

## TD 2\_ Théorie des relations

Année Universitaire 2021-2022

### Exercice 1

L'ensemble de tous les sous-groupes de tout groupe est un ensemble partiellement ordonné par rapport à  $\subseteq$ .

### Exercice 2

Montrer que l'ensemble  $\mathbb{N}^*$  de tous les nombres naturels (entiers positifs) est un ensemble partiellement ordonné avec  $a\mathcal{R}b$  défini pour signifier  $a \mid b$ . L'ensemble de tous les diviseurs positifs d'un entier positif fixe  $n$  est également un ensemble partiellement ordonné avec cette relation.

### Exercice 3

Considérons l'ensemble partiellement ordonné  $\mathbb{N}^*$  avec  $a\mathcal{R}b$  défini pour signifier  $a \mid b$

- (a) Quels entiers sont couverts par 6 ?
- (b) Quels nombres entiers couvrent 67.
- (c) Pour  $m \in \mathbb{N}$ , quels entiers sont couverts par  $m$  ?
- (d) Pour  $m \in \mathbb{N}$ , quels entiers couvrent  $m$  ?

### Exercice 4

Une application  $f : L_1 \longrightarrow L_2$  d'un ensemble partiellement ordonné sur un autre est appelé une application conservant l'ordre,

si  $a \leq b$  implique  $\theta(a) \leq \theta(b)$  pour tout  $a, b \in L_1$ . Une application inversible  $\theta : L_1 \longrightarrow L_2$  est un isomorphisme si  $\theta$  et  $\theta^{-1}$  sont des application conservant l'ordre. (Les ensembles finis partiellement ordonnés sont isomorphes

ssi leurs schémas sont les mêmes sauf peut-être pour l'étiquetage.)

- (a) Vérifier que l'isomorphisme est une relation d'équivalence pour des ensembles partiellement ordonnés.
- (b) Il existe deux classes d'isomorphisme pour les ensembles partiellement ordonnés à deux éléments. Dessiner un diagramme correspondant à chaque classe. (N'oubliez pas que deux éléments n'ont pas besoin d'être «comparables».)