II- Cinématique

La cinématique est l'étude du mouvement sans tenir compte des causes qui l'engendre .

1- Notion de référentiel

-soit une base orthonormée $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, placée en un point pris comme origine , qui sert à repérer un point "$\boldsymbol{M}$" ce qui constitue un repère . $(\boldsymbol{rep\acute{e}re = origine + base})$

-si se point "M" est mouvement ,il dépend du temps.

$\overrightarrow{OM}(t) = \vec{r} = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}$ "$\boldsymbol{t}$" : est le temps .

- La notion du mouvement est relative selon l'observateur (repos , en mouvement indépendamment ou avec le mobile "$\boldsymbol{M}$").l'observateur est le témoin du temps.

"Pour décrire le mouvement d'un point matériel ,un repère est nécessaire , qu'on lui liant un observateur ,ce qui nous amènes à définir un référentiel."

$$\boldsymbol{rep\acute{e}re}\ (\boldsymbol{origine + base}) + observateure = R\acute{e}f\acute{e}rentiel$$

2- Equation horaire et équation de trajectoire

2.1-vecteur position

Le mouvement d'un point matériel est décrit dans un référentiel. Commençant par le situé

(vecteur position) , puis donner sa nature.

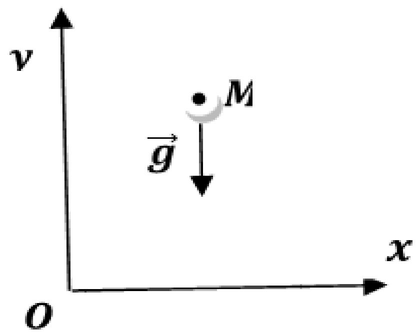
Dans un repère orthonormée $(\boldsymbol{o}, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ le vecteur position est donné par:

$$\overrightarrow{OM} = \vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$$

2.2-Equation horaire

L'équation horaire exprime la manière du changement du mouvement dans le temps en donnant ces paramètres cinématiques .

Exemple : Chute libre $\boldsymbol{y(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0 t + y_0}$



La distance parcourue "y" du point "M" est donnée

en fonction du temps

"$y(t)$" est l'équation horaire

Remarque: les coordonnées du point "M" : $x(t),\ y(t),\ z(t)$, sont les équation paramétriques.

2.3-Equation de la trajectoire

-Puisque le vecteur $\overrightarrow{\boldsymbol{OM}}$ change de position lors de l'écoulement du temps on a :

$$\begin{cases} \boldsymbol{x = x(t)} \\ \boldsymbol{y = y(t)} \\ \boldsymbol{z = z(t)} \end{cases}$$

$\boldsymbol{x(t),\ y(t),\ et\ \ z(t)}$,sont dites équations paramétriques du mouvement .

- La trajectoire est le lieu géométrique qu'occupe le mobile dans l'espace lors des variation des équation paramétriques.
- Pour trouver l'équation de la trajectoire ,on élimine le temps des équations paramétrique , on trouve la forme : $f(x, y, z) = 0$

Exemple : Mouvement dans le plan

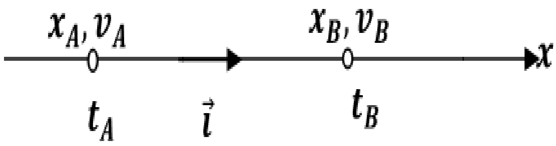
$$\begin{cases} x = A\cos(\omega t) \\ y = A\sin(\omega t) \end{cases} \quad => \quad \begin{cases} x^2 = A^2 cos^2(\omega t) \\ y^2 = A^2 sin^2(\omega t) \end{cases} \quad => \quad x^2 + y^2 = A^2$$

$Equation\ d'un\ cercle\ de\ rayon\ \ "R = A"\ et\ ce\ centre\ "C(0,0)"$

3-Notion de vitesse

3.1- vitesse moyenne

La vitesse moyenne est le rapport du déplacement entre deux points "$\boldsymbol{A\ etB}$" au temps du parcours sans tenir compte de la nature de mouvement (la manière dont le tronçon $\boldsymbol{AB}$ est parcouru) .



-*Dans une seul direction (une dimension)*

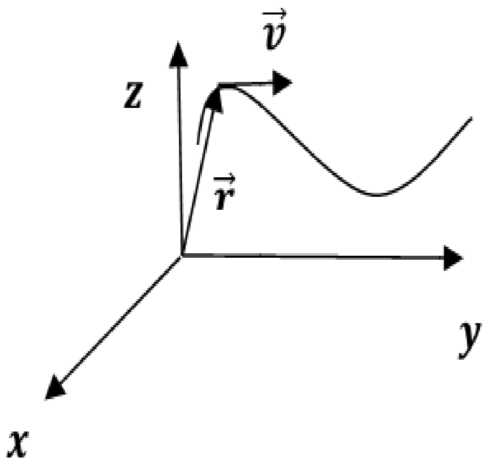
$$<\vec{v}>=\vec{v}_{moy}=\frac{x_f-x_i}{t_f-t_i}\ \vec{i}\ =\frac{x_B-x_A}{t_B-t_A}\vec{i}=\frac{\Delta x}{\Delta t}\ \vec{i}$$

-*Dans l'espace (trois dimensions) :* $A(x_A, y_A, z_A)$; $B(x_B, y_B\ , z_B)$

$$<\vec{v}>=\vec{v}_{moy}=\frac{\vec{r}_f-\vec{r}_i}{t_f-t_i}=\frac{x_B-x_A}{t_B-t_A}\vec{i}+\frac{y_B-y_A}{t_B-t_A}\vec{i}+\frac{z_B-z_A}{t_B-t_A}\vec{i}$$

$$<\vec{v}>=\vec{v}_{moy}=\frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}$$

3.2- vitesse instantanée



C'est la vitesse qu'aura le mobile à chaque instant du parcours .

$$\vec{v}(t)=\lim_{\Delta t\to 0}\left(\frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}\right)=\frac{d\vec{r}}{dt}=\frac{dx}{dt}\vec{i}+\frac{dy}{dt}\vec{j}+\frac{dz}{dt}\vec{k}$$

$$\vec{v}(t)=v_x\vec{i}+v_y\vec{j}+v_z\vec{k}$$

$$=>\qquad \|\vec{v}(t)\|=\sqrt{{v_x}^2+{v_y}^2+{v_z}^2}$$

Remarque : la vitesse instantanée ,géométriquement ,est la pente de la courbe qui représente la variation de la position dans le temps.

4-Notion d'accélération

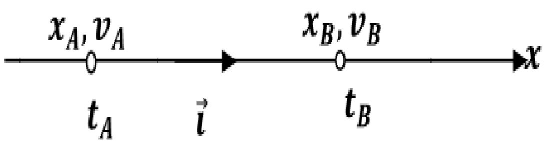
4.1-Accélération moyenne

- L accélération est le taux de variation de la vitesse dans le temps .

- l' accélération moyenne est la taux de variation de la vitesse entre les points initial "***A***" et final "***B***" , sans tenir compte de la manière dont le parcours est traversé .

- *Dans une seul direction (une dimension)*

$$< \vec{a} >= \vec{a}_{moy} = \frac{\vec{v}_f - \vec{v}_i}{t_f - t_i}\, \vec{i} = \frac{v_B - v_A}{t_B - t_A}\vec{i} = \frac{\Delta v}{\Delta t}\, \vec{i}$$



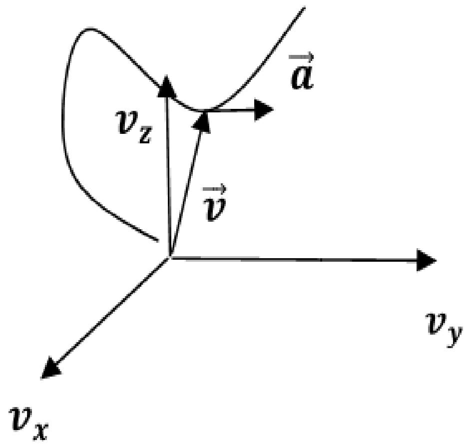
-*Dans l'espace (trois dimensions) :* $A(x_A, y_A, z_A)$; $B(x_B, y_B, z_B)$

$$< \vec{a} >= \vec{a}_{moy} = \frac{\vec{v}_f - \vec{v}_i}{t_f - t_i} = \frac{v_{xB} - v_{xA}}{t_B - t_A}\vec{i} + \frac{v_{yB} - v_{yA}}{t_B - t_A}\vec{i} + \frac{v_{zB} - v_{zA}}{t_B - t_A}\vec{i}$$

$$< \vec{a} >= \vec{a}_{moy} = \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t}$$

4.1-Accélération instantanée

L'accélération instantanée est le taux de variation de la vitesse dans le temps à chaque moment.



$$\vec{a}(t) = \lim_{\Delta t \to 0}\left(\frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t}\right) = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{dv_x}{dt}\vec{i} + \frac{dv_y}{dt}\vec{j} + \frac{dv_z}{dt}\vec{k}$$

$$\vec{a}(t) = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}$$

$$=> \qquad \|\vec{a}(t)\| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$$

- L'hodographe du mouvement est le lieu géométrique décrit par l'extrémité du vecteur vitesse

Remarque : L'accélération instantanée, géométriquement ,est la pente de la courbe(hodographe) qui représente la variation de la vitesse dans le temps .

$$\vec{a}(t) = \frac{d}{dt}\left(\frac{d\vec{r}}{dt}\right) = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \frac{d^2x}{dt^2}\vec{i} + \frac{d^2y}{dt^2}\vec{j} + \frac{d^2z}{dt^2}\vec{k}$$

5-Position , vitesse et accélération dans les différents systèmes de coordonnées

5.1- *Coordonnées cartésiennes :*

a) vecteur position :

$$\overrightarrow{OM} = \vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$$

b) vecteur vitesse :

$$\vec{v}(t) = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{dx}{dt}\vec{i} + \frac{dy}{dt}\vec{j} + \frac{dz}{dt}\vec{k} \quad => \begin{cases} v_x = \frac{dx}{dt} \\ v_y = \frac{dy}{dt} \\ v_z = \frac{dz}{dt} \end{cases}$$

$$\|\vec{v}(t)\| = \sqrt{{v_x}^2 + {v_y}^2 + {v_z}^2}$$

c) vecteur accélération:

$$\vec{a}(t) = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{dv_x}{dt}\vec{i} + \frac{dv_y}{dt}\vec{j} + \frac{dv_z}{dt}\vec{k} \quad => \begin{cases} a_x = \frac{dv_x}{dt} \\ a_y = \frac{dv_y}{dt} \\ a_z = \frac{dv_z}{dt} \end{cases}$$

$$\|\vec{a}(t)\| = \sqrt{{a_x}^2 + {a_y}^2 + {a_z}^2}$$

5.2- Coordonnée intrinsèques:

a) vecteur position:

la coordonnée "s" est la distance parcourue le long de la trajectoire telle que : $s = \widehat{OM}$ est le vecteur position est :

$$\overrightarrow{OM} = \vec{r} = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath}$$

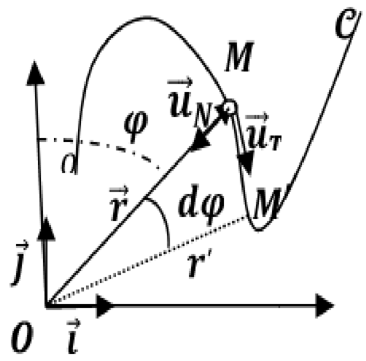
Si le mobile se déplace du point "M" vers le point "M' "

$$\overrightarrow{r'} = \vec{r} + \overrightarrow{MM'} \Rightarrow \overrightarrow{r'} - \vec{r} = \overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{dr} = dx\vec{\imath} + dy\,\vec{\jmath}$$

Le segment "ds" de la courbe est lié à la variation des coordonnées cartésiennes tels que :

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2} = \|\overrightarrow{dr}\|$$

b) vecteur vitesse :



D'après la définition :

$$\vec{v}(t) = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = \frac{\overrightarrow{dr}}{dt} = \frac{\overrightarrow{MM'}}{dt} = \frac{\|\overrightarrow{MM'}\|}{dt}\overrightarrow{u_T}$$

Sachant qu'à la limite $ds = \|\overrightarrow{MM'}\| = \|\overrightarrow{dr}\|$

$$\vec{v}(t) = \frac{\|\overrightarrow{MM'}\|}{dt}\overrightarrow{u_T} = \frac{ds}{dt}\overrightarrow{u_T} \quad \Rightarrow \quad \vec{v}(t) = v.\overrightarrow{u_T}$$

Le vecteur vitesse est orienté suivant la tangente à la courbe .

c) vecteur accélération:

finalement $\vec{a} = \frac{d}{dt}(v).\overrightarrow{u_T} + v.\frac{v}{R}\overrightarrow{u_N} \Rightarrow \vec{a} = \frac{d\,v}{dt}.\overrightarrow{u_T} + \frac{v^2}{R}\overrightarrow{u_N}$

$$\begin{cases} \vec{a}_T = \frac{d\,v}{dt} \\ \overrightarrow{a_N} = \frac{v^2}{R} \end{cases}$$

où "R" rayon de courbure .

$$\begin{cases} \vec{a_T} = \textit{est la composante tangentielle du à la variation du module de la vitesse.} \\ \overrightarrow{a_N} = \textit{est le composante normale du à la variation de la direction de la vitesse.} \end{cases}$$

5.3- coordonnée polaire :

a) vecteur position :

Comme on la déjà vu : $\overrightarrow{OM} = \vec{\boldsymbol{r}} = \rho\overrightarrow{u_\rho} \;\Rightarrow\; \|\overrightarrow{\boldsymbol{OM}}\| = \rho$

$$\overrightarrow{\boldsymbol{OM}} = \boldsymbol{\rho}\overrightarrow{\boldsymbol{u_\rho}}$$

b) vecteur vitesse :

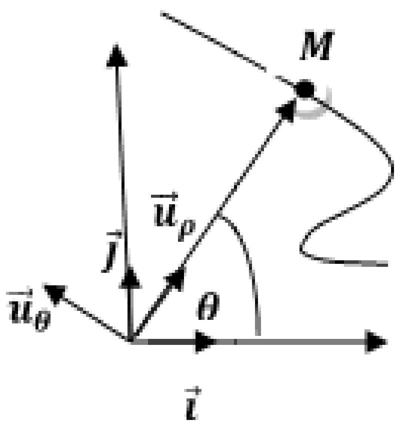
D'après la définition :

$$\vec{v}(t) = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d(\rho\overrightarrow{u_\rho})}{dt} = \dot{\rho}\,\overrightarrow{u_\rho} + \rho\frac{d\overrightarrow{u_\rho}}{dt}$$

Or :

$$\begin{cases} \overrightarrow{\boldsymbol{u_\rho}} = \boldsymbol{\cos\theta}\,\vec{\boldsymbol{\imath}} + \boldsymbol{\sin\theta}\,\vec{\boldsymbol{\jmath}} \\ \overrightarrow{\boldsymbol{u_\theta}} = -\boldsymbol{\sin\theta}\,\vec{\boldsymbol{\imath}} + \boldsymbol{\cos\theta}\,\vec{\boldsymbol{\jmath}} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{d\overrightarrow{\boldsymbol{u_\rho}}}{dt} = \dot{\boldsymbol{\theta}}\,(-\boldsymbol{\sin\theta})\,\vec{\boldsymbol{\imath}} + \dot{\boldsymbol{\theta}}\boldsymbol{\cos\theta}\,\vec{\boldsymbol{\jmath}} \\ \frac{d\overrightarrow{\boldsymbol{u_\theta}}}{dt} = \dot{\boldsymbol{\theta}}(-\boldsymbol{\cos\theta})\vec{\boldsymbol{\imath}} + \dot{\boldsymbol{\theta}}\,(-\boldsymbol{\sin\theta})\,\vec{\boldsymbol{\jmath}} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \dot{\overrightarrow{\boldsymbol{u_\rho}}} = \frac{d\overrightarrow{\boldsymbol{u_\rho}}}{dt} = \dot{\boldsymbol{\theta}}\overrightarrow{\boldsymbol{u_\theta}} \\ \dot{\overrightarrow{\boldsymbol{u_\theta}}} = \frac{d\overrightarrow{\boldsymbol{u_\theta}}}{dt} = -\dot{\boldsymbol{\theta}}\,\overrightarrow{\boldsymbol{u_\rho}} \end{cases}$$



$$\vec{v}(t) = \dot{\rho}\,\overrightarrow{u_\rho} + \rho\dot{\theta}\overrightarrow{u_\theta} \qquad \vec{\boldsymbol{v}}(\boldsymbol{t}) = \boldsymbol{v_\rho}\,\overrightarrow{\boldsymbol{u_\rho}} + \boldsymbol{v_\theta}\overrightarrow{\boldsymbol{u_\theta}}$$

$$\begin{cases} v_\rho = \dot{\rho} \\ v_\theta = \rho\dot{\theta} \end{cases} \Rightarrow \quad \|\vec{v}(t)\| = \sqrt{{v_\rho}^2 + {v_\theta}^2} = \sqrt{\dot{\rho}^2 + (\rho\dot{\theta})^2}$$

c) *vecteur accélération:*

D'après la définition :

$$\vec{a}(t) = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\dot{\rho}\,\overrightarrow{u_\rho} + \rho\dot{\theta}\overrightarrow{u_\theta}\right)$$

$$=> \vec{a}(t) = \ddot{\rho}\overrightarrow{u_\rho} + \dot{\rho}\dot{\overrightarrow{u_\rho}} + \dot{\rho}\dot{\theta}\overrightarrow{u_\theta} + \rho\ddot{\theta}\overrightarrow{u_\theta} + \rho\dot{\theta}\dot{\overrightarrow{u_\theta}}$$

$$=> \vec{a}(t) = \ddot{\rho}\overrightarrow{u_\rho} + \dot{\rho}\dot{\theta}\overrightarrow{u_\theta} + \dot{\rho}\dot{\theta}\overrightarrow{u_\theta} + \rho\ddot{\theta}\overrightarrow{u_\theta} + \rho\dot{\theta}\left(-\dot{\theta}\,\overrightarrow{u_\rho}\right)$$

$$\vec{a}(t) = \left(\ddot{\rho} - \rho\dot{\theta}^2\right)\overrightarrow{u_\rho} + \left(2\dot{\rho}\dot{\theta} + \rho\ddot{\theta}\right)\overrightarrow{u_\theta} \qquad \vec{a}(t) = a_\rho\,\overrightarrow{u_\rho} + a_\theta\overrightarrow{u_\theta}$$

$$\begin{cases} a_\rho = \ddot{\rho} - \rho\dot{\theta}^2 \\ a_\theta = 2\dot{\rho}\dot{\theta} + \rho\ddot{\theta} \end{cases} \quad => \quad \|\vec{a}(t)\| = \sqrt{{a_\rho}^2 + {a_\theta}^2} = \sqrt{(\ddot{\rho} - \rho\dot{\theta}^2)^2 + (2\dot{\rho}\dot{\theta} + \rho\ddot{\theta})^2}$$

5.4-Coordonnées cylindrique

Coordonnées cylindrique = coordonnée polaire +z

a) *vecteur position :*

le vecteur position est donné par : $\overrightarrow{OM} = \rho\overrightarrow{u_\rho} + z\vec{k}$ $=> \|\overrightarrow{OM}\| = \sqrt{\rho^2 + z^2}$

b) *vecteur vitesse :*

D'après la définition :

$$\vec{v}(t) = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d(\rho\overrightarrow{u_\rho} + z\vec{k})}{dt} = \dot{\rho}\,\overrightarrow{u_\rho} + \rho\frac{d\overrightarrow{u_\rho}}{dt} + \dot{z}\,\vec{k} \qquad \text{or} \qquad \frac{d\overrightarrow{u_\rho}}{dt} = \dot{\theta}\overrightarrow{u_\theta}$$

$$\vec{v}(t) = \dot{\rho}\,\overrightarrow{u_\rho} + \rho\dot{\theta}\overrightarrow{u_\theta} + \dot{z}\,\vec{k} \qquad \vec{v}(t) = v_\rho\,\overrightarrow{u_\rho} + v_\theta\overrightarrow{u_\theta} + v_z\vec{k}$$

$$\begin{cases} v_\rho = \dot{\rho} \\ v_\theta = \rho\dot{\theta} \\ v_z = \dot{z} \end{cases} \quad => \quad \|\vec{v}(t)\| = \sqrt{{v_\rho}^2 + {v_\theta}^2 + {v_z}^2} = \sqrt{\dot{\rho}^2 + (\rho\dot{\theta})^2 + \dot{z}^{\,2}}$$

c) *vecteur accélération:*

D'après la définition :

$$\vec{a}(t) = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\dot{\rho}\,\overrightarrow{u_\rho} + \rho\dot{\theta}\overrightarrow{u_\theta} + \dot{z}\,\vec{k}\right)$$

$$=> \vec{a}(t) = \ddot{\rho}\vec{u_\rho} + \dot{\rho}\dot{\vec{u_\rho}} + \dot{\rho}\dot{\theta}\vec{u_\theta} + \rho\ddot{\theta}\vec{u_\theta} + \rho\dot{\theta}\dot{\vec{u_\theta}} + \ddot{z}\,\vec{k}$$

$$=> \vec{a}(t) = \ddot{\rho}\vec{u_\rho} + \dot{\rho}\dot{\theta}\vec{u_\theta} + \dot{\rho}\dot{\theta}\vec{u_\theta} + \rho\ddot{\theta}\vec{u_\theta} + \rho\dot{\theta}(-\dot{\theta}\,\vec{u_\rho}\,) + \ddot{z}\,\vec{k}$$

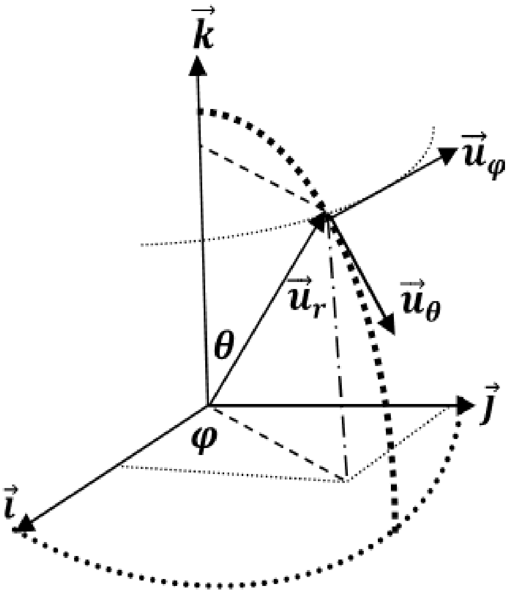
$$\vec{a}(t) = \left(\ddot{\rho} - \rho\dot{\theta}^2\right)\vec{u_\rho} + \left(2\dot{\rho}\dot{\theta} + \rho\ddot{\theta}\,\right)\vec{u_\theta} + \ddot{z}\,\vec{k}$$

$$\vec{a}(t) = a_\rho\,\vec{u_\rho} + a_\theta\vec{u_\theta} + a_z\vec{k}$$

$$\begin{cases} a_\rho = \ddot{\rho} - \rho\dot{\theta}^2 \\ a_\theta = 2\dot{\rho}\dot{\theta} + \rho\ddot{\theta} \\ a_z = \ddot{z} \end{cases} \quad => \|\vec{a}(t)\| = \sqrt{{a_\rho}^2 + {a_\theta}^2 + {a_z}^2} = \sqrt{(\ddot{\rho} - \rho\dot{\theta}^2)^2 + (2\dot{\rho}\dot{\theta} + \rho\ddot{\theta})^2 + \ddot{z}^2}$$

5.5-Coordonnées sphériques:

a) vecteur position :



le vecteur position est donné par :

$$\overrightarrow{OM} = r\ \vec{u_r} \quad => \quad \|\overrightarrow{OM}\| = r$$

b) vecteur vitesse :

D'après la définition :

$$\vec{v}(t) = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \dot{r}\ \vec{u_r} + r\dot{\vec{u_r}}$$

Base sphérique $\vec{u_r}\,, \vec{u_\theta}\,, \vec{u_\varphi}$

$$\begin{cases} \vec{u_r} = \ \sin\theta\cos\varphi\,\vec{i} + \sin\theta\sin\varphi\,\vec{j} + \cos\theta\,\vec{k} \\ \vec{u_\theta} = \cos\theta\cos\varphi\,\vec{i} + \cos\theta\sin\varphi\,\vec{j} - \sin\theta\,\vec{k} \\ \vec{u_\varphi} = -\sin\varphi\,\vec{i} + \cos\varphi\,\vec{k} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dot{\vec{u_r}} = \ \dot{\theta}\,\vec{u_\theta} + \dot{\varphi}\sin\theta\,\vec{u_\varphi} \\ \dot{\vec{u_\theta}} = -\dot{\theta}\,\vec{u_r} + \dot{\varphi}\cos\theta\,\vec{u_\varphi} \\ \dot{\vec{u_\varphi}} = -\dot{\varphi}\,(\sin\theta\,\vec{u_r} + \cos\theta\,\vec{u_\theta}) \end{cases}$$

$$\vec{v}(t) = \ \dot{r}\ \vec{u_r} + r\dot{\vec{u_r}}$$

$$=> \quad \vec{v}(t) = \ \dot{r}\ \vec{u_r} + r\dot{\theta}\,\vec{u_\theta} + r\dot{\varphi}\sin\theta\,\vec{u_\varphi}$$

$$\vec{v}(t) = v_r\,\overrightarrow{u_r} + v_\theta\overrightarrow{u_\theta} + v_\varphi\overrightarrow{u_\varphi}$$

$$\begin{cases} v_r = \dot{r} \\ v_\theta = r\dot{\theta} \\ v_\varphi = r\dot{\varphi}\sin\theta \end{cases} \qquad \|\vec{v}(t)\| = \sqrt{{v_r}^2 + {v_\theta}^2 + {v_\varphi}^2} = \sqrt{\dot{r}^2 + (r\dot{\theta})^2 + (r\dot{\varphi}\sin\theta)^2}$$

c) *vecteur accélération:*

D'après la définition :

$$\vec{a}(t) = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\dot{r}\,\overrightarrow{u_r} + r\dot{\theta}\,\overrightarrow{u_\theta} + r\dot{\varphi}\sin\theta\,\overrightarrow{u_\varphi}\right)$$

$$\vec{a}(t) = \ddot{r}\overrightarrow{u_r} + \dot{r}\dot{\overrightarrow{u_r}} + \dot{r}\dot{\theta}\,\overrightarrow{u_\theta} + r\ddot{\theta}\overrightarrow{u_\theta} + r\dot{\theta}\dot{\overrightarrow{u_\theta}} + \dot{r}\dot{\varphi}\sin\theta\,\overrightarrow{u_\varphi} + r\ddot{\varphi}\sin\theta\,\overrightarrow{u_\varphi} + r\dot{\varphi}\dot{\theta}\cos\theta\,\overrightarrow{u_\varphi} + r\dot{\varphi}\sin\theta\,\dot{\overrightarrow{u_\varphi}}$$

En remplace $(\dot{\overrightarrow{u_r}}\,;\,\dot{\overrightarrow{u_\theta}}\,;\dot{\overrightarrow{u_\varphi}})$

$$\vec{a}(t) = \left(\ddot{r} - r\dot{\theta}^{\,2} - r\dot{\varphi}^2\sin^2\theta\right)\overrightarrow{u_r} + \left(r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} - r\dot{\varphi}\sin\theta\cos\theta\right)\overrightarrow{u_\theta} + \left(r\ddot{\varphi}\sin\theta + 2r\dot{\varphi}\dot{\theta}\cos\theta + 2\dot{r}\dot{\varphi}\sin\theta\right)\overrightarrow{u_\varphi}$$

$$\vec{a}(t) = a_r\,\overrightarrow{u_r} + a_\theta\overrightarrow{u_\theta} + a_\varphi\overrightarrow{u_\varphi} \qquad \begin{cases} a_r = \ddot{r} - r\dot{\theta}^{\,2} - r\dot{\varphi}^2\sin^2\theta \\ a_\theta = r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} - r\dot{\varphi}\sin\theta\cos\theta \\ a_\varphi = r\ddot{\varphi}\sin\theta + 2r\dot{\varphi}\dot{\theta}\cos\theta + 2\dot{r}\dot{\varphi}\sin\theta \end{cases}$$

Puisque => $\|\vec{a}(t)\| = \sqrt{{a_r}^{\,2} + {a_\theta}^2 + {a_\varphi}^2}$

$$\|\vec{a}(t)\| = \sqrt{\left(\ddot{r} - r\dot{\theta}^{\,2} - r\dot{\varphi}^2\sin^2\theta\right)^2 + \left(r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} - r\dot{\varphi}\sin\theta\cos\theta\right)^2 + \left(r\ddot{\varphi}\sin\theta + 2r\dot{\varphi}\dot{\theta}\cos\theta + 2\dot{r}\dot{\varphi}\sin\theta\right)^2}$$