# Cours Théorie des relations

Abdelaziz Amroune

Janvier 2021

# Contents

## Abstract

En mathématiques, il existe deux types de relations, relation d'ordre et similarité ou relation d'équivalence.

Les notions d'ordre, de classement, de rangement sont présentes dans de multiples activités ou situations humaines : hiérarchies administratives ou sociales, organigrammes, ordonnancements de tournois sportifs, ordres de préséance, de succession ou de préférences, motions d'ordre, ordres du jour, classements scolaires ou audiovisuels, ordre alphabétique, lexicographique, etc., on n'en finirait pas d'énumérer toutes les situations ou interviennent des ordres. Il n'est donc pas étonnant, compte tenu du développement de l'utilisation des mathématiques dans la modélisation de multiples phénomènes, de trouver de nombreux domaines ou les mathématiques de l'ordre sont présentes.

# Introduction

Comme la dit Mon prfesseur Maurice Pouzet "Le concept d'ordre a pour origine les relations familières entre objets, disons A, B, C,..., qui expriment des faits comme :

A est avant B

A est plus petit que B

A est meilleur que B.

Il intervient dés qu'on compare, qu'on classe, qu'on classe, qu'on définit une hiérarchie"

La théorie de l'ordre peut être vue fondamentalement comme un sujet entre la théorie des treillis et la théorie des graphes. En effet, on peut dire avec raison que les treillis sont des types spéciaux d'ensembles ordonnés, qui sont à leur tour des types spéciaux de graphes orientés. Pourtant, ce serait une approche beaucoup trop simpliste. Dans chaque théorie, les forces et faiblesses distinctes de la structure donnée peuvent être explorées.

Cela conduit à des questions et des résultats généraux et spécifiques à la discipline. Souvent, les trois domaines de recherche mentionnés, la théorie de l'ordre est sans aucun doute le plus récent. La première revue spécialisée **Order** fut lancé en 1984.

# Chapter 1

# Relations binaires

## Sommaire



Dans ce chapitre on donne des notions générales sur les relations binaires, ainsi que quelque formes de représentation de la relation binaire.

Enfin en termine ce chapitre par le calcule du nombre de relations de type particulier sur un ensemble $E$ fini.

Les notions utilisées dans ce chapitre peuvent être rencontrées dans [9, 10, 12, 13, 16, 18, 19, 20, 23].

## 1.1 Notions et vocabulaires

### 1.1.1 Relation binaire, graphe dirigé

Une relation binaire est un ensemble $\Re$ dont les éléments sont des couples. Etant donné un couple$(x, y)$ on dit que ses constituants $x$ et $y$ sont en relation si $(x, y) \in \Re$. Si on désigne la relation $\Re$ par un symbole, par exemple $\rho$, on note $x\rho y$ ce fait (si nécessaire, on utilise un symbole faisant référence à $\Re$, par exemple $\rho_{\Re}$) et on note $x\urcorner\rho y$ le fait contraire.

Pour tout ensemble $V$, l'ensemble $V \times V$ formé des couples d'éléments de $V$ est une relation binaire, on convient que l'ensemble vide, noté $\emptyset$ est également une relation binaire. Si $\Re$ est une relation binaire, son opposée ou duale est la relation binaire $\Re^{-1} := \{x, y) : (y, x) \in \Re\}$, sa symétrisée est la relation $\widehat{\Re} := \Re \cup \Re^{-1}$. Si $S$ et $T$ sont deux relations binaires, la composée de $S$ et $T$ est a relation binaire

$$T \circ S := \{(x, y) : (x, z) \in S \text{ et } (z, y) \in T \text{ pour au moins un } z\}.$$

Cette notation vient de la composition des fonctions, nous préférons noter $S \cdot T$ cette composée, conformément à l'usage en informatique. Si $\Re$ est une relation binaire, une partie de $\Re$ est une sous-relation de $\Re$; la restriction de $\Re$ à un ensemble $V$, dite encore relation induite par $\Re$ sur $V$, est la relation, notée $\Re / V$, égale à l'intersection $\Re \cap (V \times V)$.

Une relation binaire sur un ensemble $V$ est une partie de $V \times V$, c'est donc une sous-relation de $V \times$V.Si $\Re$ est une relation binaire sur $V$, la relation complément de $\Re$ dans $V$ est la relation $V \times V \setminus \Re$, le symbole $\rho$ désignant la relation $\Re$ on pourra désigner par : $\urcorner\rho$ la relation complément . Si $\Re$ est l'ensemble $\triangle_V$ formé des couples $(x, x)$ pour $x \in V$ alors $\Re$ n'est autre que la relation d'égalité sur $V$ désignée par le symbole $=$.

Un graphe dirigé (un graphe simple orienté) est un couple $G := (V, R)$, formé d'un ensemble $V$ et d'une relation binaire $\Re$ sur V.Les éléments de V sont les sommets de $G$, les couples $(x, y)$ appartenant à $\Re$ sont les arcs de $G$, les couples $(x, x)$ appartenant à $\Re$ sont les boucles de $G$. Le graphe dirigé $G$ étant donné, on note $V(G)$ l'ensemble de ses sommets,

$D(G)$ l'ensemble de ses arcs et, si besoin, on note $x\rho_G y$ le fait que $(x,y) \in D(G)$. Sauf indication contraire, on notera $x \in G$ pour $x \in V(G)$ et on conviendra que la cardinalité de $G$ est celle de $V(G)$.

Si $V$ est l'ensemble vide il n'y qu'une relation binaire sur $V$, à savoir la relation vide, le couple $(\emptyset, \emptyset)$ est un graphe dirigé, qu'on pourra noter 0 ou $\underline{0}$. Le dual du graphe dirigé $G := (V, R)$ est le coupl $G^{dual} := (V, \Re^{-1})$, le symétrisé de $G$ est le couple $\widehat{G} := (V, \widehat{\Re})$, le complément de $G$ est le couple $G^C := (V, V \times V \setminus \Re)$. Si $A$ est une partie de $V$, le couple $G \upharpoonright_A := (A, \Re \upharpoonright A)$ est la restriction de $G$ à $A$ ou encore le sous-graphe induit par $G$ sur $A$

Un ensemble ordonné, est un ensemble équipé d'un type spécial de relation binaire. Rappelons qu'abstrait, une relation binaire sur un ensemble $P$ n'est qu'un sous-ensemble $\Re \subseteq P \times P = \{(p,q) : p,q \in P\}$ . $(p,q) \in \Re$ signifie simplement que "$p$ est lié à $q$ sous $\Re$". Une relation binaire $\Re$ contient donc toutes les paires de points qui sont liés les uns aux autres sous $\Re$. Pour toute relation binaire $\Re$ dans ce texte, nous écrirons $p\Re q$ au lieu de $(p,q) \in \Re$ chaque fois que $p$ est lié à $q$ via $\Re$. Les relations les relations d'ordre sont les plus intéressantes pour nous.

## 1.2 Préordre, équivalence, ordre, ordre total, ordre strict

Une relation binaire $\Re$ sur un ensemble $V$ est :

**(1)** réflexive si $x\Re x$ pour tout $x \in V$;

**(2)** irréflexive si $x\Re x$ pour tout $x \in V$;

**(3)** symétrique si $x\Re y$ implique $y\Re x$ pour tout $x, y \in V$;

**(4)** antisymétrique si $x\Re y$ et $y\Re x$ impliquent $x = y$ pour tout $x, y \in V$;

**(5)** totale si $x \neq y$ implique $x\Re y$ ou $y\Re x$ pour tout $x, y \in V$;

**(6)** transitive si $x\Re y$ et $y\Re z$ impliquent $x\Re z$ pour tout $x, y, z \in V$.

En termes ensemblistes, les conditions ci-dessus se traduisent respectivement

**(1')** $\triangle_V \subseteq \Re$;

**(2')** $\triangle_V \cap \Re = \emptyset$;

**(3')** $\Re \subseteq \Re^{-1}$;

**(4')** $\Re \cap \Re^{-1} \subseteq \triangle_V$;

**(5')** $\widehat{\Re} \cup \triangle_V = V \times V$ ;

**(6')** $\Re \circ \Re \subseteq \Re$.

### 1.2.1 Préordre

Une relation $\Re$ sur un ensemble $V$ est un préordre si elle est réflexive et transitive; c'est un ordre si elle est en outre antisymétrique, tandis que si, à l'opposé, elle est symétrique, c'est une équivalence. Ainsi, ordres et équivalences sont deux variétés particulières de préordres.

### 1.2.2 Ordre, ordre total.

Le plus souvent, on désigne une relation d'ordre par le symbole $\leq$, on lit $x$ inférieur ou égal à y le fait que $x \leq y$,

et on note $x \nleq y$ le fait contraire (plutôt que $x^{\neg} \leq y$). Pour éviter la confusion avec d'autres ordres sur le même ensemble on utilise aussi des notations comme $x \leq y \pmod{\Re}$ ou $x \leq_{\Re} y$.

Ainsi, un ordre sur V vérifie les propriétés suivantes :

**(i)** $x \leq x$ pour tout $x \in V$;

**(ii)** $x \leq y$ et $y \leq z$ impliquent $x \leq z$ pour tout $x, y, z \in V$;

**(iii)** $x \leq y$ et $y \leq x$ impliquent $x = y$ pour tout $x, y \in V$.

L'ordre est linéaire, ou total, si en tant que relation binaire il est total, c'est à dire si outre les conditions (i) à (iii) ci-avant, il satisfait la condition :

**(iv)** $x \leq y$ ou $y \leq x$ pour tout $x, y \in V$ .

Dans ce cas, les éléments de $V$ sont usuellement représentés sur une ligne (horizontale ou verticale), d'où le mot "linéaire".

### 1.2.3 Ordre strict

Une relation $S$ sur V est un ordre strict si elle est irréflexive et transitive.

Le plus souvent on désigne un ordre strict $S$ par le symbole $<$, on note $x < y$ et on lit $x$ strictement inférieur à $y$ le fait que $(x, y) \in S$, on note $x^\neg < y$ le fait contraire.

Si $\Re$ est une relation d'ordre sur $V$, la relation $S := \Re \diagdown \triangle_V$ est un ordre strict, l'ordre strict associé à $\Re$. La relation d'ordre étant désignée par le symbole $\leq$, la relation $S$ est définie par $x < y$ si $x \leq y$ et $x \neq y$. Réciproquement, si une relation $S$ est un ordre strict sur un ensemble $V$, alors elle est antisymétrique et la relation $\Re := S \cup \triangle_V$ est un ordre sur $V$.

Ainsi, les notions d'ordre et d'ordre strict sont deux façons équivalentes de capturer la notion d'ordre.

### 1.2.4 Equivalence

On utilise le symbole $\equiv$ (ou aussi $\cong$) pour désigner une équivalence, on lit $x$ équivalent à $y$ le fait que $x \equiv y$ et on note $x \not\equiv y$ le fait contraire. Si $\equiv$ désigne une équivalence sur un ensemble $V$ alors pour chaque $x \in V$, l'ensemble $\overline{x} := \{y \in V : x \equiv y\}$ est la classe d'équivalence de $x$. Les classes d'équivalence forment une partition de V. L'ensemble des classes d'équivalence, qu'on peut noter $V \diagup \equiv$, est le quotient de $V$ par la relation d'équivalence $\equiv$. L'application qui à chaque $x \in V$ associe $\overline{x}$ est la surjection canonique de $V$ dans $V \diagup \equiv$.

### 1.2.5 Equivalence, préordre et ordre.

Si $\Re$ est un préordre sur $V$, la relation $\Re \cap \Re^{-1}$ est une relation d'équivalence et la relation $\Re \diagdown \Re^{-1}$ un ordre strict. Si on note encore $x \leq y$ le fait que $(x, y) \in \Re$, ceci bien que $\Re$ ne soit pas forcément un ordre, la première relation est définie par $x \equiv y$ si $x \leq y$ et $y \leq x$. La seconde est définie par $x < y$ si $x \leq y$ et $y^\neg \leq x$.

L'application canonique transforme le préordre $\Re$ en un ordre dans

$V \diagup \equiv$, l'ensemble$\Re_{\equiv} := \{(\overline{x}, \overline{y}) : (x, y) \in \Re\}$, appelé ordre quotient. Elle

transforme l'ordre strict $\Re \diagdown \Re^{-1}$ en l'ordre strict associé à $\Re_{\equiv}$. On a ainsi $x \leq y \pmod{\Re}$ si et seulement si $x \leq y \pmod{\Re^{-1}}$. Ceci entraine que le préordre est entièrement déterminé par la partition de $V$ en classes d'équivalence et par l'ordre sur l'ensemble des classes.

Ensemble des parties : Soit $E$ un ensemble, on appelle ensemble des parties de $E$, noté $\wp(E)$ l'ensemble constitué des sous-ensembles de $E$.

On remarque bien que les éléments de $\wp(E)$ sont des ensembles

Exemple : Si $E = \{x, y\}$ alors $\wp(E) = \{\emptyset, \{x\}, \{y\}, E\}$

On a $\wp(\emptyset) = \{\emptyset\}$

De même $\wp(\wp(\emptyset)) = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$.

### 1.2.6 Produit cartésien

**Définition 1** *Soit $A$ et $B$ deux ensembles, on appelle couple (ou paire ordonnée) d'élément de $A$ et de $B$ tout ensemble de la forme $\{a, \{a, b\}\}$ avec $a \in A$ et $b \in B$. Un tel ensemble se note alors $(a, b)$. L'ensemble constitué des couples d'éléments de $A$ et de $B$ s'appelle le produit cartésien de $A$ par $B$ et se note $A \times B$. Il faut bien remarquer que $(a, b) \neq (b, a)$ le plus souvent.*

Soient $E, F$ deux ensembles et $A$ une partie de $E$ on note par $\wp(E)$ l'ensemble des parties de $E$ et par $id_E$ l'application identique de $E$.

On désigne par $E \backslash F$ l'ensemble des éléments de $E$ qui n'appartiennent pas à $F$, et par à $\mathcal{F}(E, F)$ l'ensemble des applications de $E$ dans $F$, on écrira souvent $f : E \rightarrow F$ pour signifier que $f \in \mathcal{F}(E, F)$, et on note $F \diagup A$ la restriction de $f$ à $A$.

## 1.3 Relation d'un ensemble E dans un ensemble F

**Définition 2** *(Relation binaire). Soient $E$ et $F$ deux ensembles, une relation entre $E$ et $F$ est une partie de $E \times F$. Si $\Re$ est une relation entre $E$ et $F$, on dira que $x$ est en relation avec $y$ lorsque $(x, y) \in \Re$, On notera souvent plus simplement $x \Re y$, lorsque $E = F$, nous parlerons d'une relations binaire sur $E$.*

**Définition 3** *$E$ et $F$ deux ensembles et $f : E \rightarrow F$. Le graphe de $f$ est une relation binaire, on a alors $x \Re y \Leftrightarrow y = f(x)$. Réciproquement.*

**Définition 4** *(Domaine, image). Soient $E$ et $F$ deux ensembles et $\Re$ une relation entre $E$ et $F$. On appelle domaine de $\Re$ l'ensemble :*

$$\{x \in E \mid \exists y \in F, x\Re y\}. \tag{1.1}$$

On appelle image de $\Re$ l'ensemble

$$\{y \in F \mid \exists x \in E, x\Re y\}. \tag{1.2}$$

**Définition 5** *(Image directe, image réciproque (inverse)). Soient $E, F$ deux ensembles et soit $\Re$ une relation binaire de $E$ dans $F$ (c'est-à-dire $\Re \subseteq E \times F$), et soit $A$ une partie de $E$ (c'est-à-dire $A \subseteq E$), et $B$ une partie de $F$ (c'est-à-dire $B \subseteq F$).*

$\Re(A)$ est appelée l'image directe de $A$ et définie comme :

$$\Re(A) = \{y \in F \mid \exists x \in A, (x, y) \in \Re\}.$$

$\Re^{-1}(A)$ est appelée image réciproque de $B$ est définie par :

$$\Re^{-1}(B) = \{x \in E \mid \exists y \in B, (x, y) \in \Re\}.$$

**Définition 6** *(Image d'un élément selon une relation). Soient $E$ et $F$ deux ensemble, $\Re$ une relation binaire de $E$ vers $F$ et $a$ un élément de $E$.*

$$\Re(a) = \{y \in F \mid (a, y) \in \Re\} \tag{1.3}$$

*$\Re(a)$ est l'image selon $\Re$ de l'élément $a$ de $E$ est appelée coupe selon l'élément $a$.*

### 1.3.1 Fonctions

Un cas particulier de relation important est celui où pour chaque $x$ appartenant au domaine de $\Re$, il n'existe qu'un seul $y$ tel $x\Re y$.

**Définition 7** *(Fonction, application) Une fonction d'un ensemble $E$ dans un ensemble $F$ est une relation $\Re$ entre $E$ et $F$ tel que, pour tout $x \in E$, il existe au plus un $y \in F$ tel que $x\Re y$. Une application d'un ensemble $E$ dans un ensemble $F$ est une relation $\Re$ entre $E$ et $F$ tel que, pour tout $x \in E$, il existe exactement un $y \in F$ tel que $x\Re y$.*

Dans le cas d'une fonction ou d'une application, on utilise la notation plus commode $y = \Re(x)$ à la place de $x\Re y$. L'ensemble $\mathcal{F}(E, F)$ des applications de $E$ dans $F$ est une partie de $\wp(E \times F)$, (car une relation est un élément de $\wp(E \times F)$).

**Définition 8** *Soit $f \subseteq E \times F$ (une relation), on dit que la relation $f$ est fonctionnelle (fonction) si $\forall a \in E$, $(a, b) \in f$ et $(a, c) \in f \Rightarrow b = c$, et on écrit $f(a) = b$.*

## 1.4 Représentation d'une relation binaire

1. Liste de couples, Cette représentation calque strictement la définition en extension.

**Exemple 9** $\Re = \{(a, b), (a, c), (b, c), (b, d), (c, d), (e, a)\}$.

2. Table booléenne ou matrice caractéristique, Soit $\Re$ une relation de $A$ vers $B$ c'est-à-dire ($\Re \subset A \times B$) on associe une matrice booléenne $M_{\Re}$ formée comme suit,

les éléments de $A$ et de $B$ étant numérotés :

$M_{\Re}$ comporte une i-ème ligne par élément $a_i \in A$,

$M_{\Re}$ comporte une j-ième colonne par élément $b_j \in B$,

chaque élément $r_{i,j}$ de $M_{\Re}$ a pour valeur

$$r_{i,j} = \begin{cases} 1 \text{ si } (ai, bj) \in \Re; \\ 0 \text{ sinon.} \end{cases}$$

3. Vecteur de vérité :

L'ensemble des $(ai, bj) \in A \times B$ étant supposé énuméré dans un ordre fixe, à une relation $\Re \subset A \times B$ on associe le vecteur booléen $\Re$ formé à raison d'un booléen par couple $(ai, bj)$.

4. Table de successeurs :

C'est une mise en table de la représentation précédente, utilisant 1 ligne par élément de A, et k colonnes pour ses successeurs, où $k$ bornes le nombre de points (de $B$) images d'un point (de $A$).

### 1.4.1 Autres représentations

Si $E$ et $F$ sont finis on peut représenter une relation binaire ($\Re \subseteq E \times F$) par un diagramme sagittal, par un diagramme cartésien, ou encore par une matrice.

**Représentation ensembliste :** On liste tout simplement les couples satisfaisant à la relation.

**Diagramme sagittal ou graphe :**

Pour cela, on représente d'abord les éléments de $E$ et ceux de $F$ par des points, ce sont les sommets du diagramme, puis, si $a \in E$ et $b \in F$ sont tels que $a\Re b$, on dessine une flèche partant du point qui représente $a$ et allant à celui qui représente $b$. Lorsqu'on dessine le diagramme sagittal d'une relation binaire sur un ensemble $E$, on convient de le simplifier en représentant qu'une seule fois les éléments de $E$.

**Exemple 10** *Soit* $E = \{a, b, c, d, e\}$, $F = \{1, 2, 3, 4\}$.

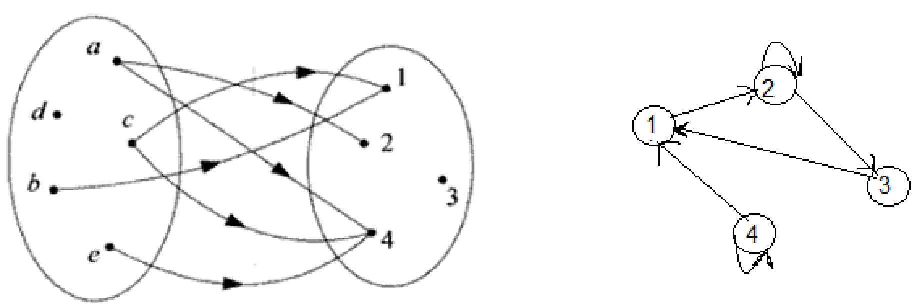
*On définit la relation* $\Re \subseteq E \times F$ *par :*

$\Re = \{(a, 4), (a, 2), (c, 1), (b, 1), (e, 4), (c, 4)\}$

*et la relation* $S$ *sur* $F$ *par :*

$S = \{(1, 2), (2, 2), (4, 1), (3, 1), (4, 4), (2, 3)\}$.

$sagitaldeRetS$




$_{1}.pdf$

FIG.1- **Diagramme sagittal pour $\Re$ et** S

**Diagramme cartésien :**

Tableau à double entrée qui représente une relation entre les éléments d'un ensemble de départ et ceux d'un ensemble d'arrivée. Les éléments d'un ensemble sont écrits à gauche et les éléments de l'autre ensemble en bas ou en haut. Une flèche indique le sens dans lequel la relation doit être lue. La case où la relation s'applique est marquée par un signe distinctif, soit par un $\times$, par un oui ou par un non. Le diagramme cartésien d'une relation sur un ensemble est carré, car il possède autant de lignes que de colonnes; avec les cases qui représentent les couples du type $(x, x)$ remplissent une diagonale du carré qu'on appelle la diagonale. Par exemple en déssine la table Cartésienne pour les relations $\Re$ et $S$.

| $\Re$ | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|
| $a$ | | $\times$ | | $\times$ |
| $b$ | $\times$ | | | |
| $c$ | $\times$ | | | $\times$ |
| $d$ | | | | |
| $e$ | | | | $\times$ |

| $S$ | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|
| 1 | | $\times$ | | |
| 2 | | $\times$ | $\times$ | |
| 3 | $\times$ | | | |
| 4 | $\times$ | | | $\times$ |

**Représentation des relations binaires entre éléments d'ensembles finis par des matrices** [19]

Considérons deux ensembles finis $E$ et $F$ et une relation $\Re$ enter les éléments de $E$ et de $F$. Puisque $E$ est fini nous pouvons désigne ses éléments par $a_1, ..., a_n$; puisque $F$ est fini nous pouvons désigne ses éléments par $b_1, ..., b_m$. Faisons correspondre à $\Re$ le tableau rectangulaire au matrice de $m$ lignes et $n$ colonnes obtenu en écrivant 1 à l'intersection de la $p^{iéme}$ lignes et de la $q^{iéme}$ colonnes lorsque $(a_p, b_q) \in \Re$ et en écrivant 0 lorsque $(a_p, b_q) \notin \Re$.

Il est facile de constater que la matrice correspondante à $\Re^c$ se déduit de celle correspondante à $\Re$ en changeant les 0 en 1 et les 1 en 0, et que si $\Re_1$ et $\Re_2$ sont deux relations entre les éléments de $E$ et de $F$, la matrice correspondante à $\Re_1 \cap \Re_2$ (resp. $\Re_1 \cup \Re_2$) est la matrice obtenu en "ajoutant" les éléments des matrices correspondante à $\Re_1$ et $\Re_2$ suivant la règle habituelle de l'addition des matrices (addition booléenne) avec les lois

$$\begin{cases} 0 \wedge 0 = 0 \wedge 1 = 1 \wedge 0 = 0; \\ 1 \wedge 1 = 1. \end{cases}$$

(resp)

$$\begin{cases} 1 \vee 1 = 0 \vee 1 = 1 \vee 0 = 1 \\ 0 \vee 0 = 0. \end{cases}$$

La matrice correspondante à $\Re_1 \circ \Re_2$ est la matrice obtenue par celles de $\Re_1$ et $\Re_2$ suivant les règles habituelles de la multiplication des matrices avec les lois

| $\otimes$ | 0 | 1 |
|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 |
| 1 | 0 | 1 |

et

| $\oplus$ | 0 | 1 |
|---|---|---|
| 0 | 0 | 1 |
| 1 | 1 | 1 |

**Exemple 11** *En faite la Représentation matricielle pour la relation $S$ et $\Re$ dans l'exemple président*

$$\begin{array}{c|cccc} \Re & 1 & 2 & 3 & 4 \\ \hline a & 0 & 1 & 0 & 1 \\ b & 1 & 0 & 0 & 0 \\ c & 1 & 0 & 0 & 1 \\ d & 0 & 0 & 0 & 0 \\ e & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \qquad \begin{array}{c|cccc} S & 1 & 2 & 3 & 4 \\ \hline 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \qquad \begin{array}{c|cccc} \Re \circ S & 1 & 2 & 3 & 4 \\ \hline a & 0 & 1 & 0 & 1 \\ b & 1 & 0 & 0 & 0 \\ c & 1 & 0 & 0 & 1 \\ d & 0 & 0 & 0 & 0 \\ e & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}$$

**Remarque 12**

- *Pour reconnaitre qu'une relation est réflexive, il suffit de vérifie qu'à chaque sommet du diagramme sagittal il y a une flèche qui part de ce sommet et qui y revient une telle flèche s'appelle une boucle. Et sur le diagramme cartésien et les matrices la relation binaire est réflexive quand toute la diagonale est noircie (i.e.,$(x, x) = 1$).*

- *Pour reconnaitre la symétrique d'une relation binaire sur son diagramme sagittal, il suffit de vérifier qu'à chaque fois qu'une flèche va de a à b, une autre flèche revient de b à a.Et il suffit de vérifie que son diagramme cartésien et son matrice est symétrique par rapport à la diagonale (i.e., les couples $(a, b)$ et $(b, a)$ ont même valeur).*

### 1.4.2 Relation binaire sur un ensemble non vide

Soit $E$ un ensemble non vide, une relation binaire sur $E$ est une partie $\Re$ du produit cartésien $E \times E$, c'est-à-dire un ensemble des couples $(x, y)$ d'éléments de $E \times E$, si le couple $(x, y) \in \Re$ on dit que x est lié à y par la relation $\Re$, et on note $x\Re y$. si $(x, y) \notin \Re$ on dit que $x$ n'est pas en relation avec $y$.

Soit $E$ un ensemble non vide et $\Re$ une relation binaire sur $E$. On notera $\Re^c$ la relation complémentaire de $\Re$,

($(x, y) \in \Re$ si et seulement si $(x, y) \notin \Re$), et $\Re^d$ la relation duale de $\Re$ ($x\Re^d y$ si et seulement si $y\Re x$). La relation $(\Re^c)^d (= (\Re^d)^c)$ est notée $\Re^{cd}$ et est égale à $\{(x, y) \in E^2 : (y, x) \notin \Re\}$, on l'appelle la co-duale de $\Re$.

Les relations binaires étant des parties d'un ensemble, donc on peut définir des opérations ensemblistes telles que d'inclusion, la réunion, l'intersection et la complémentation.

Elles sont définies comme suit :

$\Re \subseteq \Re$' si $x\Re y$ implique $x\Re' y$.

$\Re \subset \Re$' si $x\Re y$ implique $x\Re' y$ et $\Re \neq \Re$' (Dans ces deux cas, on dit aussi que la relation $\Re$' est compatible avec la relation $\Re$ ou que $\Re$' est une extension de $\Re$).

$\Re \cup \Re$'$= \{(x, y) \in E^2 : (x, y) \in \Re$ ou $(x, y) \in \Re'\}$.

$\Re \cap \Re$'$= \{(x, y) \in E^2 : (x, y) \in \Re$ et $(x, y) \in \Re'\}$.

Le produit de $\Re$ et $\Re$' est la relation sur E, notée $\Re o \Re$' ou $\Re\Re$', et définie par :

$x\Re \circ \Re' z$ ou $x\Re\Re' z$ s'il existe $t \in E$ tel que $x\Re t$ et $t\Re' z$.

Le complémentaire de $\Re$ noté $\overline{\Re}$ est la relation binaire définie sur $E$ et qui regroupe tous les couples de $E \times E$ qui ne sont pas dans $\Re$, c'est-à-dire $\overline{\Re} = \{(x, y) \in E^2 \mid (x, y) \notin \Re\}$.

**Exemple 13** *Soit* $(M, \bullet)$ *un monoïde (c'est-à-dire* $(M, \bullet)$ *est un semi-groupe avec un élément neutre du* $M$*). On définit sur* $M$ *les deux relations suivantes :*

$x\Re y$ si et seulement s'il existe $(u, v) \in M^2$ tel que $x = y \bullet u$ et $y = x \bullet v$.

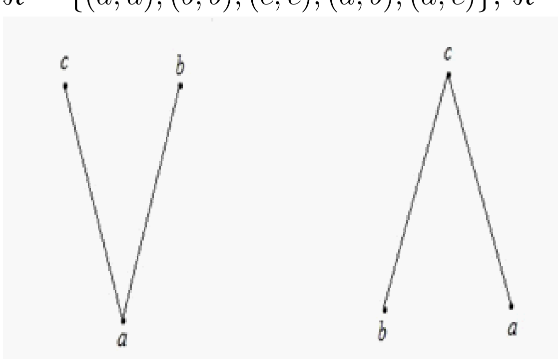
$xKy$ si et seulement s'il existe $(u, v, u', v') \in M^4$ tel que $x = u \bullet y \bullet v$ et $y = u' \bullet x \bullet v'$.

$\Re \subseteq K$, car :

Soit $(x, y) \in \Re$ soit encore $x\Re y$ cela est équivalent à l'existence de $(u, v) \in M^2$ tel que $x = y \bullet u$ et $y = x \bullet v$. Cela signifie donc que $x = e \bullet y \bullet u$ , et $y = e \bullet x \bullet v$, autrement dit $(x, y) \in \Re$ entraine toujours $(x, y) \in K$.

**Exemple 14** *Soient* $E = \{a, b, c\}$*, et*

$\Re = \{(a, a), (b, b), (c, c), (a, b), (a, c)\}$, $\Re$'$= \{(a, a), (b, b), (c, c), (a, c), (b, c)\}$.




Le diagramme de $\mathcal{R}$ Le diagramme de $\mathcal{R}'$

Alors :

$$\begin{array}{lcl}
\Re \cup \Re' & = & \{(a,a),(b,b),(c,c),(a,b),(a,c),(b,c)\}. \\
\Re \cap \Re' & = & \{(a,a),(b,b),(c,c),(a,c)\}. \\
\Re o \Re' & = & \{(a,a),(b,b),(c,c),(a,b),(a,c),(b,c)\}. \\
\overline{\Re} & = & \{(b,a),(c,a),(c,b),(b,c)\}.
\end{array}$$

**Définition 15** *(Relation inverse ou réciproque). Soit $E$ un ensemble non vide et $\Re$ une relation binaire sur $E$, l'inverse de $\Re$ noté $\Re^{-1}$est une relation binaire sur $E$ qui regroupe les couples $(y,x)$ où $(x,y) \in \Re$, c'est-à-dire $\Re^{-1} = \{(y,x) \in E^2 \diagup (x,y) \in \Re\}$.*

**Définition 16** *(Relation identité ou égalité)). Soit $E$ un ensemble non vide et $\Re$ une relation binaire sur $E$, l'identité de $\Re$ noté $IE$ (identité de $E$) ou $\triangle E$ (diagonale de $E$) est une relation binaire sur $E$ qui regroupe les couples $(x,x)$ de $E \times E$ pour tout $x$ élément de $E$, (c'est-à-dire, $(x,x) \in IE$ pour tout $x \in E$, $IE = \triangle E = \{(x,x) \in E^2 \diagup (x,x) \in \Re\}$).*

**Définition 17** *(Relation induite). Soient $\Re$ une relation binaire sur un ensemble $E$, et $F$ une partie de $E$. On obtient une relation binaire sur $F$, provisoirement notée $\Re_F$, en posant $\Re_F = \{(x,y) \in F \times F \mid x\Re y\}$.*

Pour $x, y \in F$, on a donc $x\Re_F y$ si et seulement si $x\Re y$. On appelle $\Re_F$ la, relation induite par $\Re$ sur $F$.

### 1.4.3 Propriétés remarquables d'une relation binaire

Soit $\Re$ une relation binaire sur un ensemble E non vide, on dit que $\Re$ est :

1. Réflexive si pour tout $x \in E$, $x\Re x$ (c'est-à-dire, $IdE \subseteq \Re$ ou $\Delta_E \subseteq \Re$),
2. Irréflexive si pour tout $x \in E$, $(x,x) \notin \Re$ (c'est-à-dire, $\Re \cap IdE = \emptyset$),
3. Symétrique si pour tout $x, y \in E$, $x\Re y$ entraine $y\Re x$ (c'est-à-dire $\Re = \Re^{-1}$),
4. Antisymétrique si pour tout $x, y \in E$, $x\Re y$ et $y\Re x$ entraine $x = y$ (c'est-à-dire, $\Re \cap \Re^{-1} \subseteq IdE$),
5. Transitive si pour tou $x, y, z \in E$, $x\Re y$ et $y\Re z$ entraine toujours $x\Re z$ (c'est-à-dire, $\Re \circ \Re = \Re^2 \subseteq \Re$).

Soit $\Re$ une relation binaire sur $E$ alors

►Si $\forall a \in E, a \in \Re(a)$, alors $\Re$ est réflexive.

►Si $\forall a, b \in E, a \in \Re(b) \Rightarrow b \in \Re(a)$, alors $\Re$ est symétrique.

►Si $\forall a, b \in E, a \in \Re(b)$ et $b \in \Re(a) \Rightarrow a = b$, alors $\Re$ est antisymétrique.

►Si $\forall a, b, c \in E, a \in \Re(b)$ et $b \in \Re(c) \Rightarrow a \in \Re(c)$, alors $\Re$ est transitive.

**Définition 18** *(Relation inverse )*

*Soit $\Re$ une relation binaire d'un ensemble $E$ vers un ensemble $F$. On appelle relation inverse de $\Re$ et on note $\Re^{-1}$, la relation binaire de $F$ vers $E$ définie par :*

$$\forall (x, y) \in E \times F, (x\Re^{-1}y) \Leftrightarrow (y\Re x).$$

**Exemple 19** *Soit $E = \{a, b, c\}$ et on définit la relation $\Re$ par : $\Re = \{(a, a), (a, b), (b, c)\}$, alors $\Re^{-1} = \{(a, a), (b, a), (c, b)\}$.*

**Définition 20** *Soient $E, F$ deux ensembles non vides et $\Re$ et $S$ deux parties non vides de $E \times F$. On dit que la relation $\Re$ est incluse dans la relation $S$ et on note $\Re \subset S$, si $(x, y) \in E \times F, \forall (x, y) \in \Re \Rightarrow (x, y) \in S$. On dit que $\Re$ est plus fine que $S$ ($S$ plus grossière que $\Re$). On dit que deux relations $\Re$ et $S$ sont égales si $\Re \subset S$ et $S \subset \Re$.*

**Exemple 21** *On considère l'ensemble $D$ des droites du plan $P$.*

*Soient $D_1$, $D_2$ deux droites de $D$,*

*$D_1 \Re D_2 \Longleftrightarrow D_1$ est orthogonale à $D_2$*

*$D_1 S D_2 \Longleftrightarrow D_1$ s'intersecte avec $D_2$. (i.e., $D_1 \cap D_2 \neq \emptyset$)*

*$\Re$ est plus fine que $S$, car si deux droites sont perpendiculaires alors elles s'intersectent.*

**Définition 22** *(complémentaire de $\Re$)*

*Soit $\Re$ une relation binaire d'un ensemble $E$ vers un ensemble $F$. On appelle relation complémentaire de $\Re$ et on note $\Re^c$ ou $\overline{\Re}$, la relation binaire de $E$ vers $F$ définie par :*

$$\forall (x, y) \in E \times F, \ (x, y) \in \Re^c \Leftrightarrow (x, y) \notin \Re.$$

**Définition 23** *Soient $\Re$ et $S$ deux relations binaires d'un ensemble $E$ vers un ensemble $F$. On appelle réunion de $\Re$ et $S$ et on note $T = \Re \cup S$ la relation binaire $T$ de $E$ vers $F$ définie par : $\forall (x, y) \in E \times F, xTy \Leftrightarrow ((x\Re y) \vee (xSy))$.*

**Définition 24** *On appelle intersection de $\Re$ et $S$ et on note $T = \Re \cap S$ la relation binaire $T$ de $E$ vers $F$ définie par :*

$$\forall (x, y) \in E \times F, xTy \Leftrightarrow ((x\Re y) \wedge (xSy)).$$

**Définition 25** *Soient les relations $\Re \subseteq E \times F$ et $S \subseteq F \times G$ La composée $T$ de $S$ et $\Re$ est une relation binaire de l'ensemble $E$ vers l'ensemble $G$ notée $T = S \circ \Re$ ou $T = S\Re$ et définie par :*

$$\forall (x, y) \in E \times G, (xTy) \Leftrightarrow (\exists z \in F \ tq \ (x\Re z) \wedge (zSy)).$$

**Exemple 26** *Soit $\Pi$ un ensemble de personnes, $P$ la relation exprimant que telle personne est père de telle autre, $M$ la relation exprimant que telle personne est mère de telle autre. La relation composée $G = M \circ P$ est satisfaite s'il existe un couple $(x, y)$ de personnes telles qu'il existe un personne $z$ dont $x$ soit le père, et qui soit mère de $y$, i.e. ssi $x$ est grand-père maternel de $y$.*

**Notation 27** *Dans le cas particulier où $E = F = G$ on note $\Re = \Re \circ \Re = \Re\Re$.*

**Exemple 28** *Soit $E = \{a, b, c, d\}$ et soit $\Re = \{(a, b), (b, c), (c, d)\}$ définie sur $E$. Alors la composition de $\Re$ est $\Re \circ \Re = \Re^2 = \{(a, c), (b, d)\}$.*

**Proposition 29** *Soit $\Re$ une relation binaire sur un ensemble $E$.*

1. *Si $\Re$ est réflexive alors $\Re^{-1}$ est réflexive.*

2. *$\Re^{-1} \circ \Re$ est réflexive si, et seulement si, l'ensemble de définition de $\Re$ est $E$.*

3. *$\Re$ est transitive si, et seulement si, $\Re \circ \Re \subset \Re$.*

4. *Si $\Re$ est transitive, $\Re \circ \Re$ l'aussi.*

5. *$\Re$ est antisymétrique si, et seulement si, $\Re \cap \Re^{-1} \subset \Delta_E$.*

**Proof.**

**1.** Si $\Re$ est réflexive alors $\forall x \in E, (x, x) \in \Re$ donc $(x, x) \in \Re^{-1}$, alors $\Re^{-1}$ est réflexive.

**2.** Pour l'implication directe, on suppose que $\Re^{-1} \circ \Re$ est réflexive est on montre que l'ensemble de définition de $\Re$ est $E$.

$\Rightarrow \forall x \in E, x \left(\Re^{-1} \circ \Re\right) x.$

$\Rightarrow \forall x \in E, \exists y \in E \ tq \ (x\Re y) \wedge \left(y\Re^{-1}x\right).$

$\Rightarrow \forall x \in E, \exists y \in E : x\Re y \wedge x\Re y.$

$\Rightarrow \forall x \in E, \exists y \in E : x\Re y.$

$\Rightarrow Dom\left(\Re\right) = E.$

Pour l'implication inverse, suppose $Dom\left(\Re\right) = E$ $(i.e., \forall x \in E, \exists y \in E : x\Re y)$ est on montre que $\Re^{-1} \circ \Re$ est réflexive

$\Rightarrow \forall x \in E, \exists y \in E : (x\Re y) \wedge \left(y\Re^{-1}x\right).$

$\Rightarrow \forall x \in E, \exists y \in E : x\Re \circ \Re^{-1}x$. Donc $\Re^{-1} \circ \Re$ est réflexive.

**3.** On montre que $\Re$ est transitive entraine $\Re \circ \Re \subset \Re$.

Soit $(x, y) \in \Re \circ \Re$, alors $\exists z \in E : (x\Re z) \wedge (z\Re y)$ comme $\Re$ est transitive alors $x\Re y$ $(i.e., (x, y) \in \Re)$, donc $\Re \circ \Re \subset \Re$.

On montre que si $\Re \circ \Re \subset \Re$, alors $\Re$ est transitive.

Soit $x, y, z \in E : \begin{cases} x\Re y \\ \text{et} \\ y\Re z \end{cases} \Rightarrow x \left(\Re \circ \Re\right) z \Rightarrow (x, z) \in \Re \circ \Re$ alors $(x, z) \in \Re$ car $\Re \circ \Re \subset \Re$, donc $\Re$ est transitive.

**4.** $\Re$ transitive entraine $\Re \circ \Re$ transitive

Soient $x, y, z \in E$ telle que :

$\begin{cases} x\Re \circ \Re y \\ \text{et} \\ y\Re \circ \Re z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \exists z_1 \in E : (x\Re z_1) \wedge (z_1\Re y) \\ \exists z_2 \in E : (y\Re z_2) \wedge (z_2\Re z) \end{cases}$ comme $\Re$ est transitive on a : $\begin{cases} x\Re y \\ \text{et} \\ y\Re z \end{cases} \Rightarrow$ $x\Re \circ \Re z$, donc $\Re \circ \Re$ est transitive.

**5.** $\Re$ est antisymétrique $\Rightarrow \Re \cap \Re^{-1} \subset \Delta_E$.

On suppose $\Re$ est antisymétrique et soit $(x,y) \in \Re \cap \Re^{-1} \Leftrightarrow (x,y) \in \Re$ et $(x,y) \in \Re^{-1} \Leftrightarrow$ $(x,y) \in \Re$ et $(y,x) \in \Re \Rightarrow (x=y)$, (car $\Re$ antisymétrique), alors $(x,y) = (x,x) \in \Delta_E$ donc $\Re \cap \Re^{-1} \subset \Delta_E$.

Inversement, supposons que $\Re \cap \Re^{-1} \subset \Delta_E$ et montrons que $\Re$ est antisymétrique. Soit $x, y \in E$ telle que :

$$\begin{cases} x\Re y \\ \text{et} \\ y\Re x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x\Re y \\ \text{et} \\ x\Re^{-1} y \end{cases} \Rightarrow (x,y) \in \Re \cap \Re^{-1}, \text{ alors } x = y \text{ car}(\Re \cap \Re^{-1} \subset \Delta_E), \text{ donc } \Re \text{ est}$$

antisymétrique. ■

### 1.4.4 Représentation d'une relation binaire sur un ensemble non vide

**Représentation graphique**

Une relation binaire $\Re$ dans E peut être représentée par un graphe orienté $(E, \Re)$ où $E$ est l'ensemble des sommets du graphe et $\Re$ est l'ensemble des arcs du graphe (couples de sommets). Les propriétés remarquables d'une relation binaire peuvent facilement exprimer à l'aide de la représentation sagittale du graphe $(E, \Re)$. La réflexivité de $\Re$ se traduit par la présence d'une boucle en chaque sommet. La symétrie de $\Re$ signifie que la présence d'un arc orienté de $a$ vers $b$ implique l'existence d'un arc orienté de $b$ vers $a$. La transitivité de $\Re$ se traduit en termes de graphe par le fait que s'il existe un chemin de longueur 2, de $a$ vers $b$, il existe un arc de $a$ vers $b$. Prendre la relation inverse de $\Re$ revient à inverser l'orientation de tous les arcs du graphe. Prendre la relation complémentaire consiste à ajouter tous les arcs manquants dans le graphe et à supprimer tous les arcs existants. Notons qu'une relation symétrique peut, plus commodément être représentée par un graphe non orienté dans lequel les couples $(a,b)$ et $(b,a)$ de la relation donnent lieu à une arête entre les sommets $a$ et $b$.

### 1.4.5 Représentation matricielle

**Définition 30** *On appelle matrice booléenne d'ordre n, toute matrice $n \times n$ à coefficients dans $\{0,1\}$. Dans l'ensemble des matrices booléenne d'ordre $n$, on définit deux lois de composition $'' + ''$ et $'' \cdot ''$ définie, pour $A = (a_{i,j}) 1 \leq i,j \leq n$ et $B = (b_{i,j}) 1 \leq i,j \leq n$, par*

$A + B = (ci, j)1 \leq i, j \leq n$ *avec* $c_{i,j} = Max(a_{i,j}, b_{i,j})$ *et*

$A \cdot B = (d_{i,j}), 1 \leq i, j \leq n$ *avec* $d_{i,j} = \max_{k=1,\dots,n}(a_{i,k}b_{k,j})$.

**Définition 31** *Soit* $E = \{x_1, \dots\dots, x_n\}$ *un ensemble fini et* $\Re$ *une relation binaire sur* $E$*. On appelle matrice booléenne associée à* $\Re$ *la matrice* $M_\Re = (a_{i,j})$*,* $1 \leq i, j \leq n$ *définie par :*

$$\text{Pour tout } 1 \leq i, j \leq n,\ a_{i,j} = \begin{cases} 1 \text{ si } x_i \Re x_j; \\ 0 \text{ sinon.} \end{cases}$$

**Proposition 32** *Dans cette situation, on a :*

$\Re$ est réflexive si et seulement si $M_\Re$ ne possède que des 1 sur sa diagonale.

$\Re$ est symétrique si et seulement si ${}^tM_\Re = M_\Re$.

**Proposition 33** *Soit* $E$ *un ensemble fini et* $\Re$ *et* $\mathcal{S}$ *deux relations binaires sur* $E$ *de matrice booléenne respective* $M_\Re$ *et* $M_\mathcal{S}$*. La matrice booléenne de* $\Re \cup \mathcal{S}$ *vaut*

$$M_{\Re\cup\mathcal{S}} = M_\Re + M_\mathcal{S} \tag{1.4}$$

Et celle de $\Re \circ \mathcal{S}$ est

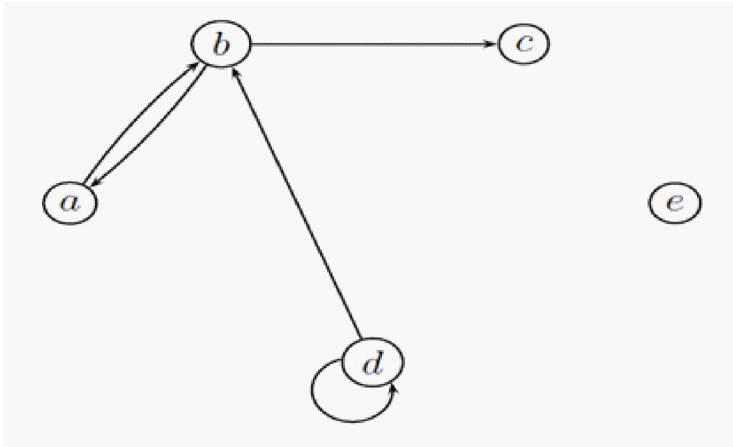
$$M_{\Re\cup\mathcal{S}} = M\Re \cdot M_\mathcal{S} \tag{1.5}$$

Si $\Re \circ \Re \subseteq \Re$ c'est-à-dire $(M_{\Re\circ\Re} = M_{\Re^2} \leq M_\Re)$, alors $\Re$ est transitive.

**Exemple 34** *Soit* $E = \{a, b, c, d, e\}$*. Considérons la relation* $\Re = \{(a, b), (b, a), (b, c), (d, b), (d, d)\}$*. Une représentation matricielle de* $\Re$ *est donnée par:*

| $\Re$ | $a$ | $b$ | $c$ | $d$ | $e$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $a$ | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 |
| $b$ | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 |
| $c$ | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| $d$ | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 |
| $e$ | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |

Une représentation sagittale du graphe $(E, \Re)$ est :




### 1.4.6 Compatibilité entre une opération interne et une relation binaire

La relation binaire $\Re$ sur un ensemble non vide $E$, est dit compatible avec l'opération (définie dans $E$) de symbole " $\circ$ " lorsque, quels que soient les éléments $x, x', y$ et $y'$ de E : si $x \Re x'$ et si $y \Re y'$ alors $(x \circ y) \Re \ (x' \circ y')$. Autrement dit, l'opération conserve la relation.

**Exemple 35** *On considère la relation classique d'inégalité dans* $\mathbb{R}$ *: si on a* $x \leq x'$ *et* $y \leq y'$*, on peut écrire* $x + x' \leq y + y\prime$*.*

Ce résultat est bien connu : on a le droit « d'additionner des inégalités membre à membre ». En d'autres termes, l'addition des réels est compatible avec l'inégalité.

Mais, de $-2 \leq 1$ et de $-3 \leq -1$, on ne peut pas déduire que $6 \leq -1$. On n'a pas le droit de « multiplier des inégalités membre à membre ».

La multiplication des réels, quand a elle, n'est donc pas compatible avec l'inégalité.

### 1.4.7 Fermetures

Soit $\Omega$ un ensemble et (p) une propriété et soit $\mathcal{S} \subseteq \Omega$ telle que $\mathcal{S}$ peut satisfaire (p) ou non.

La question qui se pose est la suivante :

-Quel est le plus petit sous-ensemble de $\Omega$ qui contient $\mathcal{S}$ et qui vérifie la propriété (p)? c'est-à-dire, trouver $\mathcal{C} \subseteq \Omega$ telle que :

1. $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{C}$,

2. la propriété (p) est vérifiée dans $\mathcal{C}$.

Et si $\mathcal{D} \subseteq \Omega$ telle que $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{D}$, et la propriété (p) est vérifié dans $\mathcal{D}$, alors $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{D}$. Alors $\mathcal{C}$ est appelé la fermeture de $\mathcal{C}$ selon (p). Cet ensemble est généralement noté p($\mathcal{S}$).

Soit $\Re$ une relation binaire sur un ensemble non vide E, (c'est-à-dire, $\Re \subseteq E \times E$):

**Fermeture réflexive : (qu'on note r($\Re$) ou bien réflexive($\Re$))**

r($\Re$) $= \Re \cup IE$, et si $\Re$ est réflexive alors r($\Re$) $= \Re$.

**Fermeture symétrique : (qu'on note Sym($\Re$) ou bien symétrique($\Re$))**

Sym($\Re$) $= \Re \cup \Re^{-1}$, et si $\Re$ est symétrique alors Sym($\Re$) $= \Re$.

**Exemple 36** *Soit* $E = \{1, 2, 3, 4\}$ *et* $\Re = \{(1,1), (1,3), (2,4), (3,1), (3,3), (4,3)\}$ *alors :*

La fermeture réflexive est :

r($\Re$)=réflexive($\Re$) $= \Re \cup$IE $= \Re \cup \{(2,2), (4,4)\}$

La fermeture symétrique est :

Sym($\Re$) = symétrique($\Re$) $= \Re \cup \Re^{-1} = \Re \cup \{(4,2), (3,4)\}$.

**Fermeture transitive : (qu'on note t($\Re$) ou bien transitive($\Re$))**

t($\Re$) = transitive($\Re$) $= \Re \cup \Re^2 \cup \Re^3 \cup \ldots \cup \Re^i \cup \ldots = \bigcup\limits_{(j \geq 1)} \Re^j = \Re^*$.

**Théoreme 37** *[15] Soient E un ensemble de n éléments et* $\Re$ *est une relation binaire sur E, alors la fermeture transitive de* $\Re$ *est : transitive(*$\Re$*)=* $\Re \cup \Re^2 \cup \Re^3 \cup \ldots \cup \Re^n$*.*

**Exemple 38** *Soit* $E = \{1, 2, 3\}$ *et* $\Re = \{(1,2), (2,3), (3,3)\}$ *alors :*

$\Re^2 = \Re \circ \Re = \{(1,3), (2,3), (3,3)\}$ et $\Re^3 = \Re^2 \circ \Re = \{(1,3), (2,3), (3,3)\}$.

La fermeture transitive est :

t($\Re$) = transitive($\Re$)= $\{(1,2), (2,3), (3,3), (1,3)\}$.

## 1.5 Application d'un semble fini

### 1.5.1 Nombre de couples, nombre de n-uples

Soit $E$ un ensemble fini à $m$ éléments.

Nombre de couples :

Un couple n'est finalement qu'une application de l'ensemble $\{1, 2\}$ dans l'ensemble $E$. A 1 elle fait correspondre la première composante du couple et à 2 la deuxième. Il y a donc autant de couples $(x, y)$ constituée d'éléments $x$ et $y$ de $E$, qu'il y a d'applications de l'ensemble $\{1, 2\}$ dans l'ensemble E, soit $m^2$.

Nombre de n-uples :

Un n-uple n'est finalement qu'une application de l'ensemble $\{1, \ldots, n\}$ dans l'ensemble $E$. A l'entier k, $1 \leq k \leq n$, une telle application fait correspondre la k-ième composante du n-uple. Il y a donc autant de n-uples $(x_1, \ldots, x_n)$ constitués d'éléments de $E$, qu'il y a d'applications de l'ensemble $\{1, \ldots, n\}$ dans l'ensemble $E$, soit $m^n$.

## 1.6 Un peu de combinatoire

### 1.6.1 Nombre de relations binaires de types particuliers

Soit $X$ un ensemble fini à $n$ éléments, On détermine le nombre de relations binaires sur $X$ qui sont :

Réflexive.

Symétrique.

Réflexive et symétrique.

Symétrique et antisymétrique.

Réflexive et antisymétrique.

#### Nombre de relations réflexives

Les relations binaires liant deux éléments. Une relation binaire est définie par sa valeur de vérité, 0 ou 1, sur les couples $(i, j)$ d'éléments de $X$. Il y a $n^2$ couples. Une relation binaire est donc une application d'un ensemble à $n^2$ éléments dans un ensemble à 2 éléments.

Il existe autant de relations binaires sur $X$ qu'il y a d'applications d'un ensemble à $n^2$ éléments dans un ensemble à 2 éléments, soit $2^{n^2}$. Donc il existe $2^{n^2}$ relations binaires sur $X$. Parmi ces relations binaires, les relations réflexives ont une valeur de vérité égale à 1 pour les couples $(x,x)$, $x \in X$. Pour les $n^2 - n = n(n-1)$ autres couples, la valeur de vérité est libre, 0 ou 1.

Il existe autant de relations binaires réflexives sur $X$ qu'il y a d'applications d'un ensemble à $n(n-1)$ éléments dans un ensemble à 2 éléments, soit$2^{n^2-n}$. Donc il existe $2^{n^2-n} = 2^{n(n-1)}$ relations binaires réflexives sur $X$.

**Nombre de relations symétriques**

Les relations symétriques sont caractérisées par des valeurs de vérité identique pour les couples $(x,y)$ et $(y,x)$ avec $x \neq y$. Il existe $n^2 - n = n(n-1)$ couples $(x,y)$ avec $x \neq y$. Pour la moitié d'entre eux, la valeur de vérité est libre, 0 ou 1, pour l'autre moitié, qui sont les couples symétriques, elle est fixée. Pour les $n$ couples $(x,x)$, la valeur de vérité est libre, 0 ou 1. Au total, nous obtenons $n + \frac{(n(n-1)}{2} = \frac{n(n+1)}{2}$ couples $(x,y)$ pour lesquels la valeur de vérité est libre, 0 ou 1. Remarquons que ce nombre de couples peut aussi être obtenu en soustrayant du nombre total $n^2$ de couples, le nombre $\frac{(n(n-1)}{2}$ de couples pour lesquels la valeur de vérité est fixée par symétrie : $n^2 - \frac{(n(n-1)}{2} = \frac{n(n+1)}{2}$.

Il existe autant de relations binaires symétriques sur $X$ qu'il y a d'applications d'un ensemble à $\frac{n(n+1)}{2}$ éléments dans un ensemble à $\frac{n(n+1)}{2}$ éléments, soit $2^{\frac{n(n+1)}{2}}$. Donc il existe $2^{\frac{n(n+1)}{2}}$ relations binaires symétriques sur $X$.

**Nombre de relations réflexives et symétriques :**

Les relations réflexives et symétriques sont caractérisées par des valeurs de vérité identiques pour les couples $(x,y)$ et $(y,x)$ avec $x \neq y$ et par une valeur de vérité égale à 1 pour les $n$ couples $(x,x), x \in X$. Elle est libre seulement pour $\frac{n(n-1)}{2}$ couples d'éléments de $X$.

Il existe autant de relations binaires réflexives et symétriques sur $X$ qu'il y a d'applications d'un ensemble à $\frac{n(n-1)}{2}$ éléments dans un ensemble à 2 éléments, soit $2^{\frac{n(n-1)}{2}}$. Donc il existe $2^{\frac{n(n-1)}{2}}$ relations binaires réflexives et symétriques sur $X$.

### Nombre de relations symétriques et antisymétriques

Considérons un couple $(x, y)$. Comme la relation est symétrique, on a $x\Re y$ entraine $y\Re x$, et comme la relation est antisymétrique, la relation $x\Re y$ (donc $y\Re x$) ce qui entraîne $(x\Re y) \wedge (y\Re x)$, donc $x = y$. En d'autre terme $\Re(x, y).\Re(y, x) = 0$ chaque fois que $x \neq y$, donc la valeur de vérité de $x\Re y$ ne peut être égale à 1 que si $x = y$. Autrement dit, pour tous les couples d'éléments distincts, la valeur de vérité de $x\Re y$ est 0. La valeur de vérité de $x\Re y$ est libre seulement pour les $n$ couples $(x, x)$.

Il existe autant de relations binaires symétriques et antisymétriques sur X qu'il y a d'applications d'un ensemble à n éléments, dans un ensemble à deux éléments, soit $2^n$. Donc il existe $2^n$ relations binaires symétriques et antisymétriques sur $X$.

### Nombre de relations réflexives et antisymétriques

Pour tout éléments $x$, la valeur de vérité de $x\Re x$ est 1 puisque la relation est réflexive. Considérons un couple $(x, y)$ d'éléments distincts de $X$.

Supposons la valeur de vérité de $x\Re y$ égale à 1. Si la valeur de vérité de $y\Re x$ était égale à 1, on aurait $(x\Re y) \wedge (y\Re x)$, donc $x = y$, par antisymétrie, ce qui serait contradictoire, donc la valeur de vérité de $y\Re x$ est 0. Ainsi, les relations réflexives et antisymétriques sont caractérisées par des valeurs de vérité non toutes deux égales à 1 pour les couples $(x, y)$ et $(y, x)$ avec $x \neq y$ et par une valeur de vérité égale à 1 pour les n couples $(x, x), x \in X$. Pour chaque couple $(x, y)$ d'éléments distincts de $X$, il n'y a donc que trois (3) possibilités des valeurs de vérité : soit les valeurs de vérité de $x\Re y$ et $y\Re x$ sont toutes deux nulles, soit l'une vaut un (1) et l'autre zéro (0). Or il y a $\frac{n(n-1)}{2}$ couples d'éléments distincts de $X$.

Il existe autant de relations binaires réflexives et antisymétriques sur $X$ qu'il y a d'applications d'un ensemble à $\frac{n(n-1)}{2}$ éléments dans un ensemble à trois (3) éléments, soit $3^{\frac{n(n-1)}{2}}$. Donc il existe $3^{\frac{n(n-1)}{2}}$ relations binaires réflexives et antisymétriques sur $X$.

### Nombre d'ordres totaux

Un ordre total est une façon de ranger les éléments de $E$. C'est donc une bijection de $\{1, \ldots, n\}$ sur $E$. il y a donc autant d'ordres totaux que de bijections de $\{1, \ldots, n\}$ sur $E$, soit $n!$. Donc il existe $n!$ ordres totaux sur un ensemble $E$ à $n$ éléments.

Pour le nombre de relations transitives, il n'y a pas actuellement de formule « ferme ».

Le nombre de relations d'équivalence est égal au nombre de partitions d'un ensemble, c'est-à-dire le nombre de Bell.

# Chapter 2

# Relations d'équivalence

## Sommaire



Dans ce chapitre, nous reconnaissons sur le premier type de relations binaires, et est la relation d'équivalence, et nous allons examiner quelques propriétés des caractéristiques qui la distinguent. A la fin de ce chapitre pour apprendre davantage sur le groupe quotient.

## 2.1 Relations d'équivalence

Les notions utilisées dans cette section peuvent être rencontrées dans [7, 16, 13, 17]

### 2.1.1 Relation d'équivalence

**Définition 39** *Soit $E$ un ensemble non vide, on appelle relation d'équivalence sur $E$, toute relation binaire $\Re$ à la fois réflexive, symétrique et transitive, c'est-à-dire telle que :*

Pour tout $x \in E$, $x\Re x$ (réflexivité),

Pour tout $x, y \in E$, $x\Re y$, alors $y\Re x$ (symétrie),

Pour tout $x, y, z \in E$, ($x\Re y$ et $y\Re z$), alors $x\Re z$ (transitivité).

**Exemple 40 (Exemples)**

1. L'égalité est une relation d'équivalence.

2. La relation " $\subset$ " n'est pas une relation d'équivalence.

3. La relation de congruence modulo $n$ dans $\mathbb{Z}$ est par définition : $x \equiv y[n]$ (lire : « $x$ est congru à $y$ modulo $n$ ») , $\exists\ k \in \mathbb{Z},\ x - y = k \bullet n$

Réflexivité : $x \equiv x[n]$ : en effet, $x - x = 0 \bullet n$, et $0 \in \mathbb{Z}$.

Symétrie : si $x \equiv y[n]$, $\exists k \in \mathbb{Z}, x - y = k \bullet n$, alors $y - x = (-k) \bullet n$, or, si $k \in \mathbb{Z}, (-k) \in \mathbb{Z}$, donc $y \equiv x[n]$.

Transitivité : si $x \equiv y[n]$ et $y \equiv z[n]$, $\exists k \in \mathbb{Z}, x - y = k \bullet n$, et $\exists l \in \mathbb{Z},\ y - z = l \bullet n$. En additionnant membre à membre ces deux égalités, on obtient $x - z = (k + l) \bullet n$, or $(k, l) \in \mathbb{Z}^2$, donc $k + l \in \mathbb{Z}$, donc $x \equiv z[n]$.

C'est bien une relation d'équivalence.

**Remarque 41** *En fait, une congruence sur $\mathbb{Z}$ est une relation d'équivalence sur $\mathbb{Z}$ qui soit compatible avec les lois de $\mathbb{Z}$.*

### Classes d'équivalence

**Définition 42** *Soit $\Re$ une relation d'équivalence sur un ensemble non vide $E$ et $x$ d'élément de $E$. On appelle classe d'équivalence modulo la relation $\Re$ l'ensemble des éléments de $E$ qui sont en relation avec $x$ (on dit encore : «qui sont équivalents à $x$»).*

Notation : On note $C\Re$ (x) ou $C(x)$, la classe d'équivalence de x modulo $\Re$ :

$C(x) = \{y \in E / y\Re x\}$ est notée aussi $\bar{x}$, ou $\dot{x}$.

**Propriété** L'intersection de deux classes d'équivalence distinctes est vide.

**Proof.** Soit $E$ un ensemble non vide, et $\Re$ une relation d'équivalence sur $E$. On montre que l'intersection de deux classes d'équivalence distinctes est vide. C'est-à-dire si, ■

$\bar{x} \neq \bar{y}$, alors $\bar{x} \cap \bar{y} = \emptyset$.

Supposons que $\bar{x} \cap \bar{y} \neq \emptyset$, alors il existe $a \in E$ tel que $a \in \bar{x} \cap \bar{y}$, ou encore $a \in \bar{x}$ et $a \in \bar{y}$ et on a encore $x\Re a$ et $y\Re a$ soit $x\Re a$ et $a\Re y$ ($\Re$ car est symétrique), c'est-à-dire $x\Re y$ (car $\Re$ est transitive) donc $\bar{x} = \bar{y}$ contradiction, car $\bar{x} \neq \bar{y}$. Donc $\bar{x} \cap \bar{y} = \emptyset$.

**Remarque 43** *On dit aussi que les classes sont deux à deux disjointes.*

**Partition**

**Définition 44** *Soit $E$ un ensemble non vide. On appelle partition de $E$ toute famille $\{E_i\}_{i\in I}$ de parties de $E$ telle que :*

pour tout $i \in I$, $Ei \neq \emptyset$,

pour tout $i, j \in I$ et $i \neq j$, $E_i \cap E_j = \emptyset$ ,

$E$ est la réunion des $E_i$ pour $i \in I$.

**Proposition 45** *Les classes d'équivalence réalisent de $E$.*

**Proof.** Comme les classes sont des parties de $E$, leur réunion est une partie de $E$, réciproquement, tout élément de $E$ appartient à une classe $x$ (« tout élément est classé »). Donc $E$ est une partie de la réunion des classes, et $E$ est égale à la réunion des classes. ■

**Exemple 46** *On reprend la congruence modulo $n$, par exemple pour $n = 4$, on a :*

$\bar{0} = \{\ldots, -12, -8, -4, 0, 4, 8, 12, \ldots\}$,
$\bar{1} = \{\ldots, -11, -7, -3, 1, 5, 9, 13, \ldots\}$,
$\bar{2} = \{\ldots, -10, -6, -2, 2, 6, 10, 14, \ldots\}$,
$\bar{3} = \{\ldots, -9, -5, -1, 3, 7, 11, 15, \ldots\}$.

**Ensemble quotient**

Soit $E$ un ensemble non vide, l'ensemble quotient de $E$ par la relation d'équivalence $\Re$, noté $E/\Re$ est l'ensemble des classes d'équivalences de $E$ suivant $\Re$ :

$E/\Re = \{C(x) \diagup x \in E\}$ possède les propriétés suivantes :

Pour tout $X$, $X \in E/\Re$, alors $X \neq \emptyset$,

pour tout $X, Y \in E/\Re$ et $X \neq Y$, alors $X \cap Y = \emptyset$,

$\cup_{X\in E/\Re} X = E$.

L'application $\varphi : E \to E/\Re$, $x \to C(x)$ est la surjection canonique de $E$ sur $E/\Re$. Si $X \in E/\Re$, tout éléments de $\varphi^{-1}(X)$ est appelé une représentation de $X$ dans $E$.

**Proposition 47**

**(i)** *Soit $E$ un ensemble non vide. Si $\Re$ est une relation d'équivalence sur $E$, alors $E/\Re$ est une partition de $E$.*

**(ii)** *Soit $A = (A_i)_{i \in I}$ une partition de E. Il existe une et une seule relation d'équivalence $\Re$ sur $E$ tel que $A = E/\Re$.*

**Proof.** (i) Si $x \in E$, on a $x \in C(x)$ (réflexivité), Il en résulte que les classes modulo $\Re$ sont non vide, et que $E$ est la réunion de ces classes. Soient $x, y, z \in E$ tels que $x\Re y$ et $x\Re z$. La symétrie de $\Re$ montre que $y\Re x$ et $x\Re z$, d'où $y\Re z$ (transitivité). On en déduit que $C(x) \subseteq C(y)$, puis $C(x) = C(y)$ en utilisant à nouveau la symétrie de $\Re$. L'assertion (i) est alors claire. (ii). On définit une relation binaire $\Re$ sur E en convenant que x $\Re$ y si et seulement s'il existe un indice i tel que x, $y \in A_i$. Comme $A$ est une partition de $E$, il est immédiat que $\Re$ est une relation d'équivalence sur $E$. (ii) est alors claire. ∎

**Définition 48** *[23] Soient $E, F$ des ensembles, $f \in \mathcal{F}(E, F)$, et $\Re$, $\mathcal{S}$ des relations d'équivalence sur $E$ et $F$ respectivement. On dit que :*

$f$ est compatible avec $\Re$ si, pour tout $x, y \in E$ tels que $x\Re y$, on a $f(x) = f(y)$.

$f$ est un homomorphisme de $(E, \Re)$ dans $(F, \mathcal{S})$ si, pour tous $x, y \in E$, on a $f(x)\mathcal{S}f(y)$ dès que $x\Re y$.

Soient $E, F$ des ensembles, $\Re$ une relation d'équivalence sur $E$, $\varphi$ la surjection canonique associée à $\Re$, et $f \in \mathcal{F}(E, F)$. Les conditions suivantes sont équivalentes :

L'application $f$ est compatible avec $\Re$,

Il existe $g \in \mathcal{F}(E/\Re, F)$ telle que $f = g \circ \varphi$.

Si ces conditions sont vérifiées, $g$ est déterminé d'une manière unique. On dit que $g$ est déduite de $f$ par passage au quotient.

**Proof.** (i) implique (ii). Supposons (i) vérifiée, Soient $Z \in E/\Re$ et $x, y \in Z$. on a $f(x) = f(y)$. On définit donc $g \in F(E/\Re, F)$ en posant, si $X \in E/\Re$, $g(X) = f(x)$, où $x$ est un élément quelconque de $X$. Alors $f = g \circ \varphi$. (ii) implique (i). Si (ii) est vraie, et si $x, y \in E$ vérifient $x\Re y$, on obtient : $f(x) = g \circ \varphi(x) = g \circ \varphi(y) = f(y)$. Quant à l'unicité de $g$ est évidente. ∎

Soient $E, F$ des ensembles, et $f \in \mathcal{F}(E, F)$. On définit une relation d'équivalence $\Re$ sur $E$, dite associée à $f$, en convenant que $x\Re y$ si et seulement si l'on a $f(x) = f(y)$.

L'application $f$ est compatible avec $\Re$. Soient $\varphi$ la surjection canonique associée à $\Re$ et $g$ l'unique application de $E/\Re$ dans $F$ vérifiant $f = g \circ \varphi$.

Soient $X, Y \in E/\Re$, $x \in X$ et $y \in Y$. Si $g(X) = g(Y)$, alors $f(x) = f(y)$, donc $x \Re y$, puis $X = Y$. L'application $g$ est donc injective.

Notons $j : f(E) \to F$ l'injection canonique et $f : E/\Re \to f(E)$ la bijection coïncidant avec $g$ sur $E/\Re$. Il vient :

$f = j \circ \bar{f} \circ \varphi$.

On dit que cette écriture est la décomposition canonique de l'application $f$.

# Chapter 3

# Relations d'ordre

Sommaire

Dans ce chapitre, nous apprenons sur le deuxième type de relations binaires, et est la relation d'ordre, et nous allons examiner quelques Propriétés des caractéristiques qui le distinguent. Ainsi que de reconnaître l'ensemble ordonné. A la fin de ce chapitre nous allons prendre quelques exemples d'usages.

Les notions utilisées dans ce chapitre peuvent être rencontrées dans [5, 7, 8, 12, 13, 14].

Relation d'ordre :

**Définition 49** *Soit $E$ un ensemble non vide, une relation binaire $\Re$ sur $E$ est appelée relation d'ordre si, et seulement si, elle vérifie les trois propriétés*

suivantes :

· Rêflexivité : pour tout $x \in E$, $x\Re x$ .

· Transitivité : si pour tous $x, y, z \in E$, $(x\Re y$ et $y\Re z)$, alors $x\Re z$.

· Antisymétrie : si pour tous $x, y \in E$, $(x\Re y$ et $y\Re x)$, alors $x = y$ .

Dans ce cas $(E, \Re)$ est dit ensemble partiellement ordonné (poset, en abrégé).

La plupart des relations d'ordre sont notées $\leq$ ou $\preceq$ (à l'exception notable de l'inclusion et de la divisibilité).

**Exemple 50** *On considère l'ensemble* $E = \{2, 3, 5, 7\}$. *L'ensemble des couples* $\{(2,2), (2,3), (2,5), (2,7),$

est une relation d'ordre sur l'ensemble $E$. C'est en fait la relation induite sur $E$ par la relation d'ordre habituelle $\leq$ sur les entiers.

**Définition 51** *(Comparabilité). Deux éléments $x$ et $y$ d'un ensemble $E$ muni d'une relation d'ordre $\preceq$ sont dits comparables si $x \preceq y$ ou $y \preceq x$.*

**Définition 52** *(Ordre total). L'ordre $\preceq$ est dite total si tous les éléments de $E$ sont deux à deux comparables, c'est-à-dire ( pour tout $(x, y) \in E^2$ $x \preceq y$ ou $y \preceq x$).*

**Exemple 53 (Exemples)**

1. L'ordre naturel $\leq$ sur l'ensemble des nombres réels est une relation d'ordre total.

2. La relation d'inclusion $\subseteq$ sur $\mathcal{P}(E)$ est une relation d'ordre, Elle n'est pas totale.

### 3.0.2 Ensemble ordonné

**Définition 54** *Un ensemble ordonné est un couple $P = (E, \preccurlyeq)$ où $E$ est un ensemble et $\preccurlyeq$ un ordre sur E, dans certains cas et pour éviter toute ambiguïté, il pourra être utile de noter $\preccurlyeq_P$ l'ordre de l'ensemble ordonné P). Si $\preccurlyeq$ est un ordre total, $P = (E, \preccurlyeq)$ est alors appelé un ensemble totalement ordonné (ou ensemble linéairement ordonné ou chaîne).*

### 3.0.3 Bornes et éléments extrémaux

**Minimum et maximum** : Soit $E$ un ensemble ordonné et $a \in E$.

On dit que $a$ est un minimum de $E$ (ou plus petit élément de $E$) lors que, pour tout $x \in E$, on a $a \leq x$.

On dit que $a$ est un maximum de $E$ (ou plus grand élément de $E$) lors que, pour tout $x \in E$, on a $x \leq a$.

**Remarque 55** *Si $E$ admet un minimum, alors il n'en admet qu'un seul. Il en est de même pour un maximum.*

**Elément minimal et élément maximal** : Soient $E$ un ensemble ordonné et $a \in E$.

On dit que $a$ est un élément minimal de $E$ si le seul élément $x$ de $E$ vérifiant $x \leq a$ est $x = a$ lui-même.

On dit que $a$ est un élément maximal de $E$ si le seul élément $x$ de $E$ vérifiant $b \leq x$ est $x = a$ lui-même.

**Remarque 56** *Un ensemble ordonné $E$ peut posséder plusieurs éléments minimaux (respectivement : éléments maximaux). Cependant, si $E$ admet un minimum (respectivement : maximum) $a$, alors $a$ est l'unique élément minimal (respectivement : élément maximal) de $E$.*

**Minorant et majorant** : Soient $E$ un ensemble ordonné et $A$ une partie non vide de $E$.

On dit que $m \in E$ est un minorant de $A$ dans $E$ si $m \leq x$ pour tout $x \in A$. La partie A est dite minorée si et seulement si elle admet au moins un minorant.

On dit que $M \in E$ est un majorant de $A$ dans E si $x \leq M$ pour tout $x \in A$. La partie $A$ est dite majorée si et seulement si elle admet au moins un majorant.

**Borne inférieure et borne supérieure** : Soient $E$ un ensemble ordonné et $A$ une partie non vide de $E$.

On dit que $a \in E$ est une borne inférieure de $A$ dans $E$ si a est le plus grand minorant de $A$ dans $E$. Si elle existe, cette borne inférieure est unique. On la note $\inf_E(A)$ ou $\inf(A)$.

On dit que $a \in E$ est une borne supérieure de $A$ dans $E$ si $a$ est le plus petit majorant de $A$ dans $E$. Si elle existe, cette borne supérieure est unique. On la note $\sup_E(A)$ ou $\sup(A)$.

## 3.1 Décomposition en antichaînes et chaînes

### 3.1.1 Décomposition en niveaux d'un ensemble ordonné [10]

Etant donné un ensemble ordonné $E$, posons $Min(E) = \{a \in E \mid a \text{ minimal dans } E\}$.

Définissons également $E_0 = Min(E)$, $E_1 = Min(E \setminus E_0)$, $E_n = Min(E \setminus \cup_{m<n} E_m)$. Ces ensembles sont des antichaînes et sont deux à deux disjoints.

Si $E$ est fini alors $E_K = \emptyset$ pour au moins un entier $K$. Le plus petit de ces $K$ est la hauteur de $E$, notée $h(E)$.

$E$ étant fini, il est la réunion des $E_0, ..., E_{h(P)-1}$. Ce sont ces sous ensembles, que nous pouvons appeler niveaux.

### 3.1.2 Décomposition en chaînes d'un ensemble ordonné

Soit $E$ un poset. Un ensemble $\{C_1, ..., C_m\}$ de chaînes disjointes de $E$ tel que $E = \cup_{i=1}^{m} C_i$ est appelé une décomposition en chaînes de $E$. Une décomposition minimale en chaîne de $E$ est une décomposition pour laquelle le nombre de chaînes est minimal.

**Exemple 57** *1. Si $E$ est une chaîne à $m$ éléments, chaque niveau est réduit à un élément et la hauteur de $E$ est $m$.*

*2. Les niveaux de l'ensemble $E = D(30) = \{1, 2, 3, 5, 6, 10, 15, 30\}$ avec la divisibilité est $E_0 = \{1\}, E_1 = \{2, 3, 5\}, E_2 = \{6, 10, 15\}, E_3 = \{30\}, E_4 = \emptyset$, on a $E_4 = \emptyset$ donc $h(E) = 4$.*

**Définition 58** *Soit $(E, \leq)$un ensemble ordonné fini. On appelle*

▶ *Largeur de $E$, le cardinal maximal des antichaines de $E$, noté $W(E)$.*

▶ *Hauteur de $E$, le cardinal maximal des chaines de $E$.noté $h(E)$.*

Soit $(E, \leq)$un ensemble ordonné fini, alors $|E| \leq W(E) \times h(E)$

**Exemple 59** *Soit l'ensemble $E = D(30) = \{1, 2, 3, 5, 6, 10, 15, 30\}$ avec la divisibilité, on a $|E| = 8 \leq W(E) \times\ h(E) = 3 \times 4 = 12$.*

**Théoreme 60** *[?] (Erdos - Szekeres) Tout ensemble ordonné $E$ de taille au moins $pq + 1$ contient soit une chaîne de taille $p + 1$ soit une antichaîne de taille $q + 1$.*

**Proof.** On suppose le contraire

$E$ ne contient aucun chaîne maximal de taille $p + 1$ et ne contient aucun antichaîne maximal de taille $q + 1$.

Alors la taille de la chaîne maximale est $p < p + 1$ et la taille de la antichaîne maximale et $q < q + 1$, donc $|E| \leq p \times q$,et on a par hypothèse $|E| = pq + 1 \leq p \times q$, contradiction. ■

**Lemma 61** *Soit $E$ un poset.*

**(1)** *Alors le cardinal de la décomposition minimale en chaînes de $E$ est au moins égal à la largeur de $E$.*

**(2)** *Si $w$ est la Largeur de $E$ et $C_1, ..., C_w$ est une décomposition en chaînes de $E$, et $A$ est une antichaîne qui comporte $w$ éléments, alors $|A \cap C_i| = 1$ pour tout $i = 1, ..., w$.*

**Proof.**

**(1)** Soit $A$ une antichaîne de $E$, et $C_1, ..., C_t$ des chaînes disjointes couvrant $E$. Alors pour tout $i$ on a $|A \cap C_i| \leq 1$. Sinon, s'il existe $x, y \in A \cap C_i$ avec $x \neq y$, $x$ et $y$ sont comparables, et donc ne peuvent appartenir tous deux à $A$, une contradiction. Comme les $C_i$ sont disjoints, on a $|A| = \sum_{i=1}^{t} |A \cap C_i|$ et ce dernier nombre est au plus $t$.

**(2)** Si $t = w$, alors $|A| = \sum_{i=1}^{w} |A \cap C_i| \leq w$, et nous avons un égalité des deux côtés. De plus, $|A \cap C_i| = 1$ pour tout $i$.

■

Dilworth a commencé la théorie du treillis dans les années 1930 en lisant les articles de Dedekind [1, 2], dans les œuvres rassemblées de Dedekind. Il a encouragé ses élèves à les lire également, améliorant leur allemand tout en améliorant leur compréhension des origines de la théorie des treillis. Il a fait remarquer que si les articles de Dedekind étaient d'excellentes introductions, la motivation derrière eux n'était pas claire.

**Théoreme 62** *(Théorème de Dilworth)[10]*

*Soit $E$ un poset fini. La largeur de $E$ est égale au cardinal d'une décomposition minimale en chaînes de $E$.*

**Proof.** La preuve utilise un raisonnement par récurrence sur les éléments du poset $E$. Si le nombre d'éléments est 1, l'assertion est triviale.

Supposons maintenant que l'assertion est vraie pour tout poset de $n$ éléments. On aimerait montrer qu'elle est également satisfaite par un poset à $n+1$ éléments. Pour cela, soit $E$ un poset à $n+1$ éléments. Soit $y$ un élément maximal de $E$, et considérons le poset $E\prime = E - \{y\}$ avec $n$ éléments. Par hypothèse de récurrence, le cardinal d'une décomposition minimale en chaînes et la largeur de $E\prime$ sont les mêmes, disons $w$.

Soit $C_1, ..., C_w$ des chaînes disjointes couvrant $E\prime$. On va construire une antichaîne $A$ de $E\prime$ avec $w$ éléments de la manière suivante : pour tout $i$, on choisit dans $C_i$ un élément maximal $x_i$ qui appartient à une antichaîne de longueur $w$.

Commençons par nous convaincre que les $x_i$ sont deux à deux incomparables. Supposons que $i$ et $j$ soient deux à deux différents, et que $x_i \geq x_j$ . Soit $B$ une antichaîne de longueur $w$ qui contient $x_i$. D'après le lemme précédent (2) on a $B \cap C_j = \{y_j\}$ pour un certain $y_j$ . On a $y_j \leq x_j$, car $y_j$ appartient à une antichaîne de longueur $w$, et que $x_j$ est un élément maximal par rapport à cette condition. Comme $y_j$ est dans l'antichaîne $B$, $x_j$ et $y_j$ ne sont pas comparable, on ne peut donc avoir $x_i \geq x_j$. Comme $i$ et $j$ ont été choisis arbitrairement, on vient de montrer que pour tout $i$ et $j$ les éléments $x_i$ et $x_j$ ne sont pas comparables, et donc que $A$ est une antichaîne.

On va maintenant utiliser $A$ pour construire une antichaîne et une décomposition en chaînes de $E$ de la même taille, ce qui terminera le raisonnement par récurrence. On va distinguer 2 cas.

**(1)** Supposons d'abord que $y \geq x_i$ pour un certain $i$. Dans ce cas, on va trouver une décomposition en chaînes de $E$ avec $w$ éléments et une antichaîne de $E$ avec $w$ éléments. Le lemme précédent (1) nous montre alors que le cardinal d'une décomposition minimale de $E$ est le même que sa largeur. Soit $C = \{y\} \cup \{z \in C_i \mid z \leq x_i\}$.

$C$ est une chaîne. Considérons le poset $E\prime\prime = E - C$.

On va montrer que $E\prime\prime$ n'a pas d'antichaîne de longueur $w$. Supposons d'abord que $x_i$ est l'élément maximal de $C_i$. Alors, enlever $C$ de $E$ est la même chose qu'enlever $C_i$ de $E\prime$, de telle manière que $E\prime\prime$ admet une décomposition en $w-1$ chaînes, ce qui implique que la largeur de $E\prime\prime$ ne peut dépasser $w-1$. Ensuite, supposons que $x_i$ n'est pas l'élément maximal de $C_i$. Alors, les autres éléments de $C_i$ qui sont plus grand que $x_i$ ne peuvent être dans une antichaîne de longueur $w$ par définition de $x_i$. Il s'ensuit que la largeur de $E\prime\prime$ est d'au plus $w-1$.

On en déduit que $E\prime\prime$ peut être couvert par au plus $w-1$ chaînes disjointes et que donc $E$ peut être couvert par au plus $w$ chaînes disjointes (celles de $E\prime\prime$ et $C$ ), ainsi la largeur de $E$ est d'au plus $w$. Comme $A$ est une antichaîne de $E$ de taille $w$, on vient de montrer qu'il y a une décomposition en chaînes de $E$ de la même taille qu'une antichaîne, ce qui prouve le théorème.

**(2)** Supposons maintenant que $y \ngeq x_i$ pour tout $i$. Comme $y$ est un élément maximal de $E$, $y$ est incomparable avec tous les $x_i$, et donc $A\prime = \{y, x_1, ..., x_w\}$ est une antichaîne. D'un autre côté, $\{y\}, C_1, ..., C_w$ est une décomposition en chaînes de $E$ de taille $w+1 = |A\prime|$, on en déduit donc que dans ce cas également le cardinal d'une décomposition minimale en chaînes de $E$ est le même que sa largeur.

En regroupant ces deux cas, la preuve est terminée.

■

**Théoreme 63** *(Théorème de Sperner ) Soit $A$ une antichaîne composée de sous-ensembles de $E$, de cardinal $n$. Alors :*

$$|A| \leq \binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor}$$

*[21, 14]*

**Proof.** On note $f(k)$ le nombre de parties ayant $k$ éléments.

Il est clair que $f(k) = \binom{n}{k}$, pour démontrer l'inégalité de Sperner il suffit de montre $Max(f(k)) = \binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor}$.

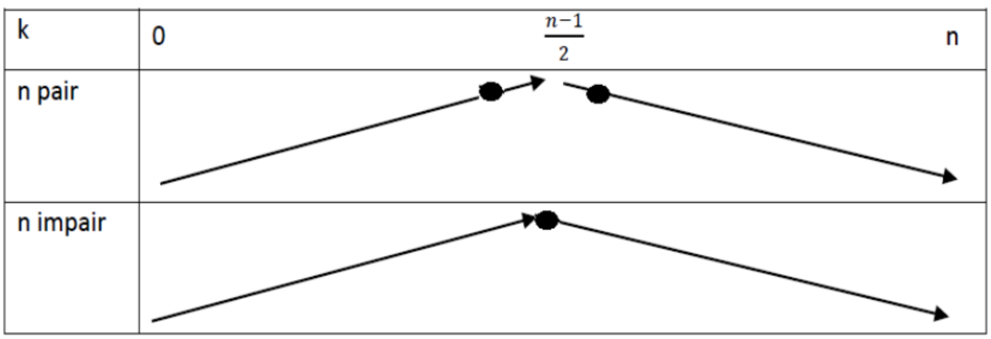
On calculer la différence $f(k+1) - f(k)$

$$\begin{aligned} f(k+1) - f(k) &= \binom{n}{k+1} - \binom{n}{k} \\ &= \frac{n!}{(n-k-1)!\,(k+1)!} - \frac{n!}{(n-k)!k!} \\ &= \frac{n!}{(n-k-1)!k!}\left(\frac{n-2k-1}{(n-k)\,(k+1)}\right). \end{aligned}$$

Pour que $f$ soit croissante if faut que $f(k+1) - f(k) \geq 0$, alors $n - 2k - 1 \geq 0$ donc $k \leq \frac{n-1}{2}$. Alors il positive pour $k \leq \frac{n-1}{2}$ et négative pour $k \geq \frac{n-1}{2}$.

On dresse la table de variation suivant les parités de $n$ :

Essayer d'écrire $E\left(\frac{n-1}{2}\right)$ avant $\frac{n-1}{2}$et $E\left(\frac{n-1}{2}\right) + 1$ après




■

## 3.2 Extension de l'ordre partiel

### 3.2.1 Extensions linéaires : le Théorème de Szpilrajn.

Soit $X$ un ensemble. Etant donnés deux ordres $R$ et $R$' sur $X$, nous pouvons les comparer par inclusion, en effet chacun est un ensemble de couples de $X \times X$. Au lieu de dire que $R$ est inclus dans $R$', on dit plutôt $R$' est une extension de $R$ En termes d'applications croissantes, ceci équivaut au fait que l'application identique de $X$ dans lui même est une application croissante de $R$ dans $R$' alors qu'en termes syntaxiques cela veut dire que : $x \leq y$ dans $R$ implique $x \leq y$ dans $R$'. De fait, l'ensemble de tous les ordres sur X devient un ensemble ordonné. Cet ensemble ordonné a un plus petit élément, l'égalité $\triangle_X$.

Comme l'a observé Szpilrajn (1930) [22], les ordres linéaires sont les éléments maximaux de l'ensemble de tous les ordres sur $X$.

**Définition 64** *Soit $(P, R)$ un ensemble ordonné. Alors $S$ s'appelle une extension inear de $R$ ssi $S$ est un ordre total et contient $R$.*

**Lemma 65** *Un ordre est linéaire si est seulement si il n'a pas d'autre extension que lui même.*

**Proof.** Si un ordre $\rho$ est linéaire, on ne peut lui ajouter aucune comparabilité donc il n'a pas d'extension autre que lui même. La réciproque est conséquence du fait ci-dessous. ■

### 3.2.2 Lemme de Zorn

**Lemma 66** *(Lemme de Zorn) Soit $(E, \leq)$ un ensemble ordonné dans le quel toute $\mathcal{C}$ chaîne $\mathcal{C}$ est inductive (possède un majorant ou un élément maximal), alors $E$ possède un élément maximal*

## 3.3 Théorème de Szpilrajn (Edward Szpilrajn)

Pour démontrer le théorème de Szpilrajn on besoin du lemme suivant

**Lemma 67** *Soit $E$ un ensemble non vide, soit $R$ une relation d'ordre partiel sur $E$ et soient $a, b$ deux éléments distincts de $E$ vérifiant $(a, b) \notin R$ et $(b, a) \notin R$ (a et b ne sont pas comparables). Alors*

1. *il existe une relation d'ordre partiel $R'$ sur $E$;*
2. *$R'$contenant $R$;*
3. *telle que $(a, b) \in R'$.*

**Proof.** Définissons relation cherchée $R'$ comme suit :

$$xR'y \Leftrightarrow \begin{cases} xRy \\ \text{ou bien} \\ xRa \text{ et } bRy \end{cases}$$

Il est clair que $R\prime$ vérifie les conditions 2. et 3. c'est à dire $R'$contenant $R$ et $(a, b) \in R'$. Il reste à montrer qu elle vérifier la condition 1., c'est à dire $R'$ est une relation d'ordre,

$R'$ est réflexive, car $xRx$, pour tout $x \in E$.

$R'$ est antisymétrique, soit $x, y \in E$ avec $xR'y$ et $yR'x$

$$xR'y \Leftrightarrow \begin{cases} xRy & (1), \\ \text{ou bien} & \\ xRa \text{ et } bRy & (2). \end{cases}$$

et

$$yR'x \Leftrightarrow \begin{cases} yRx & (3), \\ \text{ou bien} & \\ yRa \text{ et } bRx & (4). \end{cases}$$

On a quatre cas à discuter,

**Premier cas,** si on a (1) et (3) c'est à dire $xRy$ et $yRx$ on a immédiatement $x = y$, car $R$ est antisymétrique.

**Deuxième cas**, (1) et (4), c'est à dire $xRy$ et $yRa$ et $bRx$. Ce cas est impossible, car sinon on aura $xRy$ et $yRa$ et $bRx$ soit $bRx$ et $xRa$. Donc $bRa$ Contradiction.

**Troisième cas,** (2) et (3), c'est à dire [$xRa$ et $bRy$] et $yRx$ est également impossible, car dans ce cas $bRx$ et $xRa$. Donc $bRa$ Contradiction.

**Quatrième cas**, (2) et (4), c'est à dire [$xRa$ et $bRy$] et [$yRa$ et $bRx$] ce cas est impossible, car sinon on aura $bRy$ et $yRa$ soit $bRa$. Contradiction, $R'$ est donc antisymétrique.

Reste a montrer la transitivité, pour cela soit $x, y, z \in E$ avec $xR'y$ et $yR'z$

$$xR'y \Leftrightarrow \begin{cases} xRy & (1) \\ \text{ou bien} & \\ xRa \text{ et } bRy & (2) \end{cases}$$

$$yR'z \Leftrightarrow \begin{cases} yRz & (3) \\ \text{ou bien} & \\ yRa \text{ et } bRz & (4) \end{cases}$$

On a également quatre cas à discuter.

**Premier cas** (1) et (3), c'est à dire $xRy$ et $yRz$, on a immédiatement, $xRz$ (puisque R est transitive), par conséquent $xR'z$.

**Deuxième cas** (1) et (4), c'est à dire $xRy$ et $[xRa$ et $bRz]$,ce qui donne $xRa$ et $bRz$ soit encore $xR'z$ et $R'$ est donc transitive.

**Troisième cas** (2) et (3), c'est à dire $[xRa$ et $bRy]$ et $yRz$, soit $[xRa$ et $bRz]$, donc $xR'z$ et $R'$ est donc transitive.

**Quatrième cas** (2) et (4), c'est à dire $[xRa$ et $bRy]$ et $[yRa$ et $bRz]$, ce cas est impossible, car sinon on aura $bRy$ et $yRa$ soit $bRa$. Donc $R'$ est encore transitive.

Conclusion on a $R'$ est une relation d'ordre contenant $R$ et dans laquelle $(a, b) \in R'$. ■

## 3.4 Démonstration du théorème d'Edward Szpilrajn

**Théoreme 68** *Tout ordre possède au moins une extension linéaire[22].*

**Proof.** Soit $E$ un ensemble quelconque et $R$ un ordre partiel sur $E$. Soit ensuite $\wp$ l'ensemble de tous les ordres partiels $S$ sur $E$ et qui contiennent $R$. Il est clair que $(\wp, \subseteq)$ est partiellement or donné. Pour appliquer le lemme de Zorn à cette relation, considérons une partie quelconque $\Re$ de $\wp$ linéairement ordonnée par $\subseteq$ (une chaine de $\wp$). Nous voulons montrer qu'il existe un $T \in \Re$ tel que $S \subseteq T$ quel que soit $S \in \Re$. Posons $T = \underset{S\in\Re}{\cup} S$, de sorte que $(x, y) \in T$ si et seulement si $(x, y) \in S$ pour certaine $S \in \Re$. On a par définition même de $T$, $S \subseteq T$ pour tout $S \in \Re$. Il ne reste plus qu'a démontrer que $T \in \wp$, c'est à dire que $T$ est un ordre partiel sur $X$. Comme on a $(x, x) \in S$ pour tout $S \in \Re$, alors $(x, x) \in T$ et donc $T$ es réflexive. Si $(x, y) \in T$ et $(y, x) \in T$, alors il existe $S_1$ et $S_2 \in \Re$ tels que $(x, y) \in S_1$ et $(y, x) \in S_2$. $\Re$ étant une chaine pour $\subseteq$, on a $S_1 \subseteq S_2$ ou $S_1$ $S_2 \subseteq S_1$ cela montre que $(x, y) \in S_1 \cup S_2$ et $(y, x) \in S_1 \cup S_2 \subseteq T$, et donc $x = y$, et $T$ est donc antisymétrique. Si $(x, y) \in T$ et $(y, x) \in T$, alors il existe $S_1$ et $S_2 \in \Re$ tels que $(x, y) \in S_1$ et $(y, z) \in S_2$. $\Re$ etant une chaine pour $\subseteq$ ona $S_1 \subseteq S_2$ ou $S_1$ $S_2 \subseteq S_1$ cela montre que $(x, z) \in S_1 \cup S_2 \subseteq T$, et $T$ est donc transitive. La maximalité de $T$ assure que $T$ est un ordre total que contient $R$, sinon on applique le lemme précédent, ce que contredit la maximalité de T. ■

# Chapter 4

# Bon ordre

**Définition 69** *Un ensemble ordonné $(E, \leq)$ est dit bien ordonné si et seulement si toute partie non vide de $E$ admet un plus petit élément. On dit encore que $\leq$ est un bon ordre sur $E$.*

Un ensemble bien ordonné non vide possède, en particulier, un plus petit élément, appelé son premier élément, Un bon ordre est toujours total.

**Définition 70** *Pour l'ordre usuel, $n\mathbb{Z}$, $n\mathbb{Q}$, $n\mathbb{R}$ ne sont bien ordonnés.*

**Définition 71** *(Segment initial). On dit que $S \subset E$ est un segment initial si pour tous $x, y \in E$ ($y \in S$ et $x \leq y$), alors $x \in S$.*

Si $x_0 \in E$ on notera $S_{x_0}$ le segment initial $\{y \in E \diagup y \leq x_0\}$.

**Proposition 72** *Soit $(E, \leq)$ un ensemble bien ordonné et $f : E \to E$ une application strictement croissante, Alors on a $f(x) \geq x$, pour tout $x \in E$.*

**Proof.** Supposons qu'il existe $x \in E \diagup f(x) < x$ et Soit $x_0$ le plus petit élément de $M = \{x \in E \diagup f(x) < x\}$. Alors pour tout $x \in E$, $x < x_0$ entraine $f(x) \geq x$, d'autre part $f(x_0) < x_0$, donc $f(x_0) \notin M$, alors $f(f(x_0)) \geq f(x_0)$**??** Et puisque $f$ est strictement croissante on a pour tout $x \in E$, $x < x_0$,alors $f(x_0) > x$ mais $f(x_0) < x_0$, implique $f(f(x_0)) < f(x_0)\ldots$**??** . Contradiction, donc $M = \emptyset$. ■

**Proposition 73** *Soient $(E, \Re)$, $(F, \Re')$ deux ensembles bien ordonnés, il existe au plus un isomorphisme de $(E, \Re)$ dans $(F, \Re')$, En particulier l'identité est le seul automorphisme d'un ensemble bien ordonné.*

Preuve : Supposons qu'il existe deux isomorphismes $f$ et $g$ de $(E, \Re)$ sur $(F, \Re')$ alors $g^{-1}$ est strictement croissant donc $(g^{-1} of)(x) \geq_{\Re'} x$ pour tout $x \in E$, et puisque g est croissant alors

$f(x) \geq g(x)$, pour tout $x \in E$...............(1)

un argument symétrique donne

$g(x) \geq f(x)$.......................(2)

de (1) et (2), donnent $g(x) = f(x)$.

**Proposition 74** *Soit $(E, \Re)$ un ensemble bien ordonné et $Y \subset E$un segment initial de $E$, $f : E \to Y$ un isomorphisme, Alors $Y = E$ et $f = I$ (avec $I : E \to E$ est automorphisme).*

**Proof.** Montrons que $E = Y$, pour cela soit $x \in E$, $f(x) \geq x$ on a $f(x) \in Y$, $x \leq f(x)$ entraine $x \in Y$. Donc $E = Y$ et $f = I$. ■

Soient $Y, Z$ deux segment initiaux de $E$ alors $Z \subset Y$ ou $Y \subset Z$. Supposons par exemple $Z \subset Y$, $f : E \to Z$ avec $Z$ segment initial de $Y$ donc $Z = Y$ et $f = I$.

**Notation 75** *Soient $E, F$ deux ensembles bien ordonnés. On note $E \leq F$ si, $E$ isomorphe à un segment initial de $F$, $E \backsim F$ si $E$ et $F$ sont isomorphes, $E < F$ si $E \leq F$ et $E \nsim F$ c'est-à-dire $E$ isomorphe à un segment initial strict de $E$.*

**Théoreme 76** *Soient $E, F$ deux ensembles bien ordonnée, Alors une et une seul des assertions suivantes est vraie.*

**(1)-** $E < F$,

**(2)-** $F < E$,

**(3)-** $E \backsim F$.

### 4.0.1 Ordre strict

**Définition 77** *Soit $\Re$ une relation sur un ensemble non vide $E$. $\Re$ est un ordre strict si elle est irréflexive (pour tout $x \in E$, $(x, x) \in R$) et transitive. Un ensemble strictement ordonné est un couple $P = (E, \Re)$ où $E$ est un ensemble non vide et $\Re$ est un ordre strict.*

L'ordre strict $\Re$ est dit strictement total s'il est tel que $x \neq y$ et $(x, y) \in R$ impliquent $(y, x) \in \Re$. On dit alors que $P$ est un ensemble strictement totalement ordonné.

**Définition 78** *(Chaîne). Une chaîne est un ensemble totalement ordonné, les symboles $\mathcal{C}_n$ et $\underline{n}$ désigneront une chaîne à $n$ éléments.*

**Exemple 79** $(\mathbb{N}, \leq)$ *est une chaîne.*

**Définition 80** *(Antichaîne). On appelle antichaîne tous ensemble ordonné dans lequel deux éléments (distincts) sont toujours incomparables. Le symbole $A_n$ désignera une antichaîne à $n$ éléments.*

### 4.0.2 Décomposition en chaînes et antichaînes d'un ensemble ordonné

Soit $P = (E, \leq)$, un élément $a \in P$ est dit minimal s'il n'existe pas de $b \in P$ avec $b \neq a$ et $b < a$. Un élément maximal se défini dualement.

**Exemple 81** *Soient $E = \{a, b, c\}$ et $\Re$ une relation d'ordre.*

| $\Re$ | $a$ | $b$ | $c$ |
|---|---|---|---|
| $a$ | 1 | 0 | 1 |
| $b$ | 0 | 1 | 1 |
| $c$ | 0 | 0 | 1 |

$c$ est un élément maximale.

$a$ et $b$ deux éléments minimaux.

### 4.0.3 Ordre produit

Soit $(E_i, \leq)_{i \in I}$ une famille d'ensembles ordonnés non vides avec $I$ non vide, sur l'ensemble produit $E = \underset{i \in I}{\sqcap} E_i$, on définit une relation d'ordre en convenant, si $x \in E$ et $y \in E$, $x = (x_i)_{i \in I}$, $y = (y_i)_{i \in I}$, que $x \preceq y$ si et seulement si pour tout $i \in I$, $xi \leq yi$.

La relation d'ordre ainsi obtenue s'appelle ordre produit des ordres des $E_i$, et $(E, \preccurlyeq)$ est appelé l'ensemble ordonné produit des $(E_i, \leq)$. Même si les $(E_i, \leq)$ sont totalement ordonnés, l'ordre $\preccurlyeq$ n'est en générale que partiel. L'ordre défini dans l'exemple suivant est le cas particulier où tous les $E_i$ sont égaux.

**Exemple 82** *Soit $A$ un ensemble non vide, $(B, \leq)$ un ensemble non vide ordonné, et $E = F(A, B)$. si $f \in E$ et $g \in E$, convenons que : $f \preccurlyeq g$ si et seulement si pour tout $x$, $(x \in A)$ alors $f(x) \leq g(x)$.*

Alors " $\preccurlyeq$ " est une relation d'ordre sur $E$, mais même si l'ordre $\leq$ est total, en général l'ordre $\preccurlyeq$ n'est que partiel.

### 4.0.4 Ordre lexicographique

Soit $(E_i, \leq)_{i \in I}$ une famille d'ensembles totalement ordonnés non vides, et supposons l'ensemble I bien ordonné par une relation d'ordre $\Re$, considèrent, sur l'ensemble produit $E = \prod_{i \in I} E_i$, la relation $\preccurlyeq$ ainsi définie : pour $x \in E$, $y \in E$, $x = (x_i)_{i \in I}$, $y = (y_i)_{i \in I}$, si $x = y$ alors $x \preccurlyeq y$, si $x \neq y$, soit $i_0$ le plus petit des $i \in I$ tels que $x_i \neq y_i$ pour l'ordre $\Re$ (qui existe, puisque $\Re$ est un bon ordre et que l'ensemble $\{i \in I / x_i \neq y_i\}$ est non vide, alors $x \preccurlyeq y$ si et seulement si $x_{i_0} \leq y\_i_0$.

On constate immédiatement que la relation $x \preccurlyeq y$ sur $E$ est une relation d'ordre total : par définition, cet ordre est le produit lexicographique (des ordres des $E_i$ relatifs à l'ordre $\Re$ de $I$), et l'ensemble ordonné $(E, \preccurlyeq)$ est le produit lexicographique des ensembles ordonnés $(Ei, \leq)$ selon l'ordre$\Re$ de $I$.

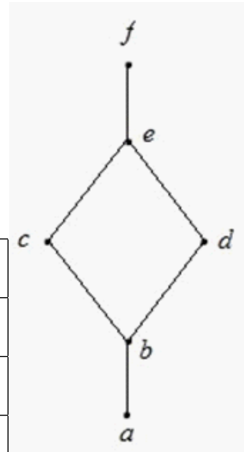
### 4.0.5 Relation de couverture

**Définition 83** *Une relation de couverture d'un ensemble ordonné $P = (E, \leq)$ notée $<_p$ ou simplement $\prec$, est définie par $x \prec y$ si ($x \leq y$ et $x \leq z \leq y$, alors $x = z$). On dit alors que $x$ est couvert par $y$, ou que $y$ couvre $x$. On pose $xP^{+} = \{t \in P / x < t\}$ et $xP^{-1} = \{t \in P / t < x\}$.*

$LegrapheCouv(P) = (E, \prec)$ associé à la relation de couverture s'appelle le graphe de couverture de P.

**Exemple 84** *Soient $E = \{a, b, c, d, e, f\}$ et $\Re$ une relation d'ordre sur $E$.*

| $\Re$ | $a$ | $b$ | $c$ | $d$ | $e$ | $f$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $a$ | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| $b$ | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| $c$ | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 |
| $d$ | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 |
| $e$ | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 |
| $f$ | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 |




La relation de couverture associée à $\Re$ est :

$\prec_{\Re} = \{(a,b),(b,c),(b,d),(c,e),(d,e),(e,f)\}$

| $\prec_{\Re}$ | $a$ | $b$ | $c$ | $d$ | $e$ | $f$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $a$ | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| $b$ | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 |
| $c$ | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 |
| $d$ | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 |
| $e$ | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 |
| $f$ | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |

# Bibliography


[1] B. Banaschewski, Projective covers in categories of topological spaces and topological algebras, in "Proceedings ofthe Kanpur Topology Conference, 1968," Academic Press, New York, 1971, pp.63-91.

[2] Injectivity and essential extensions in equational classes of algebras, in "Proceedings of the Conference on Universal Algebras, Queen's University, Kingston, Ontario, 1970," pp. 131-147.

[3] K. Bernard, R. C. Busby, S. Ross, Discrete Mathematical Structures (4th Edition), Pearson Education North ASIA LIMIED and Higher Education Press, 2001.

[4] T. S. Blyth, Lattices and Ordered Algebraic Structures, Springer-Verlarg London Limited 2005.

[5] D. Bouyssou, P. Vincke. Relations binaires et modélisation des préférences, (2003), 6-7.

[6] S. Burris et H.P.Sankappanavar, A course in universal Algebra, The Millennium Edition, 2012.

[7] N. Caspard, B. Leclerc, B. Monjardet -, Ensembles ordonnés finis : concepts, résultats et usages, Berlin : Springer, 2007.

[8] H. Catherine Yan, Commuting Quasi-order relations, Discrete Mathematics 183 (1998) 285-292

[9] B. Davey, H. Priestley, Introduction to lattice and order, Cambridge University Press, 1990

[10] R.P. DILWORTH, A decomposition theorem for partially ordered sets, Annals of Math., 51 (1950), 161-165

[11] J. R. Durbin, Modern Algebra : An Introduction (6thEdition), John Wiley & Sons, Inc, 2009.

[12] P. ERDÖS, G. SZEKERES, A combinatorial problem in geometry, Compos. Math., 2 (1935), 463-470 $*************$

[13] R. Fraissé, Theory of Relations, Elsevier Science Ltd, 1986

[14] I. Guillaume, Rapport de Graphe Avancée Hypergraphes : théorie de Sperner." perso.ens-lyon.fr/eric.thierry/Graphes2010/guillaume-iooss.pdf" 19 novembre 2010.

[15] J. Heitzig, J.Reinhold, The number of unlabelled orders on fourteen elements, Order 17 (2000), no. 4, 333-341.

[16] M. Pauzet, Théorie de l'ordre : une introduction en cours de parution.

[17] D. Ponasse, J. C. Carregan, Algèbre et Topologie Booléennes, MASSON 1979.

[18] I. Rival, Ordered Sets, Proceedings of the NATO Advanced Study Institute held at Banff, Canada, August 28 to September 12, 1981.

[19] J. RIGUET, Relations binaires, fermetures, correspondances de Galois, Bulletin de la S. M. F., tome 76 (1948), p.114-155.

[20] S. Roman. Lattices and Ordered Sets, Springer, USA, 2008.

[21] E. SPERNER, Ein Satz uber Untermengen einer endlichen Menge, Math Z., 27 (1928), 544-548.

[22] E. SZPILRAJN, Sur l'extension de l'ordre partiel, Fund. Math., 16 (1930), 386-389.

[23] P. Tauvel. Algèbre, Dunod, Paris, 2005