الفصل الثاني

العزم الحركي في ميكانيك الكم

Chaptre two

الفصل الثاني

العزم الحركي في ميكانيك الكم

Angular momentum in Quantum Mechanics

1. مقدمة

إن المقدار الفيزيائي المسمى بالعزم الحركي يلعب دورا مهما جدا سواء في ميدان ميكانيك الكم أو الميكانيك الكلاسيكي. فهو يمثل في الميكانيك الكلاسيكي أحد المقادير المحفوظة بالنسبة لتطور جملة معزولة مع الزمن وذلك بالإضافة إلى طاقتها واندفاعها. كما أنه محفوظ أيضا بالنسبة للمسائل التي تدرس حركة جسيم خاضع لقوة مشتقة من كمون مركزي كما هو معروف. سنعود لدراسة هذه المسألة الأخيرة في إطار ميكانيك الكم في الفصل - لنطبق عليها النظريات التي سنثبتها في هذا الفصل. كذلك تبرز فائدة هذا المقدار، أي العزم الحركي، في ميكانيك الكم من حيث أهميته في تصنيف الأطياف الذرية والجزيئية والنووية، سبين الجسيمات وكذلك مغناطيسية المواد، وتفسير بعض الظواهر كمفعول زيمان المغناطيسي وغيرها كثير.

سنميز في هذه الدروس نوعين من لعزوم الحركية:

- العزم الحركي المداري $\mathbf{L}$ (orbital anguler momentum) والذي يملك المقدار المكافئ الكلاسيكي له والمعرف ب $\mathcal{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}$.
- العزم الحركي الذاتي، والذي نسميه سبين Spin ونرمز له ب $\mathbf{S}$، وهو مقدار كمومي بحت فهو لا يملك نظيرا له في الميكانيك الكلاسيكي.

في الحقيقية، سنرمز بصفة عامة للعزم الحركي بالحرف $\mathbf{J}$ للعزم الحركي سواء كان مداريا أو عزم سبين أو مجموعهما أو تركيب عزوم حركية من أنواع مختلفة

$$\mathbf{J} = \sum_i \mathbf{L}_i \quad \text{أو} \quad \mathbf{J} = \sum_i \mathbf{S}_i \quad \text{أو} \quad \mathbf{J} = \sum_i (\mathbf{L}_i + \mathbf{S}_i) \qquad (1\text{-}2)$$

سنتعرض لمسألة تركيب العزوم هذه في الفصل القادم.

2. علاقات تبادل العزوم الحركية

1.2 العزوم الحركية المدارية

رأينا في المقدمة تعريف العزم الحركي الكلاسيكي والذي هو عبارة عن الجداء الشعاعي لشعاع الموضع $\mathbf{r}$ و شعاع الاندفاع $\mathbf{p}$. إن المقدار المقابل له في ميكانيك الكم هو مؤثر العزم الحركي المداري والذي نتحصل عليه باستعمال قواعد التكميم المعروفة. أي انطلاقا من العبارة الكلاسيكية نقوم بتحويل المقدارين الأساسين $\mathbf{r}$ و $\mathbf{p}$ إلى الملحوظتين $\mathbf{R}$ و $\mathbf{P}$ مع الأخذ بعين الاعتبار القيام بعملية التناظر إن لزم الأمر للحفاظ على هرميتية المؤثر الذي نريد تكميمه. في الحقيقة سنرى أنه لا داعي لهذه العملية في حالة العزم الحركي المداري.

$$\boldsymbol{\mathcal{L}}(\mathcal{L}_x, \mathcal{L}_y, \mathcal{L}_z) = \mathbf{r} \times \mathbf{p} \xrightarrow{\text{قواعد التكميم}} \mathbf{L}(L_x, L_y, L_z) = \mathbf{R} \times \mathbf{P} \qquad (2\text{-}2)$$

حسب التعريف الكلاسيكي سنتحصل على المركبات كما يلي:

$$\begin{cases} \mathcal{L}_x = yp_z - zp_y \iff L_x = YP_z - ZP_y \\ \mathcal{L}_y = zp_x - xp_z \iff L_y = ZP_x - XP_z \\ \mathcal{L}_z = xp_y - yp_x \iff L_z = XP_y - YP_x \end{cases} \qquad (3\text{-}2)$$

من خلال علاقات التبادل بين مركبات مؤثر الموضع ومؤثر الاندفاع $[R_i, P_j] = i\hbar\delta_{ij}$ نلاحظ أن مركبات العزم الحركي المداري هي مؤثرات هرميتية، ولذلك لا داعي للقيام بعملية تنظير لها (symetrization).

سنقوم بحساب المبدلات بين المركبات المختلفة للعزم الحركي المداري انطلاقا من تلك الخاصة بمؤثر الموضع والاندفاع كالتالي:

$$\begin{aligned}[L_x, L_y] &= [YP_z - ZP_y, ZP_x - XP_z] \\ &= Y\underbrace{[P_z, Z]}_{=-i\hbar}P_x + X\underbrace{[Z, P_z]}_{i\hbar}P_y \\ &= i\hbar\underbrace{\left(XP_y - YP_x\right)}_{=L_z}\end{aligned}$$

نجد في النهاية إذن علاقة التبادل الأولى:

$$[L_x, L_y] = i\hbar L_z \tag{4-2}$$

باتباع نفس الخطوات السابقة يمكن أن نبرهن العلاقتين التاليتين:

$$[L_y, L_z] = i\hbar L_x \tag{5-2}$$

$$[L_z, L_x] = i\hbar L_y \tag{6-2}$$

يمكن ملاحظة أنه يمكن الحصول عليها باجراء تبادل دوري بين مركبات العزم الحركي cyclic permutation

2.2 تعميم علاقات التبادل

في ميكانيك الكم، نتفق على أن نسمي عزما حركيا $\mathbf{J}$ كل مقدار فيزيائي شعاعي مُمثلا بمؤثر شعاعي تحقق مركباته الكارتيزية $\left(J_x, J_y, J_z\right)$ نفس علاقات التبادل التي يحققها العزم الحركي المداري (2-4) و (2-5) و (2-6) . أي:

$$\begin{cases}[J_x, J_y] = i\hbar J_z \\ [J_y, J_z] = i\hbar J_x \\ [J_z, J_x] = i\hbar J_y\end{cases} \tag{7-2}$$

والتي يمكن تكثيفها في العلاقة الشعاعية التالية

$$\mathbf{J} \times \mathbf{J} = i\hbar\mathbf{J} \tag{8-2}$$

مع مراعاة أننا نتعامل مع مؤثرات شعاعية وليس مع أشعة عادية حتى تكون هذه العبارة معدومة. فيجب التنبه في كل مرة نجري فيها عمليات من هذا النوع على المؤثرات. لدينا أيضا

$$\mathbf{J}^2 = J_x^2 + J_y^2 + J_z^2 \tag{9-2}$$

انطلاقا من علاقات التبادل (2-7) والعبارة (2-9)، يمكن أن نبرهن ما يلي:

$$[\mathbf{J}^2, J_x] = [\mathbf{J}^2, J_y] = [\mathbf{J}^2, J_z] = 0 \tag{10-2}$$

على سبيل المثال:

$$\begin{aligned}[\mathbf{J}^2, J_x] &= [J_y^2 + J_z^2, J_x] = [J_y^2, J_x] + [J_z^2, J_x] \\ &= J_y\underbrace{[J_y, J_x]}_{=-i\hbar J_z} + \underbrace{[J_y, J_x]}_{=-i\hbar J_z}J_y + J_z\underbrace{[J_z, J_x]}_{=i\hbar J_y} + \underbrace{[J_z, J_x]}_{=i\hbar J_y}J_z \\ &= 0\end{aligned}$$

ملاحظة مهمة جدا

حسب علاقات التبادل (2-7) نلاحظ أنه لا يمكننا أن نقيس في وقت واحد جميع مركبات العزم الحركي $\mathbf{J}$ أو اثنان منهما، في حين أننا نستطيع حسب العلاقات (2-10) أن نقيس المقدار $\mathbf{J}^2$ بالتزامن مع قياس إحدى المركبات $\left(J_x, J_y, J_z\right)$. من أجل دراسة خصائص العزم الحركي سوف نختار

في باقي الدروس الثنائية $\{\mathbf{J}^2, J_z\}$ كما هو شائع في كتب ميكانيك الكم. في الحقيقة النتائج لا تتعلق باختيار مركبة العزم الحركي وفق المحور (Oz)، بل هي صحيحة من أجل المركبات الأخرى، فقط يجب أن نتذكر أنه لا يمكن أخذ اثنين من المركبات مع قياس الملحوظة $\mathbf{J}^2$ في نفس الوقت لأنها مركبات غير متوافقة *incompatible observables* كما رأينا من علاقات التبادل السابقة، بل نأخذ مركبة واحدة فقط كما ينفعل فيما يأتي من الدروس.

3. النظرية العامة للعزم الحركي في ميكانيك الكم

بما أن الثنائية $\{\mathbf{J}^2, J_z\}$ تتبادل فيما بينها فإننا سنقوم في هذه الفقرة بالحث عن خصائص الأشعة الذاتية المشتركة بينهما وكذلك خصائص القيم الذاتية لكل منهما. سنشير لمجموعة الأشعة الذاتية المشتركة لهما بالرمز $\{|j,m\rangle\}$، حيث يعود الدليل j إلى الملحوظة $\mathbf{J}^2$ بينما الدليل m متعلق بالملحوظة J_z. سنحتاج في طرحنا هنا لنظرية العزوم الحركية إلى إدخال مؤثرات تسهل علينا عملية البحث عن هذه الخصائص بفضل العلاقات الجبرية التي تربطها مع مركبات العزم الحركي ومع بعضها البعض. كما تظهر أهميتها أيضا في تطبيقات عديدة للعزوم الحركة.

1.3 مؤثرات الرفع والخفض $J_\pm$

بعد اختيارنا للمركبة J_z لندرسها مع لملحوظة $\mathbf{J}^2$، يمكننا أن نعرف مؤثر الرفع J_+ ومؤثر الخفض J_- بالنسبة للعزوم الحركية بدلالة المركبات الأخرى (J_x, J_y) كما يلي:

$$\begin{cases} J_+ = J_x + iJ_y & (a) \\ J_- = J_x - iJ_y & (b) \end{cases} \tag{11-2}$$

نلاحظ من خلال هذا التعريف أن:

$$(J_+)^+ = J_- \quad \text{و} \quad (J_-)^+ = J_+ \tag{12-2}$$

والذي يدل على أن كلاهما ليس مؤثرا هرميتيا. إن تسميتهما بمؤثر الرفع والخفض ستظهر فيما بعد حينما نقوم بدراسة تأثيرهما على الأشعة الذاتية المشتركة $|j,m\rangle$ حيث سنبرهن أن تأثير J_+ على هذا الشعاع يتسبب في رفع قيمة m برتبة واحدة فيما يخفضها J_- برتبة واحدة. ثم إن هذه التسمية شبيهة بتسميات مؤثرات الخفض والرفع التي نستعملها في دراسة خصائص الأشعة الذاتية والقيم الذاتية لهاملتوني الهزاز التوافقي حين نتبع الطريقة الجبرية[3]. يمكن أيضا قلب العلاقة (2-11) من أجل كتابة المركبات (J_x, J_y) بدلالة (J_+, J_-) لنتحصل على:

$$\begin{cases} J_x = \dfrac{1}{2}(J_+ + J_-) & (a) \\ J_y = \dfrac{1}{2i}(J_+ - J_-) & (b) \end{cases} \tag{13-2}$$

باستخدام هذه التعاريف مع علاقات التبادل (2-7) يمكن أن نبرهن العلاقات البسيطة والمهمة التالية:

$$[J_z, J_+] = \overbrace{[J_z, J_x]}^{=i\hbar J_y} + i\,\overbrace{[J_z, J_y]}^{=-i\hbar J_x} = \hbar J_+ \tag{14-2}$$

بنفس الطريقة نبرهن الاتي:

$$[J_z, J_-] = -\hbar J_- \tag{15-2}$$

$$[J_+, J_-] = 2\hbar J_z \tag{16-2}$$

كما يمكن أن نبرهن انطلاقا من (2-9) أن المؤثر $\mathbf{J}^2$ يتبادل مع مؤثري الرفع والخفض:

$$[\mathbf{J}^2, J_+] = [\mathbf{J}^2, J_-] = 0 \tag{17-2}$$

سنحتاج فيما بعد إلى نتيجة التأثير المتتابع لمؤثري الخفض والرفع، لذلك سيكون من الجيد أن نبرهن ما يلي

[3] كما تسمى في نظرية الحقول الكمومية بمؤثرات الخلق والفناء أو البناء والهدم أين يتم خلق كمات الحقول المدروسة Quantum Field.

$$J_+J_- = (J_x + iJ_y)(J_x - iJ_y) = J_x^2 + J_y^2 - i\overbrace{(J_xJ_y - J_yJ_x)}^{[J_x,J_y]}$$

عند القيام بنشر الجداء بين الأقواس يجب أن ننتبه جيدا إلى أننا نتعامل مع مؤثرات وليس مع أعداد، خاصة وأن هذه المؤثرات غير متبادلة فيما بينها كما برهنا ذلك في العلاقة (2-16) فيمكن أن نرتكب الخطأ الفاحش التالي إن لم ننتبه لهذه الملاحظة

$$(J_x + iJ_y)(J_x - iJ_y) \neq J_x^2 + J_y^2$$

نكتب الان إذن

$$J_+J_- = J_x^2 + J_y^2 - i\overbrace{[J_x,J_y]}^{=i\hbar J_z} \Rightarrow J_+J_- = J_x^2 + J_y^2 + \hbar J_z$$

والتي يمكن أن نكتبها أيضا بدلالة الثنائية $\{\mathbf{J}^2, J_z\}$ فقط وذلك كما يلي:

$$J_+J_- = \mathbf{J}^2 - J_z^2 + \hbar J_z \qquad (18\text{-}2)$$

وبنفس الطريقة نتحصل على

$$J_-J_+ = \mathbf{J}^2 - J_z^2 - \hbar J_z \qquad (19\text{-}2)$$

كم يمكن أن نستخرج من (2-18) و (2-19) العلاقة التالية

$$\mathbf{J}^2 = \frac{1}{2}(J_+J_- + J_-J_+) + J_z^2 \qquad (20\text{-}2)$$

بعد إثبات العلاقات السابقة في هذه الفقرة، يمكن الان أن ندرس خصائص القيم والأشعة الذاتية المشتركة لكل من $\mathbf{J}^2$ و J_z.

2.3 مميزات القيم الذاتية والأشعة الذاتية للثنائية $\{\mathbf{J}^2, J_z\}$

1.2.3 اصطلاحات

نعلم أن $\mathbf{J}^2$ تمثل ملحوظة، فهي إذن مؤثر هرميتي بالضرورة وعليه تكون العلاقة التالية صحيحة مهما كان شعاع الحالة

$$\forall|\psi\rangle:\ \langle\psi|\,\mathbf{J}^2|\psi\rangle \geq 0 \qquad (21\text{-}2)$$

في الحقيقة، نحن نعلم أن معيار أي شعاع يجب أن يكون موجبا تماما إن كان الشعاع غير معدوم وبالتالي:

$$(J|\psi\rangle)^+ = \langle\psi|J \Rightarrow \|J|\psi\rangle\|^2 = (J|\psi\rangle)^+(J|\psi\rangle) = \langle\psi|JJ|\psi\rangle = \langle\psi|\,\mathbf{J}^2|\psi\rangle \geq 0$$

فإذا كان $|\psi\rangle$ شعاع ذاتي غير معدوم للملحوظة $\mathbf{J}^2$ مرفق بالقيمة الذاتية[4] $(\lambda\hbar^2)$ مثلا، فإنه سيكون لدينا عندئذ

$$\langle\psi|\,\mathbf{J}^2|\psi\rangle = \lambda\hbar^2\langle\psi|\psi\rangle \geq 0 \Rightarrow \lambda \geq 0 \qquad (22\text{-}2)$$

في الواقع، يمكن أيضا متابعة البحث باستخدام λ، لكن من الشائع في ميكانيك الكم أخذ كتابة أخرى لعبارة القيم الذاتية للملحوظة $\mathbf{J}^2$ بدلا من الكتابة $\lambda\hbar^2$ وذلك لفائدتها في تسهيل دراسة طبيعة طيف $\mathbf{J}^2$ في هذا السياق وهو ما سنعتمده هنا. فنكتب إذن

$$\lambda = j(j+1) \quad \text{حيث} \quad j \geq 0 \qquad (23\text{-}2)$$

وعليه فإن معادلة القيم الذاتية للملحوظة $\mathbf{J}^2$ تأخذ الشكل التالي

$$\mathbf{J}^2|j,m\rangle = j(j+1)\hbar^2|j,m\rangle \qquad (24\text{-}2)$$

حيث رمزنا للأشعة الذاتية المشتركة للثنائية $\{\mathbf{J}^2, J_z\}$ بالترميز $|j,m\rangle$ كما أشرنا إلى ذلك سابقا. سنتفق أيضا على كتابة القيم الذاتية التابعة للملحوظة J_z كما يلي

---

[4] نكتبها بهذه الطريقة لأن بعد العزم الحركي هو نفسه بعد الفعل الذي وحدته من وحدة الثابت $\hbar$. وفي هذه الحالة سيكون العدد λ بدون وحدة.

$$[J] = [\hbar] = j.s$$

$$J_z\,|j,m\rangle = m\hbar|j,m\rangle \tag{25-2}$$

يمكننا دائما اختيار هذه الأشعة الذاتية متعامدة ومقنّنة. أي

$$\langle j,m|j',m'\rangle = \delta_{jj'}\delta_{mm'} \tag{26-2}$$

بعد التعريف بالاصطلاحات اللازمة، يمكننا الان أن نثبت صحة المُبَرهنات التالية.

2.2.3 مُبرهَنات

لنفرض أن $|j,m\rangle$ شعاع ذاتي مشترك لكل من $\mathbf{J}^2$ و J_z مُرفق بالقيم الذاتية لكل منهما $j(j+1)\hbar^2$ و $m\hbar$ على الترتيب.

1.2.2.3 المبرهنة الأولى – العلاقة بين $\boldsymbol{j}$ و $\boldsymbol{m}$

يحقق العددان j و m المكتوبان في أي شعاع $|j,m\rangle$ العلاقة التالية بينهما لكل عزم حركي $\mathbf{J}$

$$\boxed{-j \le m \le +j} \tag{27-2}$$

الإثبات

كنا قد أشرنا إلى أن معيار أي شعاع يجب أن يكون موجبا تماما إن كان الشعاع غير معدوم، والذي نكتبه كما يلي

$$\forall|\varphi\rangle \ne 0;\ \||\varphi\rangle\|^2 = \langle\varphi|\varphi\rangle > 0 \quad \text{and} \quad \||\varphi\rangle\| = 0 \ \ \text{if} \ \ |\varphi\rangle = 0 \tag{28-2}$$

ليكن ما يلي

$$\begin{cases} |\varphi\rangle = J_+|j,m\rangle \Rightarrow \langle\varphi| = \langle j,m|J_- \\ |\chi\rangle = J_-|j,m\rangle \Rightarrow \langle\chi| = \langle j,m|J_+ \end{cases}$$

إذن حسب العلاقة (2-28) لدينا

$$\||\varphi\rangle\|^2 = \langle\varphi|\varphi\rangle = \|J_+|j,m\rangle\|^2 = \langle j,m|J_-J_+|j,m\rangle \ge 0 \tag{29-2}$$

$$\||\chi\rangle\|^2 = \langle\chi|\chi\rangle = \|J_-|j,m\rangle\|^2 = \langle j,m|J_+J_-|j,m\rangle \ge 0 \tag{30-2}$$

ولكن حسب العلاقة (2-19) لدينا

$$\|J_+|j,m\rangle\|^2 = \langle j,m|(\mathbf{J}^2 - J_z^2 - \hbar J_z)|j,m\rangle = \hbar^2[j(j+1) - m^2 - m]\overbrace{\langle j,m|j,m\rangle}^{=1}$$

حيث استخدمنا معادلات القيم الذاتية (2-24) و (2-25) لكل من $\mathbf{J}^2$ و J_z . ويمكن أن نكتبها كما يلي

$$\|J_+|j,m\rangle\|^2 = \hbar^2[j(j+1) - m^2 - m] \tag{31-2}$$

نجد إذن أنه يكون حسب المعادلة (2-29)

$$j(j+1) - m^2 - m \ge 0 \tag{32-2}$$

يمكن أن نقوم بالبحث عن حلول المتراجحة (2-32) من الدرجة الثانية بالنسبة للعدد m بدراسة المُميّز[5] Δ والتي نثبت من خلالها أن

$$-(j+1) \le m \le +j \tag{33-2}$$

من جهة أخرى وانطلاقا من المعادلة (2-18) نجد

$$\|J_-|j,m\rangle\|^2 = \langle j,m|(\mathbf{J}^2 - J_z^2 + \hbar J_z)|j,m\rangle \ge 0 \Rightarrow \hbar^2[j(j+1) - m^2 + m]\overbrace{\langle j,m|j,m\rangle}^{=1}$$

---

[5] في الحقيقة نجد ما يلي

$$\Delta = 1 + 4j(j+1) = (2j+1)^2 \Rightarrow \sqrt{\Delta} = 2j+1 > 0 \text{ لأن } j \ge 0$$

وبالتالي حلول المتراجحة هي $m_1 = j$ و $m_2 = -(j+1)$ والحل سيكون محصورا بينهما. أي

$$m_2 \le m \le m_1$$

حيث استخدمنا هنا أيضا معادلات القيم الذاتية (2-24) و (2-25) لكل من $\mathbf{J}^2$ و J_z. نكتب بوضوح أن

$$\|J_-|j,m\rangle\|^2 = \hbar^2[j(j+1) - m^2 + m] \tag{34-2}$$

وحسب (2-30) يكون

$$j(j+1) - m^2 + m \geq 0 \tag{35-2}$$

والتي بحلها نتحصل على ما يلي

$$-j \leq m \leq j+1 \tag{36-2}$$

حتى تتحقق المعادلتان (2-33) و (2-36) في نفس الوقت يجب أن يكون

$$-j \leq m \leq j$$

وهو المطلوب.

2.2.2.3 المبرهنة الثانية – خصائص الشعاع $J_+ |j,m\rangle$

-1 إذا كان $m = j$ فإن

$$J_+ |j,j\rangle = 0 \tag{37-2}$$

-2 إذا كان $m < j$ فإن

$$\mathbf{J}^2(J_+ |j,m\rangle) = j(j+1)\hbar^2 J_+ |j,m\rangle \tag{38-2}$$

$$J_z(J_+ |j,m\rangle) = \hbar(m+1)(J_+ |j,m\rangle) \tag{39-2}$$

أي أن الشعاع $(J_+ |j,m\rangle)$ هو شعاع ذاتي مشترك لكل من $\mathbf{J}^2$ و J_z مُرفق بالقيمتين الذاتيتين $j(j+1)\hbar^2$ و $\hbar(m+1)$ على الترتيب.

الإثبات

حسب العلاقة (2-31) نجد أن

$$\|J_+|j,j\rangle\|^2 = \langle j,j|J_-J_+|j,j\rangle = 0$$

ولا يكون معيار أي شعاع حالة معدوما إلا إذا كان الشعاع نفسه معدوما. ولذلك فإنه من أجل $m = j$ تكون النتيجة (2-37) مثبتة.

أما إذا كانت $m < j$، فحسب (2-17)

$$[\mathbf{J}^2, J_+]|j,m\rangle = 0 \Rightarrow \mathbf{J}^2(J_+ |j,m\rangle) = J_+(\mathbf{J}^2 |j,m\rangle)$$

باستعمال معادلة القيم الذاتية (2-24) فإننا نثبت النتيجة (2-38).

بالنسبة لإثبات (2-39) يكفي أن نستخدم علاقة التبادل (2-14) حيث نجد

$$[J_z, J_+]|j,m\rangle = \hbar J_+|j,m\rangle \Rightarrow J_z(J_+ |j,m\rangle) = \hbar J_+ |j,m\rangle + J_+\left(\overbrace{J_z |j,m\rangle}^{=m\hbar}\right)$$

وهو المطلوب.

بالنظر إلى معادلة القيم الذاتية (2-25) للملحوظة J_z وإلى النتيجة (2-39) يمكن أن نستنتج أن الشعاع $(J_+ |j,m\rangle)$ متناسب[6] مع الشعاع $|j,m+1\rangle$ والتي يمكننا أن نعبر عنها كما يلي

$$J_+ |j,m\rangle = c_{jm}^+|j,m+1\rangle \tag{40-2}$$

حيث c_{jm}^+ هو ثابت التقنين والذي سنستخرج عبارته فيما بعد. إن العبارة (2-40) تترجم معنى تسمية المؤثر J_+ بمؤثر الرفع من حيث أنه يرفع قيمة العدد m بوحدة بالنسبة للشعاع $|j,m\rangle$.

[6] مع الأخذ بعين الاعتبار أن القيم الذاتية للملحوظة J_z غير منحلة داخل الفضاء الجزئي $\mathcal{E}(j)$. أي من أجل قيمة محددة للعدد j.

3.2.2.3 المبرهنة الثالثة – خصائص الشعاع $J_-\,|j,m\rangle$

-1 إذا كان $m=-j$ فإن

$$J_-\,|j,-j\rangle = 0 \qquad (41\text{-}2)$$

-2 إذا كان $m>-j$ فإن

$$\mathbf{J}^2(J_-\,|j,m\rangle) = j(j+1)\hbar^2 J_-\,|j,m\rangle \qquad (42\text{-}2)$$

$$J_z(J_-\,|j,m\rangle) = \hbar(m-1)(J_+\,|j,m\rangle) \qquad (43\text{-}2)$$

أي أن الشعاع $(J_-\,|j,m\rangle)$ هو شعاع ذاتي مشترك لكل من $\mathbf{J}^2$ و J_z مُرفق بالقيمتين الذاتيتين $j(j+1)\hbar^2$ و $\hbar(m-1)$ على الترتيب.

يُترك إثبات هذه المبرهنة الأخيرة للطالب لتشابه خطواتها مع المبرهنة السابقة.

نستطيع أن نستنتج أيضا من النتيجة (2-43) أن الشعاع $J_-\,|j,m\rangle$ متناسب مع الشعاع $|j,m-1\rangle$. أي

$$J_-\,|j,m\rangle = c_{jm}^-|j,m-1\rangle \qquad (44\text{-}2)$$

إن العبارة (2-44) تترجم معنى تسمية المؤثر J_- بمؤثر الخفض من حيث أنه يخفض قيمة العدد m بوحدة بالنسبة للشعاع $|j,m\rangle$.

3.2.3 دراسة طبيعة الأعداد (j,m) المتعلقة بطيف $\mathbf{J}^2$ و J_z

ليكن $|j,m'\rangle$ شعاعا ذاتيا مشترك لكل من $\mathbf{J}^2$ و J_z، عندئذ، إذا كان $m'=j$ فإنه حسب (2-37) يكون $(J_+|j,j\rangle=0)$. لنفرض الان أن $m'<j$، فبالتطبيق المتتالي p مرة لمؤثر الرفع J_+ على الشعاع $|j,m'\rangle$ نتحصل على متتالية من الأشعة الذاتية للملحوظتين $\mathbf{J}^2$ و J_z كالاتي

$$|j,m'\rangle;\ J_+|j,m'\rangle;(J_+)^2|j,m'\rangle;(J_+)^3|j,m'\rangle;\dots(J_+)^p|j,m'\rangle \qquad (45\text{-}2)$$

فكل واحد من أشعة هذه المتتالية (2-45) يحقق حسب العبارة (2-40) مكررة n مرة النتيجة التالية

$$(J_+)^n|j,m'\rangle = \alpha_n(j,m')|j,m'+n\rangle;\ \ n=0,1,2,\dots p \qquad (46\text{-}2)$$

و $\alpha_n(j,m')$ هو ثابت تناسب للتقنين يتعلق بالأعداد (j,m',n). إن الحد الأخير من المتتالية (2-45) يجب أن يحقق بالضرورة الشرط التالي

$$j-1<m'+p\le j \qquad (47\text{-}2)$$

لأنه حسب المُبرهنة (2-27) لا يمكن أبدا أن نتحصل على شعاع $|j,m_0\rangle$ يكون فيه $m_0>j$، وكذلك الحال بالنسبة للشعاع الأخير في المتتالية (2-45) لأنه حسب (2-46) سيكون متناسبا مع الشعاع $|j,m'+p\rangle$ الذي يجب أن يكون فيه $-j\le m'+p\le j$. لدينا

$$(J_+)^p|j,m'\rangle = \alpha_p(j,m')|j,m'+p\rangle \qquad (48\text{-}2)$$

في الحقيقة، سنثبت الان أن $m'+p=j$ تماما.

فلو فرضنا أن $m'+p<j$، فإنه حسب المبرهنة الثانية و بالضبط الشرط الثاني الذي يسمح باستنتاج المعادلة (2-39) سيكون الشعاع $(J_+|j,m'+p\rangle)$ شعاعا ذاتيا للملحوظة J_z مُرفقا بالقيمة الذاتية $\hbar(m'+p+1)$. أي شعاعا من الشكل $|j,m'+p+1\rangle$. هذا الأخير يجب أن يحقق المتراجحة (2-27). أي

$$-j\le m'+p+1\le +j \qquad (49\text{-}2)$$

وهذا غير ممكن لأنه حسب الطرف الأيسر من المتراجحة (2-47) سنجد أن $j<m'+p+1$ وهذا يتناقض مع الطرف الأيمن للمتراجحة (2-49). فإذن سيكون الشعاع الأخير من المتتالية (2-45) محققا للشرط التالي

$$m'+p=j \qquad (50\text{-}2)$$

فأي تطبيق مرة أخرى للمؤثر J_+ زيادة عن عدد المرات p سيعطي نتيجة معدومة حسب (2-37).

بالنسبة لنفس شعاع البداية $|j,m'\rangle$، سنقوم بعملية معاكسة، وهي عملية التخفيض بواسطة المؤثر J_-.

فإذا كان $m'=-j$ فإنه حسب (41-2) سيكون $(J_-|j,-j\rangle=0)$. أما إذا كانت $m'>-j$ فبالتطبيق المتتالي q مرة لمؤثر الخفض J_- على الشعاع $|j,m'\rangle$ نتحصل على متتالية من الأشعة الذاتية المشتركة للملحوظتين $\mathbf{J}^2$ و J_z وذلك من اليمين إلى اليسار

$$(J_-)^q|j,m'\rangle;\dots\dots;(J_-)^3|j,m'\rangle;(J_-)^2|j,m'\rangle;J_-|j,m'\rangle;|j,m'\rangle \qquad (51\text{-}2)$$

فكل واحد من أشعة هذه المتتالية (51-2) يحقق، حسب العبارة (44-2) مكررةً l مرة، النتيجة التالية

$$(J_-)^l|j,m'\rangle=\beta_l(j,m')|j,m'-l\rangle;\quad l=0,1,2,\dots\ q \qquad (52\text{-}2)$$

حيث $\beta_l(j,m')$ هو ثابت تناسب للتقنين يتعلق بالأعداد (j,m',l).

إن الحد الأخير من المتتالية (51-2) يجب أن يحقق بالضرورة الشرط التالي

$$-j\le m'-q<-j+1 \qquad (53\text{-}2)$$

لأنه حسب المُبرهنة (27-2) لا يمكن أبدا أن نتحصل على شعاع $|j,m_0\rangle$ يكون فيه $m_0<-j$، وكذلك الحال بالنسبة للشعاع الأخير في المتتالية (51-2) لأنه حسب (52-2) سيكون متناسبا مع الشعاع $|j,m'-q\rangle$ وبالتالي لا يمكن أن نجد $m'-q<-j$. لدينا

$$(J_-)^q|j,m'\rangle=\beta_q(j,m')|j,m'-q\rangle \qquad (54\text{-}2)$$

في الحقيقة، نثبت بسهولة أن $m'-q=-j$ تماما. من أجل ذلك نفرض أن $m'-q>-j$، فإنه حسب المبرهنة الثالثة و بالضبط الشرط الثاني الذي يسمح باستنتاج المعادلة (43-2) سيكون الشعاع $(J_-|j,m'-q\rangle)$ شعاعا ذاتيا للملحوظة J_z مُرفقا بالقيمة الذاتية $\hbar(m'-q-1)$. أي شعاعا متناسبا مع الشعاع $|j,m'-q-1\rangle$ وهذا الشعاع يجب أن يحقق الشرط (27-2). أي

$$-j\le m'-q-1\le +j \qquad (55\text{-}2)$$

وهو غير ممكن، لأنه حسب الطرف الأيمن من المتراجحة (53-2) سنجد أن $m'-q-1<-j$ وهذا يتناقض مع الطرف الأيسر للمتراجحة (55-2). فإذن سيكون الشعاع الأخير من المتتالية (51-2) محققا للشرط التالي

$$m'-q=-j \qquad (56\text{-}2)$$

إذن بالتطبيق المتتالي لكل من مؤثري الرفع والخفض J_+و J_- على الترتيب، استطعنا أن ننشئ انطلاقا من شعاع كيفي $|j,m'\rangle$ جميع الأشعة الذاتية الأخرى التي تتعلق بنفس العدد j. بعبارة أخرى، كل الأشعة الذاتية التي تشترك في نفس القيمة الذاتية $j(j+1)\hbar^2$ للملحوظة $\mathbf{J}^2$. من جهة أخرى، بطرح المعادلة (56-2) من المعادلة (50-2) نجد

$$j=\frac{p+q}{2} \qquad (57\text{-}2)$$

وبما أن كلا من p و q أعداد طبيعية، فحسب (57-2) لا يمكن أن يأخذ العدد j إلا أعدادا صحيحة أو نصف صحيحة موجبة. أي من الشكل

$$j=0,\frac{1}{2},1,\frac{3}{2},2,\dots \qquad (58\text{-}2)$$

بالنسبة للعدد $m'=m$، فوفق أحد المعادلتين (50-2) أو (56-2) يمكن أن نستنتج أنه لا يمكن إلا أن يكون عددا صحيحا أو نصف صحيح، سالبا أو موجبا أو معدوما. لدينا

$$-j\le m=m'=j-p=-j+q=\frac{q-p}{2}\le j \qquad (59\text{-}2)$$

فإذا كان j عددا صحيحا، أخذ m قيما صحيحة موجبة أو سالبة، وإن كان j عددا نصف صحيح، أخذ m قيما نصف صحيحة موجبة أو سالبة. وانتقال m من قيمة إلى أخرى موالية لها يتم بخطوة صحيحة تساوي 1. فالقيم الممكنة للعدد m هي حسب (59-2) القيم التالية

$$m=\underbrace{-j,-j+1,-j+2,\dots\dots\dots,j-2,j-1,j}_{\text{قيمة } (2j+1)} \qquad (60\text{-}2)$$

فعدد الأشعة التي يمكن استخراجها بواسطة التطبيق المتتالي لمؤثرات الرفع والخفض على شعاع كيفي $|j,m\rangle$ هو إذن $(2j+1)$ قيمة. وبعبارة أخرى، درجة انحلال القيمة الذاتية $j(j+1)\hbar^2$ للملحوظة $\mathbf{J}^2$ هي $g_j=(2j+1)$.

3.3 الفضاءات الجزئية $\mathcal{E}(j)$

من أجل قيمة ثابتة للعدد j ، يمكن أن ننشأ أساسا للفضاء الجزئي $\mathcal{E}(j)$ مُكوَّنا من الأشعة الذاتية المشتركة للملحوظتين $\mathbf{J}^2$ و J_z وذلك انطلاقا من الشعاع الذاتي $|j,m\rangle$ كما رأينا قبل قليل. من الواضح أن بُعد هذا الفضاء المشكل بهذه الطريقة هو $g_j=(2j+1)$. ولكن يجب تعيين ثوابت التقنين c_{jm}^{+} و c_{jm}^{-} الموجودان في المعادلتين (2-40) و(2-44) حتى تكون أشعة هذا الأساس متعامدة ومقننة.

من جهة، وحسب المعادلة (2-40)

$$J_+|j,m\rangle=c_{jm}^{+}|j,m+1\rangle\Rightarrow\||J_+|j,m\rangle\|^2=|c_{jm}^{+}|^2\overbrace{\langle j,m+1|j,m+1\rangle}^{=1}=|c_{jm}^{+}|^2$$

من جهة أخرى، وباعتبار المعادلة (2-31) نجد أن

$$|c_{jm}^{+}|=c_{jm}^{+}=\hbar\sqrt{j(j+1)-m^2-m}\qquad(61\text{-}2)$$

حيث نختار أن نأخذ المعاملات c_{jm}^{+} كأعداد حقيقية. إذن

$$\boxed{J_+|j,m\rangle=\hbar\sqrt{j(j+1)-m(m+1)}|j,m+1\rangle}\qquad(62\text{-}2)$$

بالنسبة للمعاملات c_{jm}^{-}، ننطلق من المعادلة (2-44)

$$J_-|j,m\rangle=c_{jm}^{-}|j,m-1\rangle\Rightarrow\||J_-|j,m\rangle\|^2=|c_{jm}^{-}|^2\overbrace{\langle j,m-1|j,m-1\rangle}^{=1}=|c_{jm}^{-}|^2$$

وبالعودة إلى المعادلة (2-34) نجد إذن

$$|c_{jm}^{-}|=c_{jm}^{-}=\hbar\sqrt{j(j+1)-m^2+m}\qquad(63\text{-}2)$$

حيث اخترنا أيضا أن نأخذ المعاملات c_{jm}^{-} كأعداد حقيقية. وبالتالي يكون

$$\boxed{J_-|j,m\rangle=\hbar\sqrt{j(j+1)-m(m-1)}|j,m-1\rangle}\qquad(64\text{-}2)$$

من خلال معادلات القيم الذاتية للملحوظتين $\{\mathbf{J}^2,J_z\}$، نلاحظ أن المصفوفات الممثلة لهما في القاعدة $\{|j,m\rangle\}$ قطريتان. لأن كل الأشعة المستخرجة (2-62) و(2-64) هي أشعة ذاتية مشتركة لهما حسب المبرهنتين الثانية والثالثة.

4.3 التمثيل المعياري $\{|k,j,m\rangle\}$

بالنسبة للجمل الفيزيائية التي يعالجها ميكانيك الكم، لا تمثل المجموعة $\{\mathbf{J}^2,J_z\}$ دائما مجموعة تامة من الملحوظات المتبادلة (م.ت.م.م). ولذلك نحتاج إلى ملحوظات أخرى A وB وC...، نضيفها على هذه المجموعة حتى نتحصل على م.ت.م.م. ويتم من أجل هذا إضافة عدد آخر للعددين j و m وهو العدد k وذلك حتى يتم تحديد حالة الجملة بصفة تامة بواسطة أشعة الحالة $|k,j,m\rangle$. في الحقيقة، إن العدد k يمثل بشكل مكثَّف مجموعة الأعداد الكمية المرتبطة بالقيم الذاتية للملحوظات الواجب إضافتها إلى المجموعة $\{\mathbf{J}^2,J_z\}$ ، وفي هذه الحالة نرمز لفضاء الحالات الجزئي من أجل j و k معيّنين ب $\mathcal{E}(k,j)$ والذي بُعده هو $(2j+1)$. و فضاء الحالات الكلي $\mathscr{E}$ نتحصل عليه بضم كل الفضاءات الجزئية $\mathcal{E}(k,j)$.

تشكل مجموعة كل الأشعة المتعامدة والمقننة $\{|k,j,m\rangle\}$ أساسا لفضاء الحالات الكلي $\mathscr{E}$ وتسمى القاعدة المعيارية أو التمثيل المعياري.

$$\begin{cases}\langle k',j',m'|k,j,m\rangle=\delta_{kk'}\delta_{jj'}\delta_{mm'}\\ \displaystyle\sum_k\sum_j\sum_{m=-j}^{+j}|k,j,m\rangle\langle k,j,m|=\mathrm{I}\end{cases}\qquad(65\text{-}2)$$

5.3 المصفوفات الممثلة لمؤثرات العزم الحركي في التمثيل المعياري $\{|k,j,m\rangle\}$

في الفضاء الجزئي $\mathcal{E}(k,j)$ تُحسب عناصر المصفوفات الممثلة لمختلف مؤثرات العزم الحركي انطلاقا من المعادلات التالية

$$\begin{cases} \mathbf{J}^2|k,j,m\rangle = j(j+1)\hbar^2|k,j,m\rangle \\ J_z\,|k,j,m\rangle = m\hbar|k,j,m\rangle \\ J_+\,|k,j,m\rangle = \hbar\sqrt{j(j+1)-m(m+1)}|k,j,m+1\rangle \\ J_-\,|k,j,m\rangle = \hbar\sqrt{j(j+1)-m(m-1)}|k,j,m-1\rangle \end{cases} \tag{66-2}$$

مثال 1 :

من أجل $(j=1/2)$ أوجد المصفوفات الممثلة للملحوظات $\mathbf{J}^2$ و J_z و J_x و J_y في القاعدة المعيارية $\{|k,j,m\rangle\}$.

الحل:

سنحتاج هذا المثال عند دراستنا للعزم الحركي الذاتي – السبين $\left(\frac{1}{2}\right)$– وسنعود حينها إلى النتائج التي سنثبتها هنا في إطار النظرية العامة للعزم الحركي في ميكانيك الكم. سنهمل هنا الدليل k للاختصار، ونكتب أشعة هذه القاعدة بدونه، أي نستعمل المجموعة $\{|j,m\rangle\}$.

إن بُعد الفضاء الجزئي $\mathcal{E}(k,j=1/2)$ هو $g_{j=1/2}=(2j+1)=2$. إذن لدينا شعاعان مكونان لقاعدة هذا الفضاء الجزئي. لدينا

$$j=\frac{1}{2}\Rightarrow -\frac{1}{2}\leq m\leq\frac{1}{2}\Rightarrow\begin{cases} m=1/2\longrightarrow\left|\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right\rangle\equiv|+\rangle \\ m=-1/2\longrightarrow\left|\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right\rangle\equiv|-\rangle\end{cases} \tag{67-2}$$

نأخذهما بهذا الترتيب $\left\{\left|\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right\rangle\equiv|+\rangle,\left|\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right\rangle\equiv|-\rangle\right\}$.

بالنسبة للملحوظتين $\mathbf{J}^2$ و J_z فإن مصفوفتيهما قطريتان بالنسبة لهذه القاعدة وعناصرهما القطرية هي القيم الذاتية التابعة لهما. في الحقيقة

$$\mathbf{J}^2|j,m\rangle = j(j+1)\hbar^2|j,m\rangle$$

$$\Rightarrow\begin{cases} \mathbf{J}^2|+\rangle=\mathbf{J}^2\left|\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right\rangle=\hbar^2\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}+1\right)\left|\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right\rangle=\frac{3\hbar^2}{4}|+\rangle \\ \mathbf{J}^2|-\rangle=\mathbf{J}^2\left|\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right\rangle=\hbar^2\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}+1\right)\left|\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right\rangle=\frac{3\hbar^2}{4}|-\rangle\end{cases} \tag{68-2}$$

وبالتالي نجد

$$(\mathbf{J}^2)=\frac{3\hbar^2}{4}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix} \tag{69-2}$$

بنفس الطريقة نعمل من أجل J_z

$$J_z\,|j,m\rangle=m\hbar|j,m\rangle\Rightarrow\begin{cases} J_z|+\rangle=J_z\left|\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right\rangle=\frac{\hbar}{2}\left|\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right\rangle=\frac{\hbar}{2}|+\rangle \\ J_z|-\rangle=J_z\left|\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right\rangle=-\frac{\hbar}{2}\left|\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right\rangle=-\frac{\hbar}{2}|-\rangle\end{cases} \tag{70-2}$$

فالمصفوفة تأخذ الشكل التالي

$$(J_z)=\frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix} \tag{71-2}$$

بالنسبة للمصفوفتين الممثلتين للملحوظتين J_x و J_x، فحتى نستطيع إيجادهما علينا أن نستعين بالمؤثرات $J_\pm$ من خلال علاقة التعريف (2-13).

فنبحث أولا عن المصفوفات الممثلة للمؤثرات $J_\pm$ في هذه القاعدة وذلك باستعمال (2-62) و (2-64) أو العبارة العامة (2-66).

(72-2)
$$\begin{cases} J_+|+\rangle = J_+\left|\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right\rangle = 0\ ;\ \left(m=j=\frac{1}{2}\right) \\ J_+|-\rangle = J_+\left|\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right\rangle = \hbar\sqrt{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}+1\right)-\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}+1\right)}\left|\frac{1}{2},-\frac{1}{2}+1\right\rangle = \hbar\left|\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right\rangle = \hbar|+\rangle \end{cases}$$

(73-2)
$$\begin{cases} J_-|+\rangle = J_-\left|\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right\rangle = \hbar\sqrt{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}+1\right)-\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}-1\right)}\left|\frac{1}{2},\frac{1}{2}-1\right\rangle = \hbar\left|\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right\rangle = \hbar|-\rangle \\ J_-|-\rangle = J_-\left|\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right\rangle = 0; \left(m=j=-\frac{1}{2}\right) \end{cases}$$

فالمصفوفة الممثلة للمؤثرين J_+ و J_- حسب (72-2) و (73-2) هما إذن

$$(J_+) = \hbar\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad (J_-) = \hbar\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

ومنهما نستخرج المصفوفة الممثلة للملحوظة J_x وفق (13-2)

(74-2)
$$J_x = \frac{1}{2}(J_+ + J_-) \Rightarrow (J_x) = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

وكذالك بالنسبة للمصفوفة J_y حيث أنه أيضا وفق (13-2) نجد

(75-2)
$$J_y = \frac{1}{2i}(J_+ - J_-) \Rightarrow (J_y) = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$$

مثال12 :

من أجل $(j=1)$ أوجد المصفوفات الممثلة للملحوظات $\mathbf{J}^2$ و J_z و J_x و J_y في القاعدة المعيارية $\{|k,j,m\rangle\}$.

الحل:

سنهمل الدليل k للاختصار، ونكتب أشعة هذه القاعدة بدونه، أي $\{|j,m\rangle\}$.

إن بُعد الفضاء الجزئي $\mathcal{E}(k,j=1)$ هو $g_{j=1} = (2j+1) = 3$. إذن لدينا ثلاثة أشعة مكونة لقاعدة هذا الفضاء الجزئي. لدينا

$$j=1 \Rightarrow -1 \le m \le 1 \Rightarrow \begin{cases} m=1 \longrightarrow |1,1\rangle \equiv |1\rangle \\ m=0 \longrightarrow |1,0\rangle \equiv |2\rangle \\ m=-1 \longrightarrow |1,-1\rangle \equiv |3\rangle \end{cases}$$

مأخوذة بهذا الترتيب وباتباع نفس خطوات المثال السابق، فإننا نجد أن المصفوفات الممثلة للملحوظات المطلوبة في هذه القاعدة هي

(76-2)
$$(\mathbf{J}^2) = 2\hbar^2\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(77-2)
$$(J_z) = \hbar\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

(78-2)
$$(J_x) = \frac{\hbar}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

(79-2)
$$(J_y) = \frac{\hbar}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix}$$

4. العزم الحركي المداري L – الدوال التوافقية الكروية $Y_\ell^m(\theta,\varphi)$

كتطبيق أول للنظرية العامة للعزوم الحركية، نعالج هنا مسألة العزم الحركي المداري الذي ذكرناه في بداية هذا الفصل والمعرف في ميكانيك الكم بواسطة الملحوظة $\mathbf{L}(L_x,L_y,L_z)=\mathbf{R}\times\mathbf{P}$. رأينا في العلاقات (3-2) عبارة مركباته (L_x,L_y,L_z) والتي يمكن كتابتها في تمثيل الموضع $\{|\mathbf{r}\rangle\}$ كما يلي

$$\begin{cases} L_x=\frac{\hbar}{i}\left(y\frac{\partial}{\partial z}-z\frac{\partial}{\partial y}\right)\\ L_y=\frac{\hbar}{i}\left(z\frac{\partial}{\partial x}-x\frac{\partial}{\partial z}\right)\\ L_z=\frac{\hbar}{i}\left(x\frac{\partial}{\partial y}-y\frac{\partial}{\partial x}\right)\end{cases} \tag{80-2}$$

في الحقيقة، إن الملحوظات (L_x,L_y,L_z) لا تؤثر إلا على الدوال المتعلقة بالمتغيرات الزاوية، ولا تؤثر على دالة متعلقة بالبعد r. وليتضح ذلك يكفي أن نكتب عبارة هذه الملحوظات في الاحداثيات الكروية (r,θ,φ)،

$$\begin{cases} x=r\sin\theta\cos\varphi & r\geq 0\\ y=r\sin\theta\sin\varphi; & 0\leq\theta\leq\pi\\ z=r\cos\theta & 0\leq\varphi<2\pi\end{cases} \tag{81-2}$$

أي نقوم بالانتقال $\{|\mathbf{r}\rangle\equiv|x,y,z\rangle\}\longrightarrow\{|\mathbf{r}\rangle\equiv|r,\theta,\varphi\rangle\}$ فنجد

$$L_x=i\hbar\left(\sin\varphi\frac{\partial}{\partial\theta}+\frac{\cos\varphi}{\tan\theta}\frac{\partial}{\partial\varphi}\right) \tag{82-2}$$

$$L_y=i\hbar\left(-\cos\varphi\frac{\partial}{\partial\theta}+\frac{\sin\varphi}{\tan\theta}\frac{\partial}{\partial\varphi}\right) \tag{83-2}$$

$$L_z=-i\hbar\frac{\partial}{\partial\varphi} \tag{84-2}$$

بالنسبة للملحوظة $\mathbf{L}^2$ فإن عبارتها في هذا التمثيل الكروي هي

$$\mathbf{L}^2=-\hbar^2\left(\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}+\frac{1}{\tan\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}+\frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}\right) \tag{85-2}$$

فيظهر جليّا من خلال العبارات أعلاه أن المركبات المختلفة لمؤثر العزم الحركي المداري تعمل على دوال متعلقة بالزوايا التي تتغير بتغير الحركة، أي تتعلق باتجاه الحركة، وليس بالبعد عن المركز. إن هذا الأمر ليس غريبا من ناحية كلاسيكية إذا نظرنا إلى تعريف العزم الحركي، فهو معدوم بالنسبة لحركة مستقيمة.

لا بأس أن نذكر في هذا السياق عبارة عنصر الحجم في الاحداثيات الكروية

$$dV=r^2\sin\theta\,drd\theta d\varphi=r^2drd\Omega \tag{86-2}$$

حيث $d\Omega$ هي الزاوية الصلبة (المجسّمة) المعطاة بالعبارة

$$d\Omega=\sin\theta\,d\theta d\varphi \tag{87-2}$$

1.4 القيم الذاتية والدوال الذاتية للثنائية $\{\mathbf{L}^2,L_z\}$

كنا قد أشرنا في النظرية العامة للعزم الحركي إلى أننا نرمز للأشعة الذاتية المشتركة للثنائية $\{\mathbf{J}^2,J_z\}$ بالكتابة $|j,m\rangle$. فكذلك الأمر هنا بالنسبة للثنائية $\{\mathbf{L}^2,L_z\}$ ولكن بالكتابة $|\ell,m\rangle$. إذن

$$\begin{cases}\mathbf{L}^2|\ell,m\rangle = \ell(\ell+1)\hbar^2|\ell,m\rangle \\ L_z|\ell,m\rangle = m\hbar|\ell,m\rangle\end{cases} \quad (88\text{-}2)$$

في تمثيل الموضع $\{|\mathbf{r}\rangle \equiv |r,\theta,\varphi\rangle\}$ نرمز للدوال الذاتية $\psi_{k\ell m}(r,\theta,\varphi)$ الموافقة للأشعة الذاتية $|k,\ell,m\rangle$ هي

$$\psi_{k\ell m}(r,\theta,\varphi) = \langle \mathbf{r}|k,\ell,m\rangle = \langle r,\theta,\varphi|k,\ell,m\rangle \quad (89\text{-}2)$$

فيكون بذلك إسقاط معادلات القيم الذاتية (2-88) حسب (2-84)، (2-85)، (2-89)، في تمثيل الموضع هو

$$-\hbar^2\left(\frac{\partial^2}{\partial\theta^2} + \frac{1}{\tan\theta}\frac{\partial}{\partial\theta} + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}\right)\psi_{k\ell m}(r,\theta,\varphi) = \ell(\ell+1)\hbar^2\psi_{k\ell m}(r,\theta,\varphi) \quad (90\text{-}2)$$

$$-i\hbar\frac{\partial}{\partial\varphi}\psi_{k\ell m}(r,\theta,\varphi) = m\hbar\psi_{k\ell m}(r,\theta,\varphi) \quad (91\text{-}2)$$

بما أن المؤثرين $\{\mathbf{L}^2, L_z\}$ يؤثران على دوال متعلقة بالزوايا، فيمكن أن نقوم بفصل دالة الموجة $\psi_{k\ell m}(r,\theta,\varphi)$ إلى جداء دالتين إحداهما متعلقة بالبعد r فقط والأخرى متعلقة بالاتجاه المحدد بالزوايا (θ,φ) كما يلي

$$\psi_{k\ell m}(r,\theta,\varphi) = f_{klm}(r)Y_\ell^m(\theta,\varphi) \quad (92\text{-}2)$$

حيث يحقق الجزء الزاوي (angular part) $Y_\ell^m(\theta,\varphi)$ معادلات القيم الذاتية التالية

$$\begin{cases}\mathbf{L}^2Y_\ell^m(\theta,\varphi) = \ell(\ell+1)\hbar^2Y_\ell^m(\theta,\varphi) \\ L_zY_\ell^m(\theta,\varphi) = m\hbar Y_\ell^m(\theta,\varphi)\end{cases} \quad (93\text{-}2)$$

وتسمى هذه الدوال $Y_\ell^m(\theta,\varphi)$ بالدوال التوافقية الكروية (spherical harmonics)، وهي تتعلق فقط بالدليلين "ℓ,m" كما هو واضح من عبارة المؤثرين $\{\mathbf{L}^2, L_z\}$ وكذا المعادلات (2-93). بينما يسمى الجزء $f_{klm}(r)$ بالجزء القطري (radial part) حيث قمنا بإضافة القرائن "k,ℓ,m" بصفة مبدئية لاحتمال تعلقه بهذه الأعداد الكمية. سنترك التدقيق في هذا الموضوع لحين دراسة بعض المسائل فيزيائية في الفصل القادم، كحل مسألة ذرة الهيدروجين مثلا.

إذا اعتبرنا الدوال الذاتية $\psi_{k\ell m}(r,\theta,\varphi)$ مقنّنة، فإنه يمكننا أن نأخذ كل جزء من جزئيها الزاوي والقطري مقننا كل على حدى. أي

$$\int_0^\infty |f_{klm}(r)|^2r^2dr = 1 \quad (94\text{-}2)$$

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} |Y_\ell^m(\theta,\varphi)|^2d\Omega = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} |Y_\ell^m(\theta,\varphi)|^2\sin\theta\, d\theta d\varphi = 1 \quad (95\text{-}2)$$

إذا اكتفينا بدراسة الجزء الزاوي $Y_\ell^m(\theta,\varphi)$ فقط للدالة الموجية $\psi_{k\ell m}(r,\theta,\varphi)$، كما في مسألة دراسة الدَّوّار الصلد (rigid rotator) مثلا، فإننا نكتب

$$Y_\ell^m(\theta,\varphi) = \langle\theta,\varphi|\ell,m\rangle \quad (96\text{-}2)$$

2.4 إثبات أن الأعداد "ℓ,m" هي أعداد صحيحة

لقد درسنا في الجزء المتعلق بالنظرية العامة للعزوم الحركية أن الأعداد "j,m" (وبالتالي الأعداد "ℓ,m") هي أعداد تأخذ إما قيما صحيحة أو نصف صحيحة. لكن سنثبت هنا أنه في حالة العزم الحركي المداري $\mathbf{L}$ فإن الأعداد "ℓ,m" لا يمكن أن تأخذ إلا قيما صحيحة فقط. في الحقيقة، وحسب (2-84) و (2-93) فإنه يكون لدينا

$$-i\hbar\frac{\partial}{\partial\varphi}Y_\ell^m(\theta,\varphi) = m\hbar Y_\ell^m(\theta,\varphi) \quad (97\text{-}2)$$

إن حل هذه المعادلة التفاضلية البسيطة يمكننا كتابة الدوال $Y_\ell^m(\theta,\varphi)$ على شكل جداء دالتين إحداهما متعلق بالزاوية السمتية φ والأخرى متعلقة بالزاوية θ وهو

$$Y_\ell^m(\theta,\varphi) = F_\ell^m(\theta)e^{im\varphi} \tag{98-2}$$

إن استمرارية الدوال الموجية وبالتالي استمرارية الدوال التوافقية الكروية $Y_\ell^m(\theta,\varphi)$ يعني أنه من أجل قيمة معينة للزاوية θ فإن

$$Y_\ell^m(\theta,\varphi=0) = Y_\ell^m(\theta,\varphi=2\pi) \Rightarrow 1 = e^{2im\pi} \Rightarrow m \rightarrow \text{عدد صحيح}$$

وإذا كان m عددا صحيحا، فإن العدد ℓ يكون بالضرورة عددا صحيحا وفق المعادلة (59-2) التي أثبتناها في الجزء المتعلق بالنظرية العامة. فنكتب إذن

$$\begin{cases} \ell = 0,1,2,\ldots \\ m = 0,\pm1,\pm2,\ldots,\pm\ell \end{cases} \tag{99-2}$$

3.4 العبارة التحليلية للدوال $Y_\ell^m(\theta,\varphi)$ وبعض خواصها

1.3.4 العبارة التحليلية للدوال $Y_\ell^m(\theta,\varphi)$

إن البحث المفصل عن العبارة التحليلية للدوال التوافقية الكروية يقود إلى عدة عبارات مختلفة من حيث الشكل، منها كتابتها بواسطة كثيرات حدود لوجوندر (Legendre)، وكل هذه العبارات التحليلية المختلفة شكلا هي متكافئة في تمثيل هذه الدوال التوافقية الكروية. نعطي على سبيل المثال أحد هاته العبارات

$$Y_\ell^m(\theta,\varphi) = \frac{(-1)^\ell}{2^\ell \ell!}\sqrt{\frac{2\ell+1}{4\pi}\frac{(\ell+m)!}{(\ell-m)!}}\,e^{im\varphi}(\sin\theta)^{-m}\frac{d^{\ell-m}}{d(\cos\theta)^{\ell-m}}(\sin\theta)^{2\ell} \tag{100-2}$$

باستعمال هذه العبارة يمكن أن نستخرج الدوال التوافقية الأولى والتي نجدها في نهاية هذا افصل.

2.3.4 بعض خصائص الدوال $Y_\ell^m(\theta,\varphi)$

تحقق هذه الدوال التوافقية الكروية بعض الخواص المفيدة والتي نحتاجها في التطبيقات العديدة لميكانيك الكم على النظمة الفيزيائية المختلفة مثل آلية امتصاص وإصدار الاشعاعات الكهرومغناطيسية للذرات والجزيئات وغيرها عبر دراسة القيم المتوسطة لمؤثر ثنائي القطب الكهربائي مثلا. ولذلك نذكر بعضها هنا

1.2.3.4 الزوجية Parity

إن عملية التناظر بالنسبة للمبدأ، أي عملية التحويل $\mathbf{r}\longrightarrow-\mathbf{r}$، يُعبَّر عنها في الاحداثيات الكروية بواسطة التحويلات التالية

$$r\longrightarrow r;\ \theta\longrightarrow\pi-\theta;\ \varphi\longrightarrow\pi+\varphi \tag{101-2}$$

فإن حافظت الدالة على عبارتها مع تغير في الإشارة فقط بحيث تكون إما موجبة أو سالبة نقول أن هذه الدالة زوجية أو فردية على الترتيب. وان تغيرت عبارتها فإننا نقول أن هذه الدالة لا تملك زوجية محددة. فلو طبقنا التحويل (101-2) على الدوال التوافقية الكروية فإننا نجد

$$Y_\ell^m(\theta,\varphi)\longrightarrow Y_\ell^m(\pi-\theta,\pi+\varphi) = (-1)^\ell Y_\ell^m(\theta,\varphi) \tag{102-2}$$

مما يعني أن هذه الدوال التوافقية تملك زوجية محددة بصفة جيدة، فهي إما زوجية إذا كان ℓ زوجي، أو فردية إذا كان ℓ فردي. إن مفهوم زوجية مقدار فيزيائي مهم جدا في ميكانيك الكم، فهو يساعد في تبسيط الحلول التي نبحث عنها عند دراسة الدوال الذاتية لهاملتوني جملة ما.

وتحقق الدوال $Y_\ell^m(\theta,\varphi)$ الخاصية التالية أيضا

$$[Y_\ell^m(\theta,\varphi)]^* = (-1)^m Y_\ell^{-m}(\theta,\varphi) \tag{103-2}$$

2.2.3.4 علاقة التعامد والتقنين

إن تقنين الدوال التوافقية الكروية تم التعبير عنه بواسطة المعادلة (2-95)، يمكن أن نعمم هذه العلاقة لتصبح علاقة تعامد وتقنين كما يلي

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\left(Y_{\ell'}^{m'}(\theta,\varphi)\right)^* Y_\ell^m(\theta,\varphi)\sin\theta\, d\theta d\varphi = \delta_{\ell\ell'}\delta_{mm'} \tag{104-2}$$

والتي يمكن الحصول عليها باستعمال (2-26) مع إدراج علاقة الانغلاق الخاصة بالتمثيل $\{|\theta,\varphi\rangle\}$ المتعلق بالجزء الزاوي للمسألة

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}|\theta,\varphi\rangle\langle\theta,\varphi|\sin\theta\, d\theta d\varphi = \mathbb{I} \tag{105-2}$$

مع استعمال العلاقة (2-96).

4.4 العلاقة بين مؤثر اللابلاسيان Δ و الملحوظة $\mathbf{L}^2$

إن عبارة مؤثر اللابلاسيان في الاحداثيات الكروية هي

$$\Delta = \frac{1}{r}\frac{\partial^2}{\partial r^2}r + \frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial^2}{\partial\theta^2} + \frac{1}{\tan\theta}\frac{\partial}{\partial\theta} + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}\right)$$

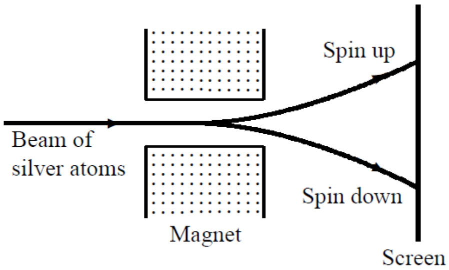
فيمكن كتابته إذن بدلالة الملحوظة $\mathbf{L}^2$ لأنه حسب العبارة (2-85) نجد أن

$$\Delta = \underbrace{\frac{1}{r}\frac{\partial^2}{\partial r^2}r}_{\text{حد الطاقة الحركية الانسحابية}} - \underbrace{\frac{\mathbf{L}^2}{\hbar^2 r^2}}_{\text{حد الطاقة الحركية الدورانية}} \tag{106-2}$$

5. العزم الحركي الذاتي (السبيني) - السبين S

1.5 تجربة ستيرن – جيرلاخ

كنا قد رأينا عند دراستنا للعزم الحركي المداري أن القيم الممكنة للعدد الكمي "ℓ" هي فقط الأعداد الصحيحة. لكن في الحقيقة، هناك العديد من التجارب أكدت وجود عزوم حركية يأخذ فيها العدد "j" الذي درسناه في النظرية العامة للعزوم الحركية قيما نصف صحيحة. كدراسة البنية الدقيقة لأطياف الذرات، أو مفعول زيمان الشاذ (anormal Zeeman effect)، وغيرها. ولكننا نريد أن نعرض هنا التجربة الأصلية التي كانت سببا في افتراض وجود نوع آخر من العزوم الحركية غير العزوم الحركية المدارية، وهي التي نسميها سبين. هذه التجربة أجريت من طرف ستيرن وجيرلاخ في عام 1922 باستخدام ذرات الفضة $_{47}Ag$ التي لديها 47 إلكترونًا. إن التوزيع الالكتروني لهذه الذرة هو باختصار $[Kr](4d)^{10}5s^1$. ما يعني أن هذه الذرة في حالتها الأساسية تملك عزما مداريا معدوما كون الالكترون الأخير موجود في الطبقة الفرعية $5s^1$، وأن محصلة مساهمة باقي الالكترونات معدومة بالنسبة للعزم الحركي المداري الكلي. إن انعدام هذا العزم المداري سيجعل من هذه الذرة المعتدلة كهربائيا و الموجودة في حالتها الأساسية غير حساسة لتأثير حقل مغناطيسي مطبق عليها كون العزم المغناطيسي متناسبا مع العزم الحركي المداري للجسيم. فلو أرسلنا حزمة من هذا النوع من الذرات عبر حقل مغناطيسي فسنتوقع عدم انحرافها وسنشاهد على شاشة الكشف نقطة (لطخة) إسقاط واحدة وهي متناظرة بالنسبة لمركزها. وحتى لو كانت الذرة تملك عزما مداريا غير معدوم، كأن تكون مثارة فيقع الالكترون الاخير في الطبقة الفرعية p التي يكون فيها $\ell = 1$، فإننا نتوقع أن نتحصل على عدد فردي من نقاط وقوع الحزمة على الشاشة كون القيم الممكنة لاتجاهات العزم الحركي تعطى بالعدد $(2\ell + 1)$، أي عدد القيم التي يأخذها m_ℓ. لكن تجربة ستيرن وجيرلاخ أثبتت أنه بإرسال مثل هذه الحزمة عبر حقل مغناطيسي شديد اللاّ تجانس سيقوم بتقسيم الحزمة الأساسية إلى حزمتين متباعدتين نكشفهما بواسطة الشاشة الموضوعة في طريق انتشارهما كما هو موضح في الشكل أدناه.



نفس التجربة يمكن إجراؤها على ذرات أبسط مثل ذرة الهيدروجين التي تملك إلكترونا وحيدا موجودا في الطبقة الأساسية ويملك عزما مداريا معدوما، فنتائج التجربة مخالفة لما نتوقعه بواسطة ما تسمح به النظرية الكمية دون الأخذ بعين الاعتبار نوعا آخر من العزوم الحركية يكون مسؤولا عن اكتساب هذه الذرات عزوما مغناطيسية تكون سببا في تفاعلها مع الحقول المغناطيسية الخارجية غير المنتظمة التي تتسبب في انحراف مسارها.

لتفسير ما حدث في هذه التجربة افترض العالمان جودسميت و أولينبيك "Goudsmit and Uhlenbeck" سنة 1925امتلاك الالكترون لنوع آخر من العزوم، بالإضافة طبعا إلى العزم الحركي المداري، وقاموا بتسميته بالعزم الحركي الذاتي حتى يُشير إلى عدم تعلّقه بأي من متغيرات الموضع الخاصة بالالكترون. وسمي أيضا بالعزم الحركي السبيني أو السبين اختصارا، وهو لا يملك ما يقابله في الميكانيك الكلاسيكي، كونه خاصية ذاتية للجسيمات المجهرية كالكتلة والشحنة وغيرها. وبهذا الاقتراح تم تفسير ما حدث في تجربة ستيرن وجيرلاخ وذلك عبر محاكاته مع العزم الحركي المداري.

في الحقيقة، نعلم من النظرية الكهرومغناطيسية الكلاسيكية أن العزم الحركي المداري $\mathbf{L}$ لجسيم ما، كتلته m ومشحون بشحنة q، سيرافقه عوم مغناطيسي مداري $\boldsymbol{\mu}_{\ell}$ تعطى عبارته كما يلي

$$\boldsymbol{\mu}_{\ell} = \frac{q}{2mc}\mathbf{L} \qquad (107\text{-}2)$$

حيث c هي سرعة الضوء. فإن كان هذا الجسيم هو إلكترون فإننا نضع $q = -e$. وبالتالي سيكون اتجاه كل من $\boldsymbol{\mu}_{\ell}$ و $\mathbf{L}$ متعاكسان. بالقياس على هذا العزم الحركي المداري وعزمه المغناطيسي المرافق، تم فرض وجود السبين $\mathbf{S}$ و عزمه المغناطيسي السبيني $\boldsymbol{\mu}_s$ وأن العلاقة بينهما حسب (107-2) هي $\boldsymbol{\mu}_s = (-e/2mc)\mathbf{S}$. ولكن التجربة أثبتت أن القيمة الحقيقة هي تقريبا ضعف هذه القيمة. وعلى كل حال فإن العبارة الصحيحة هي التالية

$$\boldsymbol{\mu}_s = -g_s\frac{e}{2mc}\mathbf{S} \qquad (108\text{-}2)$$

حيث g_s يسمى معامل لاندي (Landé factor) أو النسبة الجيرومغناطيسية (gyromagnetic ratio). وقيمته التجريبية التقريبية $g_s \approx 2$. فقط نشير إلى أن العبارة (107-2) يتم إستخراجها من المعادلات الأساسية للكهرومغناطيسية عكس المعادلة (108-2) التي تمت كتابتها بالتماثل مع العبارة (107-2) مع إضافة معامل لاندي. يجب أن نتذكر أن السبين هو مقدار كمومي بحت لا نظير كلاسيكي له.

بامتلاكه عزما مغناطيسيا سبينيا، فإن ذرة الفضة، أو حتى ذرة الهيدروجين إن أردنا ذلك، ستكتسب هذا العزم المغناطيسي للأسباب التي شرحناها سابقا. ونتيجة لذلك فإن مرورها عبر حقل مغناطيسي $\mathbf{B}$ غير منتظم سيتسبب في انحرافها عن مسارها لأن طاقة التفاعل مع هذا الحقل تعطى بالعبارة

$$E_p = -\boldsymbol{\mu}_s \cdot \mathbf{B} \qquad (109\text{-}2)$$

وتخضع الذرة نتيجة لطاقة التفاعل هذه إلى قوة متناسبة مع تدرج الحقل المغناطيسي حيث

$$\mathbf{F} = -\boldsymbol{\nabla}E_p = \boldsymbol{\nabla}(\boldsymbol{\mu}_s \cdot \mathbf{B}) \qquad (110\text{-}2)$$

فإذا افترضنا أن اتجاه وازدياد الحقل المغناطيسي يكون وفق المحور (Oz) في الاتجاه الموجب، فإن العبارة (110-2) تكتب كما يلي

$$\mathbf{F} = -\left(g_s\frac{e}{2mc}\right)S_z\frac{\partial B}{\partial z} \qquad (111\text{-}2)$$

حيث θ هي الزاوية بين الحقل المغناطيسي و مركبة العزم الحركي السبيني وفق المحور (Oz). فإن كانت المركبة S_z متجهة في نفس اتجاه الحقل المغناطيسي، أي وفق الاتجاه الموجب للمحور (Oz)، فإن القوة المطبقة على الذرة ستوجهها عكس اتجاه تزايد الحقل المغناطيسي، أي في الاتجاه السالب للمحور (Oz)، وإن كانت المركبة S_z متجهة عكس اتجاه الحقل المغناطيسي، أي وفق الاتجاه السالب للمحور (Oz)، فإن الذرة ستتجه في

اتجاه تزايد الحقل المغناطيسي، أي في الاتجاه الموجب للمحور (Oz)، فانحراف حزمة الذرات سيكون إذن راجعا إلى اتجاه سبين الجسيم بالنسبة للحقل المغناطيسي، كما سيكون راجعا أيضا إلى القيم الممكنة له، أي إلى قيم المساقط الممكنة S_z. إن تجربة ستيرن وجيرلاخ أظهرت أن الحزمة الأصلية انقسمت إلى حزمتين فقط احداهما في الاتجاه الموجب للحقل المغناطيسي والأخرى في الاتجاه السالب له، مما يعني أن القيم الممكنة للمسقط S_z هما قيمتان فقط.

بما أننا فرضنا وجود العزم الحركي السبيني، فهو يجب أن يحقق الخواص التي درسناها في النظرية العامة للعزوم الحركية كلها، فهو يحقق علاقات التبادل (2-7) المميزة للعزوم الحركية، كما أنه يمكن معرفة عدد القيم التي تأخدها مركبته وفق المحور (Oz)، والمعطاة بالقيم m_s حيث برهنا أن $-s \leq m_s \leq +s$ الذي يعطي عددا من القيم قدره $(2s+1)$. فحسب تجربة ستيرن وجيرلاخ التي أعطت نتيجتها قيمتين فقط للمسقط S_z يمكن أن نستنتج أن

$$2s+1=2 \Rightarrow \left(s=\frac{1}{2} \text{ and } m_s=\pm\frac{1}{2}\right) \quad (112\text{-}2)$$

فنقول هنا أن ذرة الفضة في حالتها الأساسية هي جسيم سبينه نصف[7]، كل جسيم في الطبيعة يملك قيمة وحيدة s، فنقول أن سبين هذا الجسيم هو s . فمثلا الالكترونات هي جسيمات سبينها يساوي النصف. في الحقيقة، كل جسيمات الطبيعة تصنف إلى فئتين حسب سبينها، فالجسيمات التي سبينها يساوي عددا صحيحا تاما تسمى البوزونات (مثل الفوتونات والميزونات π وكل الجسيمات الناقلة للتفاعلات الأساسية في الطبيعة، و غيرها) والجسيمات التي تملك سبينا يساوي عددا نصف صحيح تسمى الفيرميونات (مثل الالكترونات و اللبتونات والكواركات والبروتونات والنوترونات وغيرها). ففي تجربة ستيرن وجيرلاخ تعاملنا مع ذرة محصلة تركيب العزوم الحركية (المدارية والسبينية) لجميع الكتروناتها كانت تساوي عددا نصف صحيح، وهو ناتج عن الالكترون الأخير في الطبقة الخارجية. توجد كذلك ذرات تركيب العزوم الحركية كلها لالكتروناتها يعطي عددا صحيحا تاما وتكون بذلك بوزونات مثل الهليوم -4.

2.5 الوصف الكمومي للسبين – الملحوظة $\mathbf{S}$ وفضاء حالات السبين $\mathcal{E}_s$

نتعامل في هذه الفقرة مع هذا النوع الجديد مع العزوم الحركية والذي يمثل مقدارا فيزيائيا كموميا ليس له نظير كلاسيكي. نعلم كيف نقوم بعملية تكميم كل المقادير الكلاسيكية التي نجدها متعلقة بالموضع والاندفاع لتتحول هذه المقادير إلى ملحوظات تعمل في فضاء الحالات $\mathcal{E}_{\mathbf{r}}$ والذي نسميه فضاء الحالات المدارية إذا كنا ندرس مسألة ندخل فيها خاصية سبين الجسيمات وذلك لنميزه عن فضاء حالات السبين $\mathcal{E}_s$ الذي سيأتي توضيحه في الأسفل. في الحقيقة، لا يوجد مقدار كلاسيكي مقابل للسبين في الميكانيك الكلاسيكي حتى نقوم بعملية تكميمه والحصول على الملحوظة $\mathbf{S}$ انطلاقا من العبارة الكلاسيكية. ولذلك نقوم ببساطة بإضافة متغيرات السبين إلى المتغيرات الديناميكية ونعرف من أجلها الملحوظة $\mathbf{S}$ بحيث تحقق ما يلي

1. بتطبيق عليه نتائج النظرية العامة للعزوم الحركية في ميكانيك الكم على العزم الحركي السبيني $\mathbf{S}$ فإن علاقات التبادل تكون اعتمادا على (2-7) هي

$$\begin{cases} [S_x, S_y] = i\hbar S_z \\ [S_y, S_z] = i\hbar S_x \\ [S_z, S_x] = i\hbar S_y \end{cases} \quad (113\text{-}2)$$

2. إن المؤثرات السبينية المختلفة تعمل في فضاء حالات جديد نسميه فضاء حالات السبين $\mathcal{E}_s$ والذي نشكل أساسه من الأشعة الذاتية المشتركة $\{|s,m_s\rangle\}$ للمجموعة التامة من الملحوظات المتبادلة $\{\mathbf{S}^2, S_z\}$ في هذا الفضاء. إن هذه الأشعة تحقق معدلات القيم الذاتية التالية

$$\begin{cases} \mathbf{S}^2|s,m_s\rangle = s(s+1)\hbar^2|s,m_s\rangle \\ S_z|s,m_s\rangle = m_s\hbar|s,m_s\rangle \end{cases} \quad (114\text{-}2)$$

إن بُعد الفضاء $\mathcal{E}_s$ هو

[7] في الحقيقة، لقد تم اهمال سبين النواة لصغره، وللدقة يجب أن يُأخذ في الاعتبار عند البحث عن البنية الدقيقة لأطياف الإصدار والامتصاص.

$$g_s = (2s + 1) \tag{115-2}$$

يتم تمييز الجسيمات بواسطة العدد الكمي s كما ذكرنا ذلك من قبل. ولكن يجب أن ننتبه إلى أنه هناك فرق بين شعاع السبين $\mathbf{S}$ والعدد s الذي يرتبط مع عدد لمساقط (الاتجاهات) الممكنة للملحوظة $\mathbf{S}$ التي تعكسها القيم المختلفة للعدد الكمي المغناطيسي السبيني m_s. يمكن ملاحظة ذلك من خلال المعادلة (2-114). في هذا الفضاء ستكون المصفوفات الممثلة لكل من $\{\mathbf{S}^2, S_z\}$ مصفوفات قطرية عناصرها القطرية هي القيم الذاتية لكل منهما. في الحقيقة، إن كل أشعة الحالة التي تنتمي إلى الفضاء $\mathcal{E}_s$ هي أشعة ذاتية للملحوظة $\mathbf{S}^2$ مرفقة بالقيمة $s(s+1)\hbar^2$. لاحظ أننا لا نستطيع أن نقول نفس الشيء بالنسبة للمركبة S_z فكل شعاع من أشعة القاعدة يعود إلى قيمة ذاتية مختلفة عن القيمة الذاتية للشعاع الاخر من القاعدة، وبالتالي كل تركيب خطي لا يعطي بالضرورة شعاعا ذاتيا للملحوظة S_z.

3. إن فضاء الحالات الكلي عند دراسة جسيم كمومي مع الخذ يعين الاعتبار العزم السبيني هو الجداء التنسوري لكل من فضاء الحالات المدارية $\mathcal{E}_\mathbf{r}$ وفضاء حالات السبين $\mathcal{E}_s$ أي

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}_\mathbf{r} \otimes \mathcal{E}_s \tag{116-2}$$

كل ملحوظة تعمل في فضاء الحالات المدارية تتبادل مع أي ملحوظة تعمل في فضاء حالات السبين. ولوصف حالة جسيم بصفة تامة لا يكفي أخذ شعاع حالة ينتمي لأحدهما فقط، بل يجب أخذ شعاع الحالة $|\psi\rangle$ ينتمي إلى فضاء الحالات الكلي. في الحقيقة، إذا أخذنا التمثيل $\{|\mathbf{r}\rangle\}$ كقاعدة للفضاء $\mathcal{E}_\mathbf{r}$ بينما نأخذ $\{|s, m_s\rangle\}$ كقاعدة لفضاء السبين $\mathcal{E}_s$ فإن شعاعا ما من الأساس الخاص بفضاء الحالات الكلي سيكون من الشكل

$$|\mathbf{r}, m_s\rangle \equiv |\mathbf{r}\rangle \otimes |s, m_s\rangle \tag{117-2}$$

إن علاقة الانغلاق بالنسبة لأشعة هذا الأساس $\{|\mathbf{r}, m_s\rangle\}$ تكتب كما يلي

$$\sum_{m_s=-s}^{+s} \int d\mathbf{r} |\mathbf{r}, m_s\rangle\langle \mathbf{r}, m_s| = \mathrm{I} \tag{118-2}$$

ومنه فيمكن كتابة العبارة العامة لشعاع الحالة كتركيب خطي كما يلي

$$|\psi\rangle \in \mathcal{E} \longrightarrow |\psi\rangle = \sum_{m_s=-s}^{+s} \int d\mathbf{r} |\mathbf{r}, m_s\rangle\langle \mathbf{r}, m_s|\psi\rangle \tag{119-2}$$

3.5 دراسة العزم الحركي السبيني $s = 1/2$ - مصفوفات باولي

1.3.5 مصفوفات السبين $s = 1/2$ ومصفوفات باولي

سنقوم بتطبيق ما درسناه في هذا الفصل على الحالة الخاصة والمهمة وهي حالة الجسيمات ذات السبين نصف $s = 1/2$، إذن سيأخذ العدد الكمي المغناطيسي السبيني القيمتان $m_s = \pm 1/2$. في هذه الحالة سيكون بُعد فضاء حالات السبين $\mathcal{E}_s$ حسب العبارة (2-115) هو $\left(g_{s=1/2} = 2(1/2) + 1 = 2\right)$ والذي نأخذ له كأساس المجموعة $\left\{\left|\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right\rangle \equiv |+\rangle, \left|\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right\rangle \equiv |-\rangle\right\}$. إن أي شعاع حالة ينتمي إلى الفضاء $\mathcal{E}_s$ يمكن كتابته إذن على شكل تركيب خطي لأشعة هذا الأساس

$$|\chi\rangle = c_1|+\rangle + c_2|-\rangle \tag{120-2}$$

حيث c_1 و c_2 هي معاملات النشر والتقنين. لقد درسنا هذه الحالة في النظرية العامة للعزم الحركي عندما افترضنا في المثال الأول في الفقرة (4.III) قيمة $j = 1/2$. فحسب (2-68)

$$\begin{cases} \mathbf{S}^2|\pm\rangle = \mathbf{S}^2\left|\frac{1}{2},\pm\frac{1}{2}\right\rangle = \frac{3\hbar^2}{4}|\pm\rangle \\ S_z|\pm\rangle = S_z\left|\frac{1}{2},\pm\frac{1}{2}\right\rangle = \frac{\hbar}{2}|\pm\rangle \end{cases} \tag{121-2}$$

بالنسبة للمصفوفات الممثلة للملحوظات $\mathbf{S}^2$ و S_z و S_x و S_y في هذه القاعدة فقد وجدناها حسب (2-69) و (2-71) و (2-74) و (2-75) كما يلي

$$(\mathbf{S}^2) = \frac{3\hbar^2}{4}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{122-2}$$

$$(S_z) = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix};\ (S_x) = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix};\ (S_y) = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \tag{123-2}$$

تُكتب المصفوفات الأخيرة الممثلة للمركبات الثلاث للملحوظة $\mathbf{S}$ عادة بشكل مختصر لتصبح

$$(\mathbf{S}) = \frac{\hbar}{2}\boldsymbol{\sigma} \tag{124-2}$$

حيث نشير بالرمز $\boldsymbol{\sigma}$ إلى مجموعة مصفوفات باولي الثلاث ذات الشكل التالي

$$(\sigma_x) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix};\ (\sigma_y) = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix};\ (\sigma_z) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{125-2}$$

تحقق هذه مصفوفات باولي العديد من الخصائص المهمة نترك إثباتها للطالب على شكل تمارين تدريبية وذلك بالاستعانة بعلاقات التبادل (2-113) وكذلك تعريف مصفوفات باولي (2-125).

تمرين

1- أثبت أن مصفوفات باولي تحقق العلاقات التالية

$$\sigma_x^2 = \sigma_y^2 = \sigma_z^2 = 1 \tag{126-2}$$

$$\sigma_j\sigma_k + \sigma_k\sigma_j = 0 \tag{127-2}$$

حيث أنه $(j,k = x,y,z; j \neq k)$. في الحقيقة هاتان العلاقتان تنتجان من علاقة المبدل المضاد التالية

$$\{\sigma_j,\sigma_k\} = \sigma_j\sigma_k + \sigma_k\sigma_j = 2\mathrm{I}\delta_{jk} \tag{128-2}$$

أثبت أيضا أن

$$[\sigma_j,\sigma_k] = 2i\sigma_l \tag{129-2}$$

$$\sigma_j\sigma_k = i\sigma_l \tag{130-2}$$

بالنسبة لهاتين العلاقتين الأخيرتين فإنهما صالحتان بحيث أنه إذا كان $j = x,y,z$ بهذا الترتيب فإن الدليل k يأخذ هذا الترتيب $k = y,z,x$ ويأخذ الدليل الثالث l هذا الترتيب $l = z,x,y$. أي نقوم بتبديل دائري للثلاثية (x,y,z). كما يمكن تكثيفها باستعمال تنسور ليفي-سيفيتا ε_{jkl} (Levi-civita tensor) كما يلي

$$[\sigma_j,\sigma_k] = 2i\sigma_l\varepsilon_{jkl} \tag{131-2}$$

حيث

$$\varepsilon_{jkl} = \begin{cases} 1 \longrightarrow & j,k,l \text{ تبديل دائري (زوجي) للقرائن} \\ -1 \longrightarrow & j,k,l \text{ تبديل غير دائري (فردي) للقرائن} \\ 0 \longrightarrow & j,k,l \text{ تساوي اثنان من القرائن} \end{cases}$$

كما يمكن تكثيف كل العلاقات السابقة في العلاقة التالية

(132-2)
$$\sigma_j\sigma_k = \delta_{jk} + i\sum_l \varepsilon_{jkl}\sigma_l$$

2- أثبت أيضا أن

(133-2)
$$\mathrm{Tr}(\sigma_x) = \mathrm{Tr}(\sigma_y) = \mathrm{Tr}(\sigma_z) = 0$$

(134-2)
$$\mathrm{Det}(\sigma_x) = \mathrm{Det}(\sigma_y) = \mathrm{Det}(\sigma_z) = -1$$

2.3.5 وصف حالة الجسيم ذو السبين $s = 1/2$ – السبينور

حتى يكون وصف حالة الجسيم تاما، يجب أن نأخذ في الاعتبار كل درجات حريته، والتي هي في سياقنا هذا درجات الحرية المدارية ودرجات حرية السبين، لذلك قلنا بأن فضاء الحالات الكلي هو الجداء التنسوري لكلا فضائي الحالات المداري والسبيني $\mathcal{E} = \mathcal{E}_{\mathbf{r}}\otimes\mathcal{E}_s$. كما قلنا بأن العبارة العامة لأي شعاع $|\psi\rangle$ ينتمي إلى هذا الفضاء تكون على شكل نشر على الأشعة المختلفة المكونة للأساس المختار له. فإذا أخذنا الأساس $\{|\mathbf{r},m_s\rangle\}$ الذي تكتب أشعته $|\mathbf{r},m_s\rangle \equiv |\mathbf{r}\rangle\otimes|s,m_s\rangle$ كما توضحه العلاقة (117-2)، فإن عبارة شعاع الحالة تكون في هذه حالة السبين $s = 1/2$ حسب العبارة (119-2) كما يلي

(135-2)
$$|\psi\rangle = \sum_{m_s=-1/2}^{+1/2}\int d\mathbf{r}|\mathbf{r},m_s\rangle\langle\mathbf{r},m_s|\psi\rangle = \int d\mathbf{r}\left[\underbrace{\langle\mathbf{r},+|\psi\rangle}_{\psi_+(\mathbf{r})}|\mathbf{r},+\rangle + \underbrace{\langle\mathbf{r},-|\psi\rangle}_{\psi_-(\mathbf{r})}|\mathbf{r},-\rangle\right]$$

في الحقيقة، إن الشعاع $|\psi\rangle$ يُمَثَّل في هذه القاعدة بواسطة معاملات نشره على هذه القاعدة، أي المعاملات

(136-2)
$$\begin{cases}\psi_+(\mathbf{r}) = \langle\mathbf{r},+|\psi\rangle\\ \psi_-(\mathbf{r}) = \langle\mathbf{r},-|\psi\rangle\end{cases}$$

في فضاء الحالات المدارية قبل إدخال مفهوم السبين كنا نصف حالة الجملة في تمثيل الموضع $\{|\mathbf{r}\rangle\}$ بواسطة دالة الموجة $\psi(\mathbf{r})$. ولكن لنَصف تماما حالة جسيم ذو سبين $s = 1/2$ يجب أن يكون لدينا كلا الدالتان $\psi_\pm(\mathbf{r})$ واللتان نكتبهما على شكل نسميه سبينور ذو مركبتين ونرمز له بالرمز $[\psi](\mathbf{r})$ ونكتب

(137-2)
$$[\psi](\mathbf{r}) = \begin{pmatrix}\psi_+(\mathbf{r})\\ \psi_-(\mathbf{r})\end{pmatrix}$$

لتكون هذه الصورة عملية أكثر، نقوم بتوضيحها بالعودة إلى الجداء التنسوري لفضائي الحالات $\mathcal{E}_{\mathbf{r}}$ و $\mathcal{E}_s$. في الحقيقة، إن أي شعاع $|\varphi\rangle \in \mathcal{E}_{\mathbf{r}}$ يمكن أن نكتبه كما يلي

(138-2)
$$|\varphi\rangle = \int d\mathbf{r}|\mathbf{r}\rangle\langle\mathbf{r}|\varphi\rangle = \int d\mathbf{r}\varphi(\mathbf{r})|\mathbf{r}\rangle \in \mathcal{E}_{\mathbf{r}}$$

بينما ذكرنا من قبل أن أي شعاع $|\chi\rangle$ ينتمي إلى الفضاء $\mathcal{E}_s$ يمكن كتابته على الشكل (120-2). أي

(139-2)
$$|\chi\rangle = c_+|+\rangle + c_-|-\rangle \in \mathcal{E}_s$$

إن الشعاع $|\psi\rangle$ المكتوب بالعبارة (135-2) يمكن الان كتابته كما يلي

(140-2)
$$|\psi\rangle = |\varphi\rangle\otimes|\chi\rangle$$

فمثلا مركبة السبينور العليا $\psi_+(\mathbf{r})$ حسب (117-2) و (136-2) و (140-2) ستصبح

(141-2)
$$\psi_+(\mathbf{r}) = \langle\mathbf{r},+|\psi\rangle = (\langle\mathbf{r}|\otimes\langle+|)(|\varphi\rangle\otimes|\chi\rangle) = \langle\mathbf{r}|\varphi\rangle\langle+|\chi\rangle = \varphi(\mathbf{r})c_+$$

وبهذا التوضيح يمكن أن نكتب السبينور (137-2) على الشكل التالي

(142-2)
$$[\psi](\mathbf{r}) = \varphi(\mathbf{r})\begin{pmatrix}c_+\\ c_-\end{pmatrix}$$

ملحق – عبارات الدوال التوافقية الكروية الأولى

$$Y_{00}(\theta,\varphi)=\frac{1}{\sqrt{4\pi}}$$
$$Y_{10}(\theta,\varphi)=\sqrt{\frac{3}{4\pi}}\cos\theta$$
$$Y_{11}(\theta,\varphi)=-\sqrt{\frac{3}{8\pi}}\sin\theta\, e^{i\varphi}$$
$$Y_{20}(\theta,\varphi)=\sqrt{\frac{5}{4\pi}}\left(\frac{3\cos^2\theta-1}{2}\right)$$
$$Y_{21}(\theta,\varphi)=-\sqrt{\frac{15}{8\pi}}\sin\theta\cos\theta\, e^{i\varphi}$$
$$Y_{22}(\theta,\varphi)=\frac{1}{4}\sqrt{\frac{15}{2\pi}}\sin^2\theta\, e^{2i\varphi} \qquad (143\text{-}2)$$
$$Y_{30}(\theta,\varphi)=\sqrt{\frac{7}{4\pi}}\left(\frac{5\cos^3\theta-3\cos\theta}{2}\right)$$
$$Y_{31}(\theta,\varphi)=-\frac{1}{4}\sqrt{\frac{21}{4\pi}}\sin\theta\left(5\cos^2\theta-1\right)e^{i\varphi}$$
$$Y_{32}(\theta,\varphi)=\frac{1}{4}\sqrt{\frac{105}{2\pi}}\sin^2\theta\cos\theta\, e^{2i\varphi}$$
$$Y_{33}(\theta,\varphi)=-\frac{1}{4}\sqrt{\frac{35}{4\pi}}\sin^3\theta\, e^{3i\varphi}$$

تماريـــــــن

التمرين الأول – محلول -

تعطى عبارة دالة الموجة التي تصف حالة جسيم في الاحداثيات الكارتيزية كما يلي:

$$\psi(\mathbf{r}) = \psi(x, y, z) = N\frac{x+z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$$

حيث N هو ثابت التقنين.

1. باستعمال التحويلات بين الاحداثيات الكارتيزية والكروية أثبت أنه يمكن كتابة دالة الموجة كما يلي:

$$\psi(\theta, \varphi) = N(\sin\theta\cos\varphi + \cos\theta)$$

2. اكتب $\psi(\theta, \varphi)$ بدلالة الدوال التوافقية الكروية $Y_\ell^m(\theta, \varphi)$ المناسبة. (انظر الجدول خلف الورقة).

3. أكتب شعاع الكات $|\psi\rangle$ بدلالة الأشعة الذاتية $|\ell, m\rangle$ ثم أوجد قيمة ثابت التقنين N.

4. لو نقوم بقياس الملحوظات $\boldsymbol{L}^2$ و L_z ما هي النتائج الممكنة لكل مقدار؟ وما هو احتمال الحصول على كل نتيجة له؟

5. مَن مِن بين مجموعات الملحوظات $\{\boldsymbol{L}^2\}$ ، $\{L_z\}$ ،$\{\boldsymbol{L}^2, L_z\}$ تشكل "مجموعة تامة من الملحوظات المتبادِلة (E.C.O.C.)" ؟

❖ الحـــل

1. باستعمال التحويلات بين الاحداثيات الكارتيزية والكروية التالية:

$x = r\sin\theta\cos\varphi$ و $z = r\cos\theta$ وأيضا $r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$ نجد:

$$\psi(\theta, \varphi) = N\frac{r\sin\theta\cos\varphi + r\cos\theta}{r}$$
$$= N(\sin\theta\cos\varphi + \cos\theta)$$

2. كتابة $\psi(\theta, \varphi)$ بدلالة الدوال التوافقية الكروية $Y_\ell^m(\theta, \varphi)$

حسب جدول الدوال $Y_\ell^m(\theta, \varphi)$ نلاحظ أن:

$$\begin{cases} Y_1^0(\theta, \varphi) = \sqrt{(3/4\pi)}\cos\theta \\ Y_1^{\pm1}(\theta, \varphi) = \mp\sqrt{(3/8\pi)}e^{\pm i\varphi}\sin\theta \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \cos\theta = \sqrt{(4\pi/3)}Y_1^0 \\ \sin\theta\cos\varphi = \sqrt{(2\pi/3)}(Y_1^{-1} - Y_1^1) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \psi(\theta, \varphi) = N\sqrt{(2\pi/3)}\left(Y_1^{-1} - Y_1^1 + \sqrt{2}Y_1^0\right)$$

3. كتابة شعاع الكات $|\psi\rangle$ بدلالة الأشعة الذاتية $|\ell, m\rangle$

نعلم أن: $\psi(\theta, \varphi) = \langle\theta, \varphi|\psi\rangle$ و $Y_\ell^m(\theta, \varphi) = \langle\theta, \varphi|\ell, m\rangle$، إذن حسب العبارة السابقة في السؤال 2 يمكن أن نكتب:

$$|\psi\rangle = N\sqrt{(2\pi/3)}\left(|1, -1\rangle - |1,1\rangle + \sqrt{2}|1,0\rangle\right)$$

إذا اعتبرنا $|\psi\rangle$ مقننة فإننا نتحصل على قيمة ثابت التقنين:

$$\langle\psi|\psi\rangle = |N|^2(2\pi/3)[1+1+2] = 1$$
$$\Rightarrow |N| = \sqrt{(3/8\pi)} = N$$

حيث اخترنا أخذ N كعدد حقيقي. فتصبح عبارة $|\psi\rangle$ كما يلي:

$$|\psi\rangle = (1/2)\left(\sqrt{2}|1,0\rangle - |1,1\rangle + |1, -1\rangle\right)$$

4. نتائج القياس الممكنة للملحوظات L^2 و L_z واحتمالاتها

حسب عبارة النشر لشعاع الحالة $|\psi\rangle$ على الأشعة $|\ell,m\rangle$ نلاحظ أن القيم الممكنة للأعداد الكمية (ℓ,m) هي $\{(1,1),(1,0),(1,-1)\}$

إذن نتائج القياس الممكنة هي:

$$\begin{cases} \boldsymbol{L}^2 : \ell(\ell+1)\hbar^2 = 2\hbar^2 \to 3 \text{ fois dégénérée } \{|1,1\rangle,|1,0\rangle,|1,-1\rangle\} \\ L_z : m\hbar = (+\hbar \to |1,1\rangle),(0 \to |1,0\rangle),(-\hbar \to |1,-1\rangle) \longrightarrow \text{simples} \end{cases}$$

واحتمال العثور على هذه النتائج هي:

$$\begin{cases} \mathcal{P}_{\boldsymbol{L}^2}(2\hbar^2) = |\langle 1,1|\psi\rangle|^2 + |\langle 1,0|\psi\rangle|^2 + |\langle 1,-1|\psi\rangle|^2 = 1 \\ \mathcal{P}_{L_z}(0) = |\langle 1,0|\psi\rangle|^2 = 1/2 \\ \mathcal{P}_{L_z}(+\hbar) = |\langle 1,1|\psi\rangle|^2 = 1/4 \\ \mathcal{P}_{L_z}(-\hbar) = |\langle 1,-1|\psi\rangle|^2 = 1/4 \end{cases}$$

.5 $\{\boldsymbol{L}^2\}$ لا تشكل مجموعة تامة من الملحوظات المتبادِلة لأنها تملك قيما منحلة.

$\{L_z\}$ تشكل مجموعة تامة من الملحوظات المتبادِلة لأن كل قيمها الذاتية بسيطة.

$\{\boldsymbol{L}^2, L_z\}$ تشكل مجموعة تامة من الملحوظات المتبادِلة لأن الملحوظة L_z تشكل لوحدها م.ت.م.م E.C.O.C.

التمرين الثاني

يُعطى الجزء الزاوي لدالة الموجة لجملة ما بدلالة المتوافقات الكروية $Y_\ell^m(\theta,\varphi)$ كما يلي:

$$\psi(\theta,\varphi) = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(Y_1^1 + \sqrt{3}Y_1^0 + Y_1^{-1}\right)$$

.1 أكتب شعاع الكات $|\psi\rangle$ بدلالة الأشعة الذاتية $|\ell,m\rangle$ المشتركة لكل من $\boldsymbol{L}^2$ و L_z ثم تحقق من أن $\langle\psi|\psi\rangle = 1$.

.2 لو نقوم بقياس الملحوظات $\boldsymbol{L}^2$ و L_z ما هي النتائج الممكنة لكل مقدار؟ ماذا تلاحظ ؟ وما هو احتمال الحصول على كل نتيجة له؟

.3 لو قمنا بقياس $\boldsymbol{L}^2$ و L_z في نفس الوقت ما هي النتائج الممكنة ؟ وما هو احتمال الحصول على كل نتيجة؟ ماذا تلاحظ؟ فسر.

.4 إذا كانت نتيجة قياس المركبة L_z هي $(-\hbar)$، فاثبت أن $< L_x >= 0$.

التمرين الثالث

يُعطى هاملتوني جملة ما بالعلاقة التالة:

$$H = \left(\frac{\omega_0}{\hbar}\right) L_+ L_-$$

حيث $L_\pm = L_x \pm iL_y$، و ω_0 ثابت موجب.

إذا كانت عبارة دالة الموجة التي تصف حالة الجملة في اللحظة الابتدائية $(t_0 = 0)$ في الاحداثيات الكروية هي:

$$\psi(\theta,\varphi,t_0=0) = \left(-i\sqrt{3/4\pi}\right)\sin\theta$$

.1 اكتب الهاملتوني H بدلالة $\boldsymbol{L}^2$ و L_z^2 و L_z.

.2 إذا كان $|\ell,m\rangle$ هو الشعاع الذاتي المشترك لكل من $\boldsymbol{L}^2$ و L_z، فاثبت أنه أيضا شعاع ذاتي للهاملتوني H مرفق بقيمة ذاتية $E_{\ell,m}$ يطلب تعيينها بدلالة ℓ و m.

.3 انطلاقا من العبارة المعطاة أعلاه، اكتب $\psi(\theta,\varphi,t_0=0)$ بدلالة المتوافقات الكروية $Y_\ell^m(\theta,\varphi)$ المناسبة.

.4 أكتب شعاع الكات $|\psi(0)\rangle$ بدلالة الأشعة الذاتية $|\ell,m\rangle$ ثم تحقق من أنه مقنن.

.5 لو نقوم بقياس الملحوظات $\boldsymbol{L}^2$ و L_z ما هي النتائج الممكنة لكل مقدار؟ وما هو احتمال الحصول على كل نتيجة له؟

.6 لو نقوم بقياس طاقة الجملة، ما هي النتائج الممكنة؟ وما هو احتمال الحصول على كل نتيجة؟

.7 أكتب عبارة الكات $|\psi(t)\rangle$ التي تصف تطور الجملة عبر الزمن.

التمرين الرابع

يُعطى الجزء الزاوي لدالة الموجة في الاحداثيات الكروية بالعبارة التالية:

$$\psi(\theta,\varphi)=\sqrt{1/4\pi}\left(\cos\theta+e^{i\varphi}\sin\theta\right)$$

6. اكتب $\psi(\theta,\varphi)$ بدلالة المتوافقات الكروية $Y_\ell^m(\theta,\varphi)$ المناسبة.

7. أكتب شعاع الكات $|\psi\rangle$ بدلالة الأشعة الذاتية $|\ell,m\rangle$ ثم تحقق من أنه مقنن.

8. لو نقوم بقياس الملحوظات $\boldsymbol{L}^2$ و L_z ما هي النتائج الممكنة لكل مقدار؟ وما هو احتمال الحصول على كل نتيجة له؟

9. مَن مِن بين مجموعات الملحوظات $\{\boldsymbol{L}^2\}$ ، $\{L_z\}$، $\{\boldsymbol{L}^2,L_z\}$ تشكل "مجموعة تامة من الملحوظات المتبادِلة (E.C.O.C.)" ؟