = \text{Arg}\{Z^*\} = Arctg\left(\frac{L\omega}{0}\right)$$

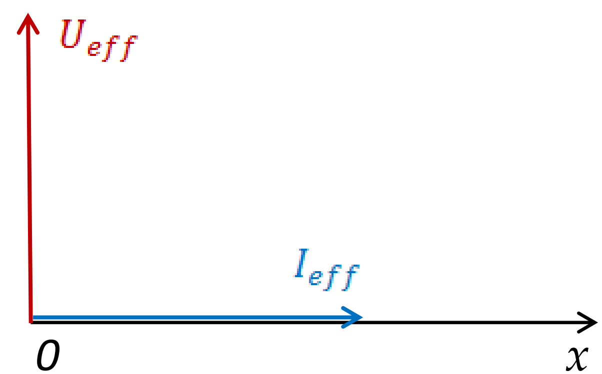
$$\varphi_{u/i} = Arctg(+\infty) = \frac{\pi}{2}$$

$u(t)$ est en avance de $\frac{\pi}{2}$ par rapport à $i(t)$

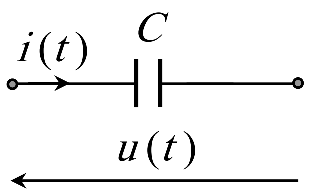
$$Z = |Z^*| = L\omega \quad , \quad Y = \frac{1}{L\omega}$$

$$U_{eff} = L\omega\, I_{eff}$$





❑ Z* est un condensateur pure :



Soit :

$$u(t) = U_m \sin(\omega t + \varphi_u)$$

$$\rightarrow u^*(t) = U_m e^{j(\omega t + \varphi_u)}$$

$$i^*(t) = \frac{dQ^*}{dt} = C\frac{du^*}{dt} = jC\omega\, U_m e^{j(\omega t + \varphi_u)}$$

$$i^*(t) = jC\omega\, u^*(t)$$

$$\boxed{Z^* = \frac{u^*(t)}{i^*(t)} = \frac{1}{jC\omega}}$$

$$Z^* = \frac{1}{jC\omega} = \frac{-j}{C\omega} = \frac{u^*(t)}{i^*(t)} = \frac{U_{eff}}{I_{eff}}\, e^{j(\varphi_u - \varphi_i)}$$

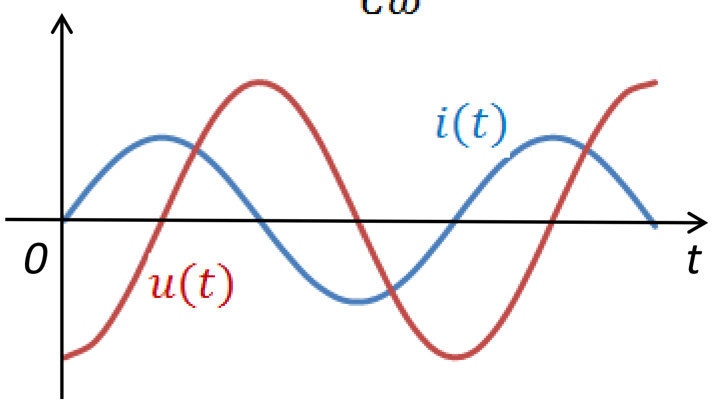
$$\varphi_{u/i} = \varphi_u - \varphi_i = \mathrm{Arg}\{Z^*\}$$

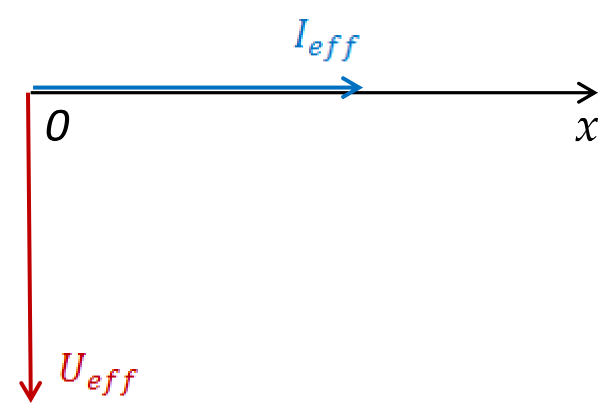
$$\varphi_{u/i} = Arctg(-\infty) = -\frac{\pi}{2}$$

$u(t)$ *est en retard de* $\frac{\pi}{2}$ *par rapport à* $i(t)$

$$Z = |Z^*| = \frac{1}{C\omega} \quad , \quad Y = C\omega$$

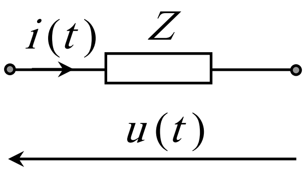
$$U_{eff} = \frac{1}{C\omega} I_{eff}$$





4. Puissance dissipée dans les dipôles passifs

Soit le dipôle suivant :



$$i(t) = I_m \sin(\omega t) \;\;,\;\; \text{origine des phases}$$

$$u(t) = U_m \sin(\omega t + \varphi)$$

La puissance électrique consommée à l'instant t (ou puissance instantanée) est définie par :

$$p(t) = u(t)\, i(t)$$

a) Puissance active (P)

La puissance active est définie comme étant la valeur moyenne de la puissance instantanée, elle est exprimée en Watt (W).

$$< p(t) >= \frac{1}{T}\int_0^T p(t)\, dt = \frac{1}{T}\int_0^T u(t)\, i(t)\, dt$$

TCF, on obtient (Annexe) :

$$< p(t) >= \frac{U_m I_m}{2}\cos(\varphi) = U_{\text{eff}}\, I_{\text{eff}} \cos(\varphi)$$

d'où :

$$\boxed{P = U_{\text{eff}}\, I_{\text{eff}}\, \cos(\varphi)}$$

La puissance active est la **puissance dissipée dans les résistances**. Le terme **cos φ** est appelé facteur de puissance**.**

b) Puissance réactive (Q)

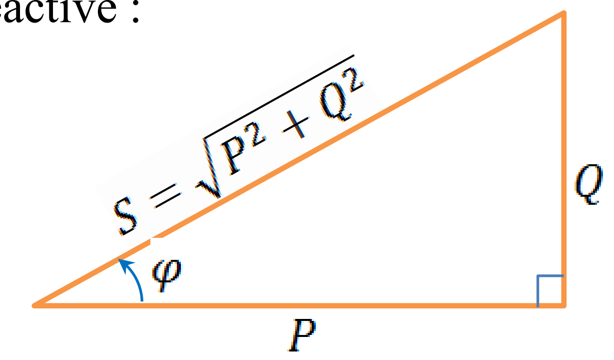
En régime alternatif sinusoïdal on définit la puissance réactive par la relation suivante :

$$\boxed{Q = U_{\text{eff}}\, I_{\text{eff}}\, \sin(\varphi)}$$

La puissance réactive est la puissance échangée entre les éléments réactifs (C et L), elle est exprimée en Volt Ampère Réactif (VAR).

c) Puissance apparente

La puissance apparente (S) est la somme (trigonométrique) de la puissance active et réactive :



$$\boxed{S = \sqrt{P^2 + Q^2} = U_{\text{eff}}\, I_{\text{eff}}}$$

Cette puissance est exprimée en Volt Ampère (VA).

C'est par ailleurs la puissance souscrite (kVA) par la *SONELGAZ* pour son contrat d'électricité :

Le facteur de puissance peut être exprimé en fonction de S :

$$\boxed{f_p = \cos(\varphi) = \frac{P}{U_{\text{eff}}\, I_{\text{eff}}} = \frac{P}{S}}$$

d) Cas d'un dipôle résistif : φ =0°

$$P = U_{\text{eff}}\, I_{\text{eff}}\ \cos(0) = U_{\text{eff}}\, I_{\text{eff}}$$

$$U_{\text{eff}} = R\, I_{\text{eff}} \rightarrow P = R\, I_{\text{eff}}^2$$

$$Q = U_{\text{eff}}\, I_{\text{eff}}\ \sin(0) = 0$$

$$S = \sqrt{P^2 + 0^2} = U_{\text{eff}}\, I_{\text{eff}}$$

Une résistance ne consomme pas de puissance réactive.

e) Cas d'un dipôle inductif : φ =90°

$$P = U_{\text{eff}}\, I_{\text{eff}}\ \cos(90) = 0$$

$$Q = U_{\text{eff}}\, I_{\text{eff}}\ \sin(90) = U_{\text{eff}}\, I_{\text{eff}}$$

$$U_{\text{eff}} = Z\, I_{\text{eff}} \rightarrow Q = Z\, I_{\text{eff}}^2 = L\omega\, I_{\text{eff}}^2$$

$$S = \sqrt{0^2 + Q^2} = L\omega\, I_{\text{eff}}^2$$

Une bobine ne consomme pas de puissance active.

f) Cas d'un dipôle capacitif : φ =- 90°

$$P = U_{\text{eff}}\, I_{\text{eff}}\ \cos(-90) = 0$$

$$Q = U_{\text{eff}}\, I_{\text{eff}}\ \sin(-90) = -U_{\text{eff}}\, I_{\text{eff}}$$

$$U_{\text{eff}} = Z\, I_{\text{eff}} \rightarrow Q = -Z\, I_{\text{eff}}^2 = -\frac{1}{C\omega}\, I_{\text{eff}}^2$$

$$S = \sqrt{0^2 + Q^2} = \frac{1}{C\omega}\, I_{\text{eff}}^2$$

Un condensateur ne consomme pas de puissance active. Un condensateur est un générateur de puissance réactive ($Q < 0$).

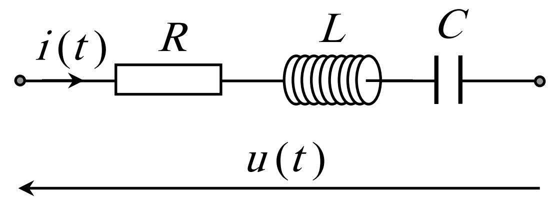
g) Puissance apparente complexe

$$S^* = P + jQ$$

$$= U_{\text{eff}}\, I_{\text{eff}}[\cos(\varphi) + j\sin(\varphi)]$$

$$S = \sqrt{P^2 + Q^2} = U_{\text{eff}}\, I_{\text{eff}}$$

Pour un circuit *RLC* série :



$$Z^* = R + jL\omega + \frac{1}{jC\omega} = R + j\left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)$$

$$Z = |Z^*| = \sqrt{R^2 + j\left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)^2}$$

$$\cos(\varphi) = \frac{R}{|Z^*|} \quad , \quad \sin(\varphi) = \frac{L\omega - \frac{1}{C\omega}}{|Z^*|}$$

$$Z = |Z^*| = \frac{U_{\text{eff}}}{I_{\text{eff}}} \rightarrow U_m = |Z^*|\, I_{\text{eff}}$$

$$P = U_{\text{eff}}\, I_{\text{eff}}\ \cos(\varphi) = |Z^*|\, I_{\text{eff}}\ I_{\text{eff}}\ \frac{R}{|Z^*|}$$

$$\boxed{P = R\, I_{\text{eff}}^2 = Im\{Z^*\}\, I_{\text{eff}}^2}$$

$$Q = U_{\mathrm{eff}}\, I_{\mathrm{eff}}\, \sin(\varphi) = |Z^*|\, I_{\mathrm{eff}}\, I_{\mathrm{eff}}\, \frac{L\omega - \frac{1}{C\omega}}{|Z^*|}$$

$$\boxed{Q = \left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right) I_{\mathrm{eff}}^2}$$

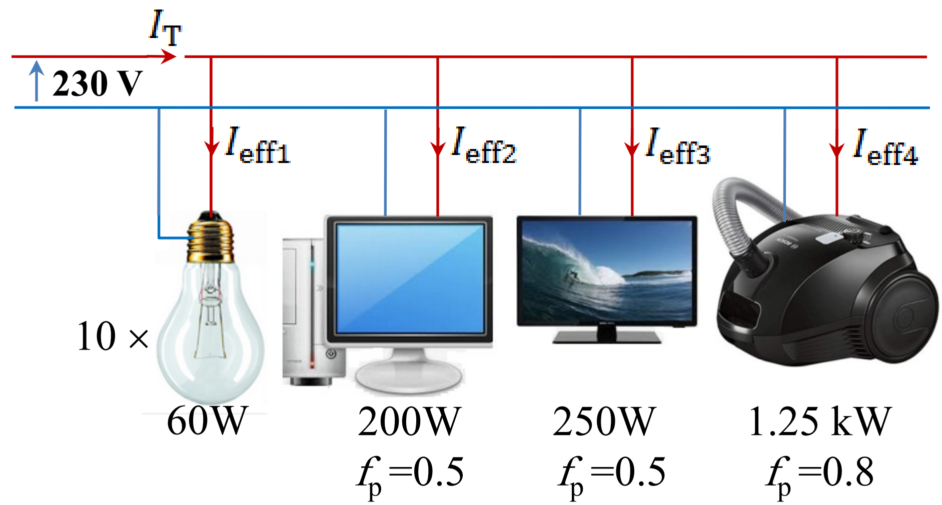
$$\boxed{S = \sqrt{P^2 + Q^2} = I_{\mathrm{eff}}^2 \sqrt{R^2 + \left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)^2}}$$

h) Théorème de Boucherot

Si un circuit contient n composants linéaires, alimentés par une tension sinusoïdale, absorbant chacun une puissance active P_i et une puissance réactive Q_i alors les puissances totales du circuit vérifient :

$$P_T = \sum_{i=1}^{n} P_T \quad , \quad Q_T = \sum_{i=1}^{n} Q_T$$

Soit une installation électrique monophasée 230V/50Hz comportant :



Ces différents appareils fonctionnent simultanément.

1. Calculer les puissances actives et réactives consommées par chaque élément. En déduire les valeurs de ces puissances pour toute l'installation,
2. Calculer le f_p de l'installation,
3. Calculer les courants traversant chaque élément et le courant total de la ligne,

1. **Calcul de P et Q**.

- **Pour 10 lampes** : la lampe est un dipôle résistif, alors : $f_p = 1 \rightarrow \cos(\varphi) = 1$.

$$P = 60 \times 10 = 600\ W$$

$$Q = U_{\text{eff}}\, I_{\text{eff}} \sin(0) = 0$$

- **Pour le PC** : $f_p = 0.5 \rightarrow \cos(\varphi) = 0.5$
$\rightarrow \varphi = 60°$.

$$P = 200\ W$$

$$\text{tg}(\varphi) = \frac{Q}{P} \rightarrow Q = P\ \text{tg}(60°) = 200\sqrt{3}$$

$$Q = 346.41\ VAR$$

- **Pour le TV** : fp = 0.5 $\rightarrow \varphi = 60°$.

$$P = 250\ W$$

$$Q = 250\ \text{tg}(60°) = 433.01\ VAR$$

- **Pour l'aspirateur** : $f_p = 0.8 \rightarrow \varphi = 36.89°$

$$P = 1250\ W$$

$$Q = 1250\ \text{tg}(36.89°) = 938.19\ VAR$$

$$P_T = \sum_{i=1}^{n} P_T = 600 + 200 + 250 + 1250$$

$$P_T = 1300\ W$$

$$Q_T = \sum_{i=1}^{n} Q_T = 0 + 346.41 + 433.01 + 938.19$$

$$Q_T = 1717.61\ VAR$$

2. **Calcul de f_p de l'installation**

$$S = \sqrt{P^2 + Q^2} = \sqrt{1300^2 + 1717.61^2}$$

$$= 2154.11\ VA$$

$$f_p = cos(\varphi) = \frac{P}{S} = \frac{1300}{2154.11}$$

$$\boxed{f_p = 0.60}$$

3. **Calcul du courant**

$$P = U_{\text{eff}}\, I_{\text{eff}} \cos(\varphi)$$

$$I_{\text{eff}} = \frac{P}{U_{\text{eff}} \times \cos(\varphi)}$$

- **Traversant les 10 lampes** :

$$I_{\text{eff1}} = \frac{600}{230 \times 1} = 2.61\ A$$

- **Traversant le PC** :

$$I_{\text{eff2}} = \frac{200}{230 \times 0.5} = 1.74\ A$$

- **Traversant le TV** :

$$I_{\text{eff3}} = \frac{250}{230 \times 0.5} = 2.17\ A$$

- **Traversant l'aspirateur** :

$$I_{\text{eff4}} = \frac{1250}{230 \times 0.8} = 6.79\ A$$

- **Courant total de la ligne** :

$$\cancel{I_{\text{T}} = I_{\text{eff1}} + I_{\text{eff2}} + I_{\text{eff3}} + I_{\text{eff4}}}$$

Car les fp ne sont pas identiques

Sachant que :

$$S = \sqrt{P^2 + Q^2} = U_{\text{eff}}\, I_{\text{eff}}$$

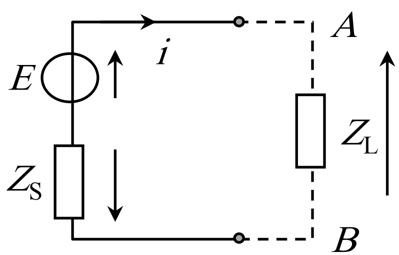
alors :

$$I_{\text{eff}} = \frac{S}{U_{\text{eff}}} = \frac{2154.11}{230}$$

$$\boxed{I_{\text{eff}} = 9.36\ A}$$

5. Adaptation d'impédance en puissance

On dit que les impédances entre un générateur et sa charge sont adaptées lorsque le maximum de puissance est fourni à la charge. Soit :



On pose :

$$Z_S^* = R_S + jX_S \quad , \quad Z_L^* = R_L + jX_L$$

$$P = Im\{Z_L^*\}\, I_{\text{eff}}^2 = R_L\, I_{\text{eff}}^2$$

$$I^* = \frac{E^*}{Z_S^* + Z_L^*}$$

$$I^* = \frac{E^*}{(R_S + R_L) + j(X_S + X_L)}$$

$$I_{\text{eff}} = \frac{|I^*|}{\sqrt{2}} = \frac{E}{\sqrt{2[(R_S + R_L)^2 + (X_S + X_L)^2]}}$$

$$P = \frac{E^2}{2[(R_S + R_L)^2 + (X_S + X_L)^2]} R_L$$

La puissance P est maximale si le dénominateur est minimal :

$$X_L = -X_S$$

$$P = \frac{R_L}{2(R_S + R_L)^2} E^2 = \frac{R_L}{(R_S + R_L)^2} \times \frac{E^2}{2}$$

Cette puissance sera maximale, si :

$$\frac{dP}{dR_L} = 0 \rightarrow \frac{(R_S + R_L)^2 - 2(R_S + R_L)R_L}{(R_S + R_L)^4} = 0$$

$$\rightarrow \frac{R_S^2 - R_L^2}{(R_S + R_L)^4} \times \frac{E^2}{2} = 0$$

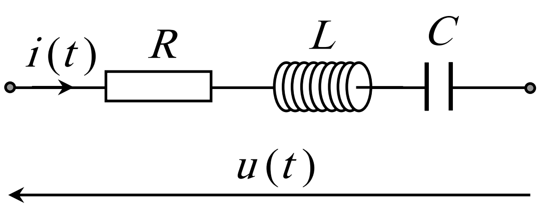
$$\rightarrow \frac{R_S^2 - R_L^2}{(R_S + R_L)^4} \times \frac{E^2}{2} = 0$$

$$R_L = R_S$$

$$\boxed{Z_L^* = R_L + jX_L = R_S - jX_S = \overline{Z_S^*}}$$

6. Résonance

En général pour un circuit RLC série, le phénomène de la résonance est dû au passage du **courant** par un **maximum**:



$$u(t) = U_m \sin(\omega t + \varphi)$$

En notation complexe :

$$u^*(t) = U_m\, e^{j(\omega t+\varphi)}$$

$$Z^* = R + jL\omega + \frac{1}{jC\omega} = R + j\left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)$$

$$Z = |Z^*| = \sqrt{R^2 + j\left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)^2}$$

$$i^*(t) = \frac{u^*(t)}{Z^*} = \frac{U_m\, e^{j(\omega t+\varphi_u)}}{Z^*}$$

$$i^*(t) = \frac{u^*(t)}{Z^*} = \frac{U_m\, e^{j(\omega t+\varphi_u)}}{\sqrt{R^2 + \left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)^2}\; e^{j\varphi}}$$

$$i^*(t) = \frac{U_m}{\sqrt{R^2 + \left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)^2}}\; e^{j(\omega t+\varphi_u-\varphi)}$$

Par identification avec :

$$i^*(t) = I_m\, e^{j(\omega t+\varphi_i)} = I_m^*\, e^{j\omega t}$$

$$I_m^* = \frac{U_m}{\sqrt{R^2 + \left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)^2}}\; e^{j(\varphi_u-\varphi)}$$

$$I_m = |I_m^*| = \frac{U_m}{\sqrt{R^2 + \left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)^2}}$$

$$I_m = |I_m^*| = \frac{U_m}{\sqrt{R^2 + L^2\left(\omega - \frac{1}{LC\omega}\right)^2}}$$

En posant :

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \ , \ x = \frac{\omega}{\omega_0} \ , \ K = \frac{L\omega_0}{R}$$

L'expression de I_m devient :

$$I_m = |I_m^*| = \frac{U_m}{\sqrt{R^2 + L^2\left(\omega_0 x - \frac{\omega_0^2}{\omega}\right)^2}}$$

$$= \frac{U_m}{\sqrt{R^2 + L^2\,\omega_0^2\left(x - \frac{\omega_0}{\omega}\right)^2}}$$

L'amplitude réelle est donc :

$$I_m = \frac{U_m}{R\sqrt{1 + K^2\left(x - \frac{1}{x}\right)^2}}$$

Etude de I_m en fonction de x :

$$\lim_{x \to 0}\{I_m\} = 0 \ \Big\{$$ Le condensateur se comporte comme un interrupteur ouvert.

$$\lim_{x \to \infty}\{I_m\} = 0 \ \Big\{$$ La bobine se comporte comme un interrupteur ouvert.

Recherchons x_0 pour lequel I_m admet un maximum (I_{max}). On a :

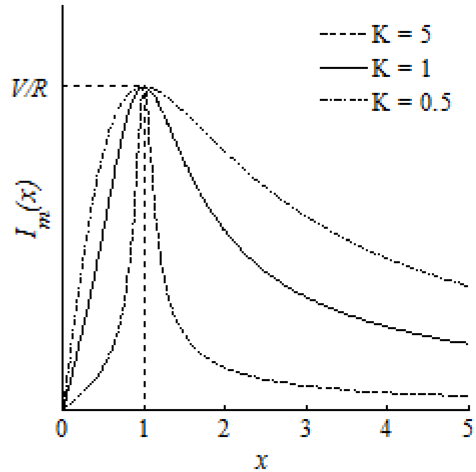
$$\left.\frac{dI_m}{dx}\right|_{x=x_0} = \frac{\left(1+\frac{1}{x_0^2}\right)\left(x_0-\frac{1}{x_0}\right)}{\sqrt{1+K^2\left(x_0-\frac{1}{x_0}\right)^2}} = 0$$

On obtient :

$$x_0 = 1 \to \omega = \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

qui correspond à :

$$I_{\max} = I(x_0) = \frac{V}{R}$$



Merci de votre attention…

Calcul de la puissance moyenne :

$$i(t) = I_m \sin(\omega t) \quad , \quad u(t) = U_m \sin(\omega t + \varphi_u)$$

$$p(t) = u(t)\, i(t)$$

$$< p(t) >= \frac{1}{T}\int_0^T p(t)\, dt = \frac{1}{T}\int_0^T u(t)\, i(t)\, dt$$

$$< p(t) >= \frac{U_m I_m}{T}\int_0^T \sin(\omega t + \varphi_u)\sin(\omega t)\ dt$$

$$\sin(\omega t + \varphi_u)\sin(\omega t)$$

$$= \cos(\varphi_u)\sin^2(\omega t) + \sin(\varphi_u)\cos(\omega t)\sin(\omega t)$$

$$\sin^2(\omega t) = \frac{1 - \cos(2\omega t)}{2}$$

$$\cos(\omega t)\sin(\omega t) = \frac{\sin(2\omega t)}{2}$$

$$< p(t) >= \frac{U_m I_m}{T}\int_0^T \cos(\varphi_u)\left[\frac{1-\cos(2\omega t)}{2}\right] dt + \frac{U_m I_m}{T}\int_0^T \sin(\varphi_u)\frac{\sin(2\omega t)}{2} dt$$

$$I_1 = \int_0^T \frac{1-\cos(2\omega t)}{2}\, dt = \frac{1}{2}\int_0^T [1-\cos(2\omega t)]\, dt$$

$$I_1 = \frac{1}{2}[t - \sin(2\omega t)]_0^T = \frac{1}{2}[T - \sin(2\omega T)]$$

$$\omega T = 2\pi$$

$$I_1 = \frac{T}{2}$$

$$I_2 = \int_0^T \frac{\sin(2\omega t)}{2} dt = \frac{1}{4}[\cos(2\omega t)]_{\mathrm{T}}^{0} = 0$$

$$< p(t) >= \frac{U_m I_m}{2}\cos(\varphi_u) = U_{\mathrm{eff}}\, I_{\mathrm{eff}} \cos(\varphi_u)$$