Correction d'exercice 1

1. On montre $\lim_{x\to 1}\frac{2}{(x-1)^2}=+\infty$. Donc, $\lim_{x\to 1}\frac{2}{(x-1)^2}=+\infty$ si et seulement si

$$\forall \varepsilon>0,\ \exists \alpha>0,\ \forall x\in\mathbb{R}\setminus\{1\} : |x-1|\Rightarrow f(x)>\varepsilon. \tag{1}$$

Soit $\varepsilon>0$, alors, on a

$$f(x)>\varepsilon \Leftrightarrow (x-1)^2<\frac{\varepsilon}{2}\Leftrightarrow |x-1|<\sqrt{\frac{\varepsilon}{2}},$$

il suffit choisir $\alpha=\sqrt{\frac{\varepsilon}{2}}$, pour garantir la condition (1). D'où le résultat.

2. Montrons $\lim_{\substack{x\to 4\\ >}}\frac{x+8}{x-4}=+\infty$. Donc, nous devons vérifier la condition,

$$\forall \varepsilon>0,\ \exists \alpha>0,\ \forall x\in]4,+\infty[: x-4<\alpha\Rightarrow f(x)>\varepsilon. \tag{2}$$

Soit $\varepsilon>0$, alors, on a

$$f(x)>\varepsilon \Leftrightarrow (1+\frac{12}{x-4})<\varepsilon\Leftrightarrow x-4<\frac{12}{\varepsilon-1},\ (\varepsilon>1),$$

il suffit choisir $\alpha=\frac{12}{\varepsilon-1}, (\varepsilon>1)$ pour garantir la condition (2). D'où le résultat.

★★☆☆

Correction d'exercice 2

On calcule les limites suivantes.

1. $\lim_{x\to 0^+}2x\ln(x+\sqrt{x})=\lim_{x\to 0^+}x\ln(x)+\lim_{x\to 0^+}2x\ln(\sqrt{x}+1)=0.$
2. $\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x-e^{x^2}}{x^2-x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x^2}\left(\frac{1-e^{x^2-x}}{1-\frac{1}{x}}\right)=+\infty(-\infty)=-\infty$, car $\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x^2}=+\infty$.
3. On multiplier par le conjugué, on obtient

$$\lim_{x\to+\infty}(\sqrt{5+x}-\sqrt{x-3})=\lim_{x\to+\infty}(\frac{8}{\sqrt{5+x}+\sqrt{x-3}})=0$$

4. Calculons $\lim_{x\to 0}\frac{x^2-2|x|}{x}$. Alors, on distinguer deux cas
   a. Si $x>0$, on a $\lim_{x\to 0}\frac{x^2-2|x|}{x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{x^2-2x}{x}=\lim_{x\to 0^+}(x-2)=-2.$
   b. Si $x<0$, on a $\lim_{x\to 0}\frac{x^2-2|x|}{x}=\lim_{x\to 0^-}\frac{x^2-2x}{x}=\lim_{x\to 0^+}(x+2)=2$. Alors, la limite n'existe pas.
5. Comme la fonction $x\mapsto\sqrt{x+1}-\sqrt{1-x}$ est dérivable sur $]-1,1[$ en point 0. Alors,

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{1-x}}{x}=(\sqrt{x+1}-\sqrt{1-x})'_{x=0}=\left(\frac{1}{2\sqrt{1+x}}+\frac{1}{2\sqrt{1-x}}\right)_{x=0}=1.$$

★★☆☆

6. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-(1-2\sin^2\frac{x}{2})}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin^2\frac{x}{2}}{2\frac{x^2}{4}}=\dfrac{1}{2}\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x^2}{2}}\right)^2=\dfrac{1}{2}.$

7. Soit $n\in\mathbb{N}^*$, alors, $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x-1}{x^n-1}=\lim\limits_{x\to 1}\frac{x-1}{(x-1)(x^{n-1}+x^{n-2}+...x+1)}=\lim\limits_{x\to 1}\frac{1}{(x^{n-1}+x^{n-2}+...x+1)}=1.$

8. On a $\forall x\in\mathbb{R}_+^*:\dfrac{1}{x}-1\leqslant\left[\dfrac{1}{x}\right]<\dfrac{1}{x}\Rightarrow\forall x\in\mathbb{R}_+^*:1-x\leqslant x\left[\dfrac{1}{x}\right]<1$, comme $\lim\limits_{x\to 0^+}(1-x)=\lim\limits_{x\to 0^+}1=1.$
On a aussi un résultat similaire si $x\in\mathbb{R}_-^*$. Alors, d'après le théorème des gendarmes, on a $\lim\limits_{x\to 0^+}xE\left(\frac{1}{x}\right)=1.$

9. On a $\forall x>1:0<\dfrac{1}{x}<1\Rightarrow\forall x>1:\left[\dfrac{1}{x}\right]=0\Rightarrow\forall x>1:x\left[\dfrac{1}{x}\right]=0$. Donc, $\lim\limits_{x\to+\infty}xE\left(\frac{1}{x}\right)=0.$

Correction d'exercice 3

On cherche s'il existe des valeurs de a, pour lesquelles les fonctions suivantes sont continues au point x_0 indiqué

1. Pour $f(x)=\begin{cases}\frac{x+1}{x^3+1} & :x\neq-1,\quad x_0=-1.\\ a & :x=-1.\end{cases}$ On a rappel que,

$$f \text{ est continue au point } x_0\Leftrightarrow\lim_{x\to x_0}f(x)=f(x_0).$$

On a $D_f=\mathbb{R}=]-\infty,+\infty[$, et

$$\lim_{x\to-1}f(x)=\lim_{x\to-1}\frac{x+1}{x^3+1}=\lim_{x\to-1}\frac{x+1}{(x+1)(x^2-x+1)}=\lim_{x\to-1}\frac{1}{x^2-x+1}=\frac{1}{3}.$$

Donc, f est continue au point $-1\Leftrightarrow f(-1)=a\Leftrightarrow a=\dfrac{1}{3}.$

2. Si $g(x)=\begin{cases}x\sin\frac{1}{x} & :x\neq 0,\quad x_0=0.\\ a & :x=0.\end{cases}$ Alors, on a $D_g=\mathbb{R}=]-\infty,+\infty[$, et

$$\forall x\in\mathbb{R}^*:-1\leqslant\sin\frac{1}{x}\leqslant 1\Leftrightarrow\begin{cases}\forall x\in\mathbb{R}_+^*:-x\leqslant x\sin\frac{1}{x}\leqslant x.\\ \forall x\in\mathbb{R}_-^*:x\leqslant x\sin\frac{1}{x}\leqslant -x.\end{cases}$$

Donc, $\begin{cases}0=\lim\limits_{x\to 0^+}(-x)\leqslant\lim\limits_{x\to 0^+}x\sin\frac{1}{x}\leqslant\lim\limits_{x\to 0^+}(x)=0.\\ 0=\lim\limits_{x\to 0^-}(x)\leqslant\lim\limits_{x\to 0^-}x\sin\frac{1}{x}\leqslant\lim\limits_{x\to 0}(-x)=0.\end{cases}$ D'après le théorème des gendares, on obtient $\lim\limits_{x\to 0}x\sin\frac{1}{x}=0$. Par concéquant
g est continue au point $0\Leftrightarrow f(0)=0\Leftrightarrow a=0.$

★★☆☆

Correction d'exercice 4

Soi f une fonction définie sur $\mathbb{R}-\{-1,0\}$ par $f(x)=1-x-\frac{2x\ln|x|}{x+1}$ On étude la prolongement de f par continuité en 0 et en -1.

1. On a $D_f=\mathbb{R}\setminus\{-1,0\}$, et

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ >}}f(x)=\lim_{\substack{x\to 0\\ >}}\left(1-x-\frac{2x\ln x}{x+1}\right)=1,$$

★★☆☆

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ <}} f(x)=\lim_{\substack{x\to 0\\ <}}\left(1-x-\frac{2(-x)\ln(-x)}{x+1}\right)=1,$$

c'est-à-dire, $\lim_{x\to 0} f(x)=1$. Donc f est prolongeable par continuité en $x_0=0$ et sa prolongement $\tilde{f}$ est définie par

$$\tilde{f}(x)=\begin{cases}1-x-\frac{2x\ln|x|}{x+1} & : x\in\mathbb{R}-\{-1,0\}\\ 1 & : x=0\end{cases}$$

2. $\lim_{\substack{x\to -1\\ >}} f(x)=4=\lim_{\substack{x\to -1\\ <}} f(x)$, car $\lim_{\substack{x\to -1\\ >}}\frac{\ln(-x)}{x+1}=(\ln(-x))'_{x=-1}=\left(\frac{1}{x}\right)_{x=-1}=-1=\lim_{\substack{x\to -1\\ <}}\frac{\ln(-x)}{x+1}$. Donc f est prolongeable par continuité en $x_1=-1$ et sa prolongement $\check{f}$ est définie par

$$\check{f}(x)=\begin{cases}1-x-\frac{2x\ln|x|}{x+1} & : x\in\mathbb{R}-\{-1,0\}\\ 4 & : x=-1\end{cases}$$

Remarque 1

On peut prolongeant f par continuité sur $\mathbb{R}$, sa prolongement $\hat{f}$ est définie par

$$\hat{f}(x)=\begin{cases}1-x-\frac{2x\ln|x|}{x+1} & : x\in\mathbb{R}-\{-1,0\}\\ 1 & : x=0\\ 4 & : x=-1\end{cases}$$

Dans ce cas la $\hat{f}$ est continue sur $\mathbb{R}$.

★★☆☆

Correction d'exercice 5

Montrons que l'équation $x^3-3x+1=0$, admet au moins une racine entre 0 et 1.

1. Soit la fonction f définie sur $[0,1]$ par $f(x)=x^3-3x+1$. Alors, on a f est continue sur $[0,1]$, (fonction polynôme). On a aussi $f(0)=1$, $f(1)=-1$, donc $f(0)\times f(1)=-1<0$. Alors, d'après le théorème des valeurs intermédiaires (TVI), l'équation $f(x)=0$ admet au moins une racine dans $[0,1]$.
2. Comme $f'(x)=3(x-1)(x+1)$, c'est-à-dire f' est strictement décroissante sur $[0,1]$, car $x\in[0,1]\Leftrightarrow f'(x)<0$. Alors, d'après le théorème précédante (corollaire) la solution est unique.

★★☆☆

Correction d'exercice 6

Soit f une fonction définie et continue sur $[a,b]$ à valeur dans $[a,b]$. Montrer que l'équation $f(x)=x$ admet au moins une solution dans $[a,b]$.
Posons $g(x)=f(x)-x$, $x\in[a,b]$. Alors, on a :

1. La fonction g est continue, car somme de 2 fonctions continue.
2. Comme $g(a)=f(a)-a>0$, et $g(b)=f(b)-b<0$, Alors, d'après le théorèmes des valeurs intérmidiaires (TVI); $g(x)=0$, admet au moins une solution dans $[a,b]$. D'où le résultat.

★★☆☆

Remarque 2

Pour la question 1 dans correction d'exercice (6) on peut montrer que f est uniformément continue, ce qui implique que la continuité de f sur $[a, b]$.

★★☆☆

Correction d'exercice 7

On étude la dérivabilité de la fonction f en x_0, tel que en utilisant la définition,

1. Pour $f(x) = |x| + x^2$, $x_0 = 0$; on a $D_f = \mathbb{R}$, et

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ >}} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{\substack{x \to 0 \\ >}} \frac{x^2 + x}{x} = \lim_{\substack{x \to 0 \\ >}} (x+1) = 1.$$

Donc f est dérivable à droite de point $x_0 = 0$ et la dérivée à droite en 0 est $f'_d(0) = 1$.

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ <}} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{\substack{x \to 0 \\ <}} \frac{x^2 + x}{x} = \lim_{\substack{x \to 0 \\ <}} (x-1) = -1.$$

Donc f est dérivable à gauche de point $x_0 = 0$ et la dérivée à gauche en 0 égale $f'_g(0) = -1$. D'ou le résultat, la dérivabilié de f en 0 n'est pas satisfaite.

2. Soit la fonction $f(x) = (x-2)[x]$, $x_0 = 2$. Alors, $D_f = \mathbb{R}$, et on a

Si $x \geqslant 0$, $\lim\limits_{\substack{x \to 2 \\ >}} \dfrac{(x-2)[x]}{x-2} = \lim\limits_{\substack{x \to 2 \\ >}} [x] = 2$. Donc, $f'_d(0) = 2$.

Si $x \leqslant 0$, $\lim\limits_{\substack{x \to 2 \\ <}} \dfrac{(x-2)[x]}{x-2} = \lim\limits_{\substack{x \to 2 \\ <}} [x] = 1$. Donc, $f'_g(0) = 1$. Comme $f'_d(0) \neq f'_g(0)$, on en déduit f n'est pas dérivable en 2.

★★☆☆

Correction d'exercice 8

On Calcule les dérivées $n-$ ièmes des fonctions suivantes :

1. Soit $a \neq 0$, et $f(x) = e^{ax}$. $f'(x) = ae^{ax}$, $f''(x) = a^2e^{ax}$, et $f^{(3)}(x) = a^3e^{ax}$, donc, on peut en déduit que $f^{(n)}(x) = a^ne^{ax}$, et puis, le résultat être assuré par récurrence.

2. Pour $f(x) = \frac{1+x}{1-x}$. $f'(x) = \dfrac{2}{(1-x)^2}$, $f''(x) = \dfrac{2\times 2}{(1-x)^3}$, et $f^{(3)}(x) = \dfrac{2\times 2\times 3}{(1-x)^4}$, donc, on en déduit $f^{(n)}(x) = \dfrac{2\times(n!)}{(1-x)^{n+1}}$.

3. Si $f(x) = \sin x$. Alors, on a $f'(x) = \cos(x) = \sin(x + \frac{\pi}{2})$, $f''(x) = -\sin(x) = \sin(x + 2\frac{\pi}{2})$, et $f^{(3)}(x) = -\cos(x) = \sin(x + 3\frac{\pi}{2})$, et par ce suite, on en déduit que $f^{(n)}(x) = \sin^{(n)}(x) = \sin(x + n\frac{\pi}{2})$. On a aussi un résultat analogue pour la fonction cos, qui est

$$f^{(n)}(x) = \cos^{(n)}(x) = \cos(x + n\frac{\pi}{2}).$$

★★☆☆

Correction d'exercice 9

Est-ce-qu'on peut appliquer le théorème de Rolle au fonction suivantes :

1. Si $f(x)=\sqrt{9-x^2}$, $x\in[-3,3]$. Alors, nous avons
   - a) Claire, f est continue sur $[-3,3]$.
   - b) f est pas dérivable sur $]-3,3[$.
   - c) $f(-3)=0$, $f(3)=0$. Par concéquant, le théorème de Rolle est applicable sur f.

   Si $g(x)=\begin{cases} 0 & : x=0, \\ 1-x & : x\in]0,1], \end{cases}$
   g n'est pas continue au point 0. donc, on ne peut pas appliquer le théorème de Rolle sur g. malgré, les autres deux conditions sont vérifiées

3. Pour la fonction $h(x)=|x+1|$, $x\in[-3,2]$, on a

   h est continue sur $\mathbb{R}$, donc elle continue sur l'intervalle $[-3,2]\subset\mathbb{R}$.
   - b) h n'est pas dérivable sur $]-3,2[$ car, elle n'est pas en -1.
   - c) $h(-3)=|-2|=2$, $h(2)=|4|=4$, donc, $h(-3)\neq h(2)$. Alors, le théorème de Rolle n'est pas applicable sur h.

★★☆☆

Correction d'exercice 10

En utilisant le théorème de accroissements finis (T.A.F).

1. a) Si $x\geqslant 0$, posons $f(x)=e^x$, alors, f est vérifiée les conditions de (T.A.F) Donc, $c\in]0,+\infty[$, telle que $e^x-1=xe^c>x$, car $c\geqslant 0\Rightarrow e^c\geqslant 1$ i.e.,

$$\forall x\in[0,+\infty[: e^x>x+1.$$

   b) de même, si $x\leqslant 0$, car $e^c\in]0,1[$.

2. Posons $f(x)=\sqrt{1+x}$ sur $[0,x]$, $x\geqslant 0$, d'après (T.A.F), on a

$$\sqrt{1+x}=1+\frac{1}{2\sqrt{1+c}}x\leqslant 1+\frac{1}{2}x,$$

   car $c\in]0,x[\Leftrightarrow\sqrt{1+c}>1\Leftrightarrow 0<\dfrac{1}{2\sqrt{1+c}}<\dfrac{1}{2}$.

3. Similaire

★★☆☆

Correction d'exercice 11

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x)=\begin{cases} x^2\sin\frac{1}{x} & : x\neq 0; \\ 0 & : x=0. \end{cases}$$

1. Montrons que f est continue sur $\mathbb{R}$.
   Si $x\in\mathbb{R}^*$, on a les fonction $x\mapsto x^2$ (polynôme) et $x\mapsto\sin(x)$ sont continues, donc la fonction composée $x\mapsto x^2\sin\left(\dfrac{1}{x}\right)$ et aussi continue sur $\mathbb{R}^*$.

★★☆☆

Si $x=0$, alors, on a
$$\forall x\in\mathbb{R}^*: -x^2\leqslant x^2\sin\left(\frac{1}{x}\right)\leqslant x^2,$$
donc, par le théorème des gendarmes, on a $\lim\limits_{x\to 0} x^2\sin\left(\frac{1}{x}\right)=0$, c'est-à-dire f continue en 0, en fin elle est continue sur $\mathbb{R}$ tout entier.

2 a f est est dérivable sur $\mathbb{R}$. En effet,
Si $x\in\mathbb{R}^*$, on les fonction $x\mapsto x^2$ (polynôme) et $x\mapsto \sin(x)$ sont dérivables, donc la fonction composée $x\mapsto x^2\sin\left(\frac{1}{x}\right)$ et aussi dérivable sur $\mathbb{R}^*$.

b Si $x=0$, alors, on a un résultat similaire à la relation (7), i.e.,
$$\forall x\in\mathbb{R}^*: -1\leqslant \sin\frac{1}{x}\leqslant 1 \Leftrightarrow \begin{cases}\forall x\in\mathbb{R}^*_+: -x\leqslant x\sin\frac{1}{x}\leqslant x.\\ \forall x\in\mathbb{R}^*_-: x\leqslant x\sin\frac{1}{x}\leqslant -x.\end{cases}.$$
Donc, $\begin{cases}0=\lim\limits_{x\to 0^+}(-x)\leqslant \lim\limits_{x\to 0^+} x\sin\frac{1}{x}\leqslant \lim\limits_{x\to 0^+}(x)=0.\\ 0=\lim\limits_{x\to 0^-}(x)\leqslant \lim\limits_{x\to 0^-} x\sin\frac{1}{x}\leqslant \lim\limits_{x\to 0}(-x)=0.\end{cases}$. Par conéquant, on aura
$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2\sin\left(\frac{1}{x}\right)}{x}=\lim_{x\to 0}(x\sin\left(\frac{1}{x}\right))=0=f'(0).$$
D'où la dérivabilité de f sur $\mathbb{R}$.

c Par un calcule sur les dérivées des fonctions usuelle, on trouve,
$$f'(x)=\begin{cases}2x\sin\left(\frac{1}{x}\right)-\cos\left(\frac{1}{x}\right) & x\neq 0\\ 0 & x=0.\end{cases}$$

3 f' n'est pas contine au point 0. En effet, la fonction $x\mapsto 2x\sin\left(\frac{1}{x}\right)$, elle est claire continue sur $\mathbb{R}$. Mais la fonction $x\mapsto \cos\left(\frac{1}{x}\right)$ n'est pas continue en 0, c'est-à-dire la somme n'est pas continue en 0.

CORRECTION D'EXERCICE 12

1 On a $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ >}} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ >}}\frac{1}{2x}=\frac{1}{2}$, et $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ <}} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ <}}\frac{a-x^2}{2}=\frac{a-1}{2}=f(1)$. Donc, on aura
$$f \text{ est continue en } 1\Leftrightarrow \frac{a-1}{2}=\frac{1}{2}\Leftrightarrow a=2.$$

2 Posons $a=2$. Alors, on a
$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{2-x^2}{2} & : x\leqslant 1\\ \dfrac{1}{2x} & : x>1\end{cases}$$

★★☆☆

(a) D'après ce qui précède, et comme les fonctions $x \mapsto \frac{2-x^2}{2}$ et $x \mapsto \frac{1}{2x}$ (resp) sont continues sur les intervalles $]-\infty, 1[$ et $]1, +\infty[$ (resp). D'où le résultat, f est continue sur $\mathbb{R}$.

(b) La fonction $x \mapsto \frac{2-x^2}{2}$ est dérivable sur $]-\infty, 1[$, car elle est polynôme. et la fonction $x \mapsto \frac{1}{2x}$ aussi dérivable sur $]1, +\infty[$, car elle est rationnelle. Donc, il est rest de démonter la dérivabilité en point 1.

$$\lim_{\substack{x \to 1 \\ <}} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{\substack{x \to 1 \\ <}} \frac{\frac{2-x^2}{2} - \frac{1}{2}}{x-1} = \lim_{\substack{x \to 1 \\ <}} \frac{1-x^2}{2(x-1)} = \lim_{\substack{x \to 1 \\ <}} \frac{-(x+1)}{2} = -1 = f'_g(1).$$

$$\lim_{\substack{x \to 1 \\ >}} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{\substack{x \to 1 \\ >}} \frac{\frac{1}{2x} - \frac{1}{2}}{x-1} = \lim_{\substack{x \to 1 \\ >}} \frac{-1}{2x} = -\frac{1}{2} = f'_d(1).$$

$f'_d(1) \neq f'_g(1)$, c'est-à-dire, f n'est pas dérivable en point 1. Donc, f est dérivable seulement sur $\mathbb{R}^*$.

(c) D'après ce qui précède f continue sur $[0, 1] \subset \mathbb{R}$ et dérivable sur $]0, 1[\subset]-\infty, 1[$. donc, de le théorème des accroissements finis **??**, il existe $c \in]0, 1[$ tel que $f(1)-f(0) = (1-0)f'(c)$. On a $f(1) = \frac{1}{2}$, $f(0) = 1$ et $f'(c) = -c$. alors,

$$f(1) - f(0) = (1-0)f'(c) \Leftrightarrow f'(c) = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow c = \frac{1}{2} \in]0, 1[.$$