Université de M'sila	**Série N:** 03 **Limite-Continuité et Dérivabilité**	Faculté des Mathématiques et d'Informatique
Socle commun: 2021/2022		Module: Analyse 1

Remarque 1

l'exercice note par $(\star)$ ne sera pas corrige dans le sience de **TD**

Exercice 1 ☆

En utilisant la définition de la limite montrer que

1. $\lim_{x\to 1} \frac{2}{(x-1)^2} = +\infty$
2. $\lim_{\substack{x\to 4 \\ >}} \frac{x+8}{x-4} = +\infty.$ $(\star)$

Exercice 2 ☆

Déterminer les limites suivantes, en justifant vos calculs

1. $\lim_{\substack{x\to 0 \\ >}} 2x\ln(x+\sqrt{x})$
2. $\lim_{x\to +\infty} \frac{e^x - e^{x^2}}{x^2 - x}$, $(\star)$
3. $\lim_{x\to +\infty} (\sqrt{5+x} - \sqrt{x-3})$
4. $\lim_{x\to 0} \frac{x^2 - 2|x|}{x}$
5. $\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{x+1} - \sqrt{1-x}}{x}$,
6. $\lim_{\substack{x\to 0 \\ >}} x\left[\frac{1}{x}\right]$,
7. $\lim_{x\to +\infty} x\left[\frac{1}{x}\right]$, $(\star)$
8. $\lim_{x\to 1} \frac{x-1}{x^n - 1}$. $(\star)$

Exercice 3 ☆

Établir s'il existe des valeurs de a, pour lesquelles les fonctions suivantes sont continues au point x_0 indiqué

1. $f(x) = \begin{cases} \frac{x+1}{x^3+1} & : x \neq -1, \\ a & : x = -1. \end{cases}$ $x_0 = -1;$
2. $g(x) = \begin{cases} x\sin\frac{1}{x} & : x \neq 0, \\ a & : x = 0. \end{cases}$ $x_0 = 0.$ $(\star)$

Exercice 4 ☆

La fonction définie sur $\mathbb{R} - \{1, 0\}$ par $f(x) = 1 - x - \frac{2x\ln|x|}{x+1}$ peut-elle être prolongée par continuité en 1 ? et en 0 ? $(\star)$

Exercice 5 ☆

Etudier, à l'aide de la définition, la dérivabilité de la fonction f en x_0 si:

1. $f(x) = |x| + x^2,\ x_0 = 0;$
2. $f(x) = (x-2)[x],\ x_0 = 2;$

Exercice 6 ☆

Calculer les dérivées d'ordre $n$des fonctions suivantes:

1 $f(x) = e^{ax}$, $a \neq 0$; **2** $f(x) = \frac{1+x}{1-x}$, $(\star)$ **3** $f(x) = \sin x$.

Exercice 7 ☆

Soit la fonction f, définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x} & : x \neq 0; \\ 0 & : x = 0. \end{cases}$

1 Montrer que la fonction f est continue sur $\mathbb{R}$.

2 Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}$, et trouver f'.

3 Montrer que f' n'est pas continue au point 0.

Exercice 8 ☆

Est-ce-qu'on peut appliquer le théorème de Rolle au fonction suivantes:

1 $h(x) = \sqrt{9 - x^2}$, $x \in [-3, 3]$.

2 $f(x) = \begin{cases} 0 & : x = 0, \\ 1 - x & : x \in]0, 1], \end{cases}$

3 $g(x) = |x + 1|$, $x \in [-3, 2]$. $(\star)$

Exercice 9 ☆

Montrer à l'aide du théorème des accroissements finis que:

1 $e^x > 1 + x$, pour tout réel x.

2 $\sqrt{1 + x} \leq 1 + \frac{1}{2}x$, pour tout réel positif x. $(\star)$

Exercice 10 ☆

Montrer que l'équation $x^3 - 3x + 1 = 0$, admet au moins une racine entre 0 et 1. La racine est-elle unique ?.

Exercice 11 ☆

Soit $f : [a, b] \to [a, b]$ une fonction définie et continue sur $[a, b]$. Montrer que l'équation $f(x) = x$ admet au moins une solution dans $[a, b]$.

Exercice supplémentaire 1 ☆

Soit a et b deux nombres réels. On definit la fonction f sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \begin{cases} ax + b & : x \leq 0; \\ \frac{1}{1+x} & : x > 0. \end{cases}$

1 Donner une condition sur b pour que f soit continue sur $\mathbb{R}$.

2 Determiner a et b tels que f soit derivable sur $\mathbb{R}$ et dans ce cas calculer $f'(0)$.

Exercice supplémentaire 2 ☆☆

Soit f une fonction périodique sur $\mathbb{R}$

1 Montrer que f est bornée.

2 Montrer que si f admet une limite lorsque x tend vers $+\infty$ alors $f \equiv l$.

3 Application: $f(x) = \cos x$ et $f(x) = \sin x$.

Exercice supplémentaire 3 ☆

Soit f la fonction définie par $f(x) = \sqrt{x^2 + 3x - 4}$

1 Déterminer son ensemble de définition.

2 Montrer que la restriction de f à $]1, +\infty[$ admet une fonction réciproque f^{-1}.

3 Éxpeimer f^{-1} en fonction de x.

Exercice supplémentaire 4 ☆

Soient a un réel et f une fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \begin{cases} \dfrac{a - x^2}{2} & : x \leq 1 \\ \dfrac{1}{2x} & : x > 1 \end{cases}$

1 Déterminer a pour que soit f continue en point 1.

2 Posons $a = 2$. Alors,

(a) Déduire la continuité de f sur $\mathbb{R}$.

(b) Étudier la dérivabilité de f sur $\mathbb{R}$.

(c) Montrer qu'il existe $c \in]0, 1[$ tel que: $f(1) - f(0) = (1 - 0)f'(c)$.

⋆ **Bonne chance** ⋆