

COMMANDE DYNAMIQUE

Dr. BOUKHALFA¹

¹FACULTY OF TECHNOLOGY
M'SILA UNIVERSITY



OBJECTIF DE CE COURS

Le but est de présenter les notions et outils fondamentaux nécessaires à l'analyse et à la commande des systèmes. Ce cours est articulé autour des quatre thèmes suivants:

- 1 Systèmes dynamiques;
- 2 Stabilité;
- 3 Robustesse;
- 4 théorie de perturbations.

Le cours part de quelques exemples issus du monde industriel ou académique. Chaque exemple motive et justifie les définitions et résultats abstraits sur lesquels reposent une classe d'algorithmes de contrôle et/ou d'estimation. Dans bien des domaines scientifiques, une théorie a très souvent pour origine une petite collection d'exemples représentatifs bien compris et analysés.



Nous nous intéressons à des systèmes dynamiques représentés par un nombre fini d'équations différentielles du premier ordre couplées entre elles que nous écrivons :

$$\frac{d}{dt}x_1 = v_1(x_1, \dots, x_n, u_1, \dots, u_m, t)$$

$$\frac{d}{dt}x_2 = v_2(x_1, \dots, x_n, u_1, \dots, u_m, t)$$

⋮

$$\frac{d}{dt}x_n = v_n(x_1, \dots, x_n, u_1, \dots, u_m, t)$$



où les grandeurs x_1, \dots, x_n sont appelées états, les grandeurs u_1, \dots, u_m sont les entrées (ou commandes), et n et m sont des entiers. Le temps t est ici considéré de manière générale dans le second membre des équations. Les fonctions $(v_j)_{j=1, \dots, n}$ sont à valeur réelle. En toute généralité, leur régularité peut être très faible, même si, comme on le verra par la suite, de nombreuses propriétés fondamentales proviennent justement de leur régularité.

Il est commode d'écrire le système différentiel précédent sous la forme vectorielle (appelée forme d'état)

$$\frac{d}{dt}x = v(x, u, t) \quad (1)$$

Pour calculer l'évolution future d'un tel système, il faut connaître les grandeurs $t \mapsto u(t)$ ainsi que la condition initiale de l'état. On dit que l'état x du système représente sa mémoire.



Étant donnée l'évolution du système, on s'intéresse souvent à un certain nombre de grandeurs (par exemple car elles ont un intérêt pratique) qu'on nomme sorties ou mesures. Les équations de sorties que nous considérons sont de la forme :

$$y = h(x, u, t) \in \mathbb{R}^q \quad (2)$$

où q est un entier souvent inférieur à n .

Le formalisme (1)(2) que nous venons de présenter est très général.

On trouve un vaste choix d'exemples dans les domaines de la mécanique (les équations d'Euler-Lagrange, exprimant le principe de moindre action sont des équations d'ordre 2 dans les variables de configurations (positions généralisées), l'état est alors constitué des positions généralisées et leur vitesses), les machines électriques, l'aéronautique, la robotique, la chimie, la biochimie, les sciences du vivant.



Ce que nous cherchons à faire dans le domaine de l'Automatique ce n'est pas simplement étudier les propriétés des systèmes d'équations différentielles, mais les contrôler. Dans l'équation (1), on peut agir sur l'état x en choisissant u . L'outil principal de l'Automaticien c'est la rétro-action $u = k(t, x)$ aussi appelée feedback. En spécifiant de la sorte la commande, on change complètement le comportement du système dynamique (1) qui devient :

$$\frac{d}{dt}x = v(x, k(t, x), t)$$

En pratique, on sera souvent limité à l'utilisation de la mesure définie en (2). Dans ce contexte, les rétro-actions envisageables sont de la forme $u = k(t, y)$. On parle alors de retour de sortie. C'est un problème difficile pour lequel nous montrerons, aux chapitres suivants qu'il est en fait utile d'utiliser un système dynamique supplémentaire (on parlera d'observateur) qui permettra de bien plus intéressantes possibilités.

SYSTÈMES DYNAMIQUES NON LINÉAIRES

Que ce soit parce qu'on a choisi une loi de rétroaction particulière ou parce que le système considéré ne possède pas de commande, il est important de comprendre comment étudier les systèmes libres de la forme :

$$\frac{d}{dt}x = v(x, t) \quad (3)$$

On dira qu'un tel système est stationnaire (par opposition au cas (3) instationnaire) lorsque v ne dépend pas explicitement du temps. Dans ce cas l'équation s'écrit :

$$\frac{d}{dt}x = v(x)$$

Un des concepts clés dans l'étude des systèmes dynamiques est la notion de point d'équilibre (appelé également point stationnaire) \bar{x} . On appelle point d'équilibre, un point \bar{x} tel que, si le système différentiel (3) est initialisé en ce point, c.-à-d. $x(0) = \bar{x}$, alors le système reste en \bar{x} pour tous les temps futurs.

Dans le cas d'un système stationnaire, les points d'équilibre sont simplement caractérisés par l'équation $v(\bar{x}) = 0$.



Autour d'un point d'équilibre il est tentant de chercher une expression approchée des équations dynamiques (3) qu'on souhaite étudier. En général, lorsque le système est instationnaire, on obtiendra un système linéaire instationnaire (appelé linéarisé tangent) de la forme :

$$\frac{d}{dt}x = A(t)x + B(t)u \quad (4)$$

$$y = C(t)x + D(t)u \quad (5)$$



Cette approche est intéressante car elle fournit souvent une information locale sur le comportement de (3) autour de \bar{x} . Néanmoins, cette information est parfois insuffisante, surtout lorsqu'on recherche des informations sur le comportement du système loin de l'équilibre. En outre, les systèmes linéaires et les systèmes non linéaires sont en fait très différents par nature. Soumis à une superposition d'excitations (par une somme de termes dans la commande), les systèmes linéaires répondent d'après le principe de superposition : leur sortie est la somme des sorties correspondant à chacun des termes d'excitation. Ce principe, qui ne s'applique pas aux systèmes non linéaires, est à la base de l'analyse de Fourier des signaux. Il existe de nombreux phénomènes qu'on ne constate que chez les systèmes régis par des équations non linéaires.



EXEMPLE 1

(Missile dans le plan). En grande partie à cause des effets aérodynamiques, les équations qui régissent le mouvement d'un missile ou d'une fusée sont non linéaires. Après réduction à un plan, les équations de la dynamique d'un missile s'expriment au moyen de 6 états. Les variables x_m et y_m correspondent aux coordonnées du centre de gravité de l'engin, V_m est sa vitesse, χ_m , α_m et β_m correspondent à des angles, et on utilise deux variables intermédiaires ϕ_A et α_T pour exprimer les seconds membres de la dynamique.



EXEMPLE 1

$$\dot{x}_m = V_m \cos \chi_m$$

$$\dot{y}_m = V_m \sin \chi_m$$

$$\dot{V}_m = \frac{1}{m} \left(T \cos \alpha_T - \frac{1}{2} \rho S V_m^2 C_D(\alpha_T) \right)$$

$$\dot{\chi}_m = \tan \phi_A \frac{g}{V_m}$$

$$\dot{\alpha}_m = 0.3(\alpha_c - \alpha_m)$$

$$\dot{\beta}_m = 0.3(\beta_c - \beta_m)$$



$$\text{où } \sin \alpha_T = \sqrt{1 - \frac{1}{1 + \tan^2 \alpha_m + \tan^2 \beta_m}}, \quad 1 + \tan^2 \phi_A = \frac{\tan^2 \alpha_T}{\tan^2 \alpha_m}$$

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2 \\ -\frac{MgL}{j_1} \sin(x_1) - \frac{k}{j_1}(x_1 - x_3) \\ x_4 \\ \frac{k}{j_2}(x_1 - x_3) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{1}{j_2} \end{bmatrix} \quad (6)$$

Les deux commandes sont α_c, β_c , tandis que $m(t)$ et $T(t)$ sont des fonctions données du temps (variation de la masse et de la poussée), ρ et S sont des constantes et $C_D(\cdot)$ est le coefficient de traînée. Ce modèle prend en compte les effets aérodynamiques dus aux angles d'attaque du corps du missile, la perte de masse au cours du vol (qui est loin d'être négligeable), et les dynamiques des actionneurs (à travers des vérins).



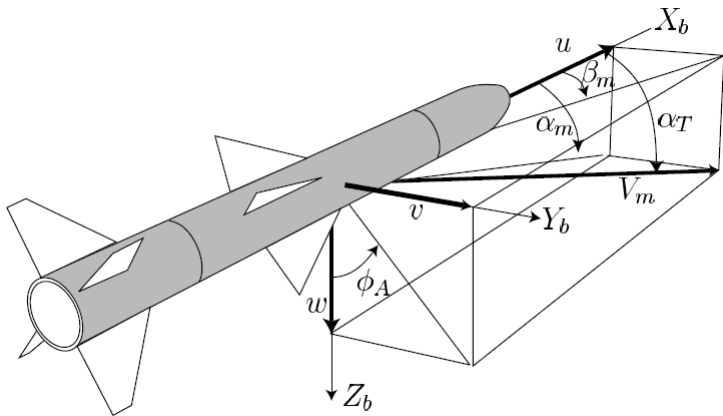


FIGURE 1: Variables décrivant un missile.



L'outil de base de la modélisation mathématique d'un modèle physique est le problème de Cauchy. Il consiste en une condition initiale et une équation différentielle

$$x(0) = x^0, \frac{d}{dt}x(t) = v(x(t), t) \quad (7)$$

Face à ce problème, on est en droit d'espérer que les propriétés suivantes sont satisfaites

- ① qu'une solution avec ces conditions initiales existe
- ② que cette solution soit unique
- ③ que les solutions dépendent continûment des conditions initiales

Ce théorème dont garantie l'existence et l'unicité pour des temps courts. En revanche l'existence pour des temps t arbitrairement grands est nettement plus délicate.



THÉORÈME 1 (CAUCHY-LIPSCHITZ. EXISTENCE ET UNICITÉ).

Soit $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \ni (x, t) \mapsto v(x, t) \in \mathbb{R}^n$ une fonction satisfaisant aux deux propriétés suivantes :

- 1 (localement lipchitzienne par rapport à x) pour tout $(x, t) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$, il existe $\eta_{x,t} > 0$ et $K_{x,t} > 0$, tels que, pour tout $y \in \mathbb{R}^n$ vérifiant $\|x - y\| \leq \eta_{x,t}$ on a $\|v(x, t) - v(y, t)\| \leq K_{x,t}\|x - y\|$
- 2 (localement intégrable par rapport à t) pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, l'application $t \mapsto v(x, t)$ est localement intégrable.



THÉORÈME 2 (DÉPENDANCE EN LA CONDITION INITIALE).

Soit $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \ni (x, t) \mapsto v(x, t) \in \mathbb{R}^n$ une fonction continue à dérivées partielles $\frac{\partial v}{\partial x_i}$ continues par rapport à x . Soit $x^0 \in \mathbb{R}^n$ une condition initiale, il existe une unique solution $t \mapsto x(t)$ telle que $x(0) = x^0$. Cette solution, considérée comme une fonction de la condition initiale x^0 , admet des différentielles partielles $\frac{\partial x_i(x^0, t)}{\partial x_j^0}$ continues par rapport à x^0 et à t .



STABILITÉ LOCALE AUTOUR D'UN ÉQUILIBRE

La notion de stabilité s'attache à formaliser l'intuition suivante : un point d'équilibre sera dit stable si un petit déséquilibre initial n'entraîne que de petits écarts pour tout temps postérieur, en bref de petites causes n'ont que de petites conséquences.

STABILITÉ (AU SENS DE LYAPOUNOV) ET INSTABILITÉ

On reprend les notations et hypothèses du Théorème 1 de Cauchy Lipchitz. On suppose de plus qu'il existe un point d'équilibre $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ caractérisé par $v(\bar{x}, t) = 0$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.

L'équilibre $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ est dit stable (au sens de Lyapounov) si et seulement si pour tout $\epsilon > 0$, il existe $\eta > 0$ tel que pour toute condition initiale x^0 vérifiant $\|x^0 - \bar{x}\| \leq \eta$, la solution de $\frac{d}{dt}x = v(x, t)$ issue de x^0 à $t = 0$, est définie pour tout temps positif et vérifie $\|x(t) - \bar{x}\| \leq \epsilon$ pour tout temps $t \geq 0$.

S'il n'est pas stable, il est dit instable.

DÉFINITION 2 (STABILITÉ ASYMPTOTIQUE).

Avec les notations de la Définition 1, l'équilibre \bar{x} est dit localement asymptotiquement stable si et seulement s'il est stable et si, de plus, il existe $\eta > 0$ tel que toutes les solutions $x(t)$ de $\frac{d}{dt}x = v(x, t)$, partant en $t = 0$ de conditions initiales x^0 telles que $\|x^0 - \bar{x}\| \leq \eta$, convergent vers \bar{x} lorsque t tend vers $+\infty$.



STABILITÉ LOCALE AUTOUR D'UN ÉQUILIBRE

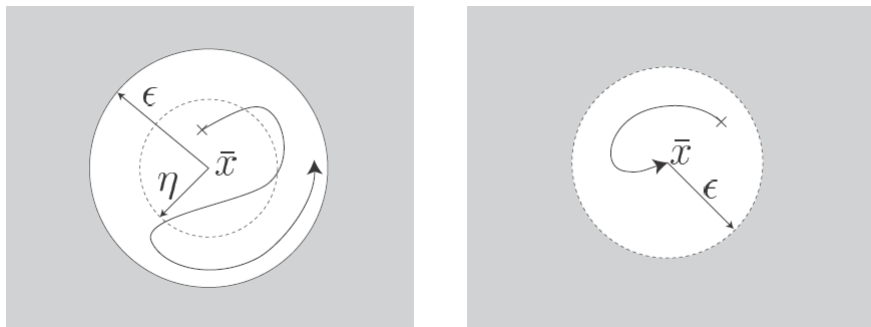


FIGURE 2: Stabilité (gauche) et stabilité asymptotique (droite).

Ces notions de stabilité sont illustrées sur la Figure 2. Lorsque \bar{x} est asymptotiquement stable, on dit souvent que le système oublie sa condition initiale. En effet, localement, quelle que soit la condition initiale, la trajectoire converge vers \bar{x} . Lorsque, dans la Définition 2, la condition initiale peut être librement choisie, on dit que \bar{x} est globalement

EXEMPLE (OSCILLATEUR HARMONIQUE).

Un exemple d'équilibre stable mais non asymptotiquement stable est celui de l'oscillateur harmonique non amorti (le paramètre $\Omega > 0$ est la pulsation)

$$\frac{d}{dt}x_1 = x_2, \quad \frac{d}{dt}x_2 = -\Omega^2 x_1 \quad (8)$$

Le rajout d'un amortissement

$$\frac{d}{dt}x_1 = x_2, \quad \frac{d}{dt}x_2 = -\Omega^2 x_1 - 2\xi\Omega x_2 \quad (9)$$

rend alors l'équilibre $(0, 0)$ asymptotiquement stable. Le paramètre sans dimension $\xi > 0$ est le facteur d'amortissement : pour $\xi \in]0, 1[$ le retour à l'équilibre se fait sous la forme d'oscillations amorties, pour $\xi \geq 1$, le retour à l'équilibre se fait quasiment sans oscillation, i.e., avec un très petit nombre de changements de signe pour x_1 et x_2 .



EXEMPLE (OSCILLATEUR HARMONIQUE).

cela vient du fait bien connu que les racines s du polynôme caractéristique

$$s^2 + 2\xi\Omega s + \Omega^2 = 0 \quad (10)$$

de l'équation du second ordre :

$$\frac{d^2}{dt^2}x_1 + 2\xi\Omega \frac{d}{dt}x_1 + \Omega^2 x_1 = 0 \quad (11)$$

qui correspond au système (11), sont réelles négatives pour $\xi > 1$ et complexes conjuguées avec une partie réelle négative si $0 < \xi < 1$. Noter enfin qu'aucun des équilibres du double intégrateur, (10) avec $\xi = 0$, n'est stable.



MATRICES SYMÉTRIQUES ET ÉQUATION DE LYAPOUNOV

On donne ici deux résultats utiles qui permettent de caractériser les matrices constantes ayant un polynôme caractéristique Hurwitz.

THÉORÈME 1 (SYLVESTER)

Une matrice symétrique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est définie positive si et seulement si tous ses mineurs principaux sont strictement positifs.

Le théorème suivant est souvent utilisé pour construire une fonction de Lyapounov V d'un système linéaire asymptotiquement stable (P sert pour exhiber $V(x) = x^T P x$)

$$A^T P + P A = -Q \quad (12)$$

Réciproquement, s'il existe des matrices symétrique définies positives P et Q telles que (12) est vérifiée, alors A est Hurwitz (stable).



ÉTUDE AU PREMIER ORDRE

Les notions de stabilité sont, dans le cadre non linéaire, locales. Autour d'un point d'équilibre, les équations non linéaires de la dynamique sont proches de leur développement limité. Il est naturel de se demander quelle information peut être déduite d'un tel développement au premier ordre. Un système non linéaire peut avoir plusieurs points d'équilibre isolés. Autour de chacun de ces équilibres, les équations peuvent admettre des systèmes linéarisés tangents très différents et donc localement des propriétés différentes. On pourra se reporter à l'exemple suivant.



EXEMPLE

Le système suivant

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}x_1 &= -a_1x_1 - x_2x_1 + a_2 \\ \frac{d}{dt}x_2 &= -x_2 + x_1^2\end{aligned}\tag{13}$$

possède, suivant les valeurs des paramètres a_1 , a_2 , un portrait de phase très intéressant.

D'après le théorème suivant, il est possible de déduire la stabilité asymptotique locale d'un point d'équilibre hyperbolique d'après son linéarisé tangent.



DÉFINITION (POINT D'ÉQUILIBRE HYPERBOLIQUE).

Un point d'équilibre \bar{x} de l'équation $\frac{d}{dt}x = v(x)$ est dit hyperbolique si les valeurs propres de la matrice Jacobienne

$$\frac{\partial v}{\partial x}(\bar{x}) = \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right)_{1 \leq i, j \leq n}$$

sont toutes à partie réelle non nulle.

THÉORÈME (STABILITÉ ASYMPTOTIQUE LOCALE D'UN POINT D'ÉQUILIBRE HYPERBOLIQUE (PREMIÈRE MÉTHODE DE LYAPOUNOV))

Soit $\mathbb{R}^n \ni x \mapsto v(x) \in \mathbb{R}^n$ continûment dérivable par rapport à x et $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ tel que $v(\bar{x}) = 0$. Le point d'équilibre \bar{x} de

$$\frac{d}{dt}x = v(x)$$

THÉORÈME (STABILITÉ ASYMPTOTIQUE LOCALE D'UN POINT D'ÉQUILIBRE HYPERBOLIQUE (PREMIÈRE MÉTHODE DE LYAPOUNOV))

est localement asymptotiquement stable si les valeurs propres de la matrice Jacobienne

$$\frac{\partial v}{\partial x}(\bar{x}) = \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right)_{1 \leq i, j \leq n}$$

sont toutes à partie réelle strictement négative. Le point d'équilibre \bar{x} est instable au sens de Lyapounov si au moins l'une des valeurs propres de la matrice Jacobienne $\frac{\partial v}{\partial x}(\bar{x})$ est à partie réelle strictement positive.



FONCTIONS DE LYAPOUNOV

À titre d'introduction, reprenons l'exemple de l'oscillateur harmonique amorti et considérons la fonction

$$V(x_1, x_2) = \frac{\Omega^2}{2}(x_1)^2 + \frac{1}{2}x_2^2$$

qui n'est autre que son énergie totale. Un calcul simple montre que pour $t \mapsto (x_1(t), x_2(t))$ solution de (11), on a

$$\frac{d}{dt}V(x_1, x_2) = \frac{\partial V}{\partial x_1} \frac{d}{dt}x_1 + \frac{\partial V}{\partial x_2} \frac{d}{dt}x_2$$

Or $\frac{d}{dt}x_1 = x_2$ et $\frac{d}{dt}x_2 = -2\xi\Omega x_2 - \Omega^2 x_1$. Donc

$$\frac{d}{dt}V = -2\xi\Omega x_2^2 \leq 0$$

Ainsi, $t \mapsto V(x_1(t), x_2(t))$ est une fonction décroissante, comme elle est positive, elle converge vers une valeur positive. Il est intuitif de penser que $\frac{d}{dt} V$ converge vers 0 et donc que x_2 converge vers 0. Mais si x_2 converge vers 0, il est aussi intuitif de penser que sa dérivée converge aussi vers 0. Or, $\frac{d}{dt} x_2 = -2\xi\Omega x_2 - \Omega^2 x_1$ et donc x_1 tend vers 0 aussi. Le raisonnement ci-dessus n'est pas très rigoureux mais il est correct car on a affaire à des fonctions du temps V, x_1, x_2, \dots uniformément continues, c.-à-d. dont le module de continuité en t ne dépend pas de t . Cette continuité uniforme vient du fait que, comme V est décroissante le long des trajectoires et que V est infini quand x_1 ou x_2 tend vers l'infini, les trajectoires sont nécessairement bornées et donc sont des fonctions uniformément continues du temps. En effet, leurs dérivées en temps sont uniformément bornées.



Or, un lemme classique d'analyse (lemme de Barbalat) dit que, si l'intégrale $\int_0^t h(s)ds$ d'une fonction uniformément continue h de $[0; +\infty[$ dans \mathbb{R} est convergente pour t tendant vers l'infini, alors cette fonction h admet 0 comme limite en $t = +\infty$.

Comme $V(t) - V(0) = \int_0^t \frac{d}{dt} V$ on sait que $\frac{d}{dt} V$ converge vers 0 et comme $\frac{d}{dt} V(t) - \frac{d}{dt} V(0) = \int_0^t \frac{d^2}{dt^2} V$, $\frac{d^2}{dt^2} V$ converge aussi vers 0. Ce qui nous donne que x_2 et x_1 convergent vers 0. En fait, nous aurions pu faire le raisonnement à l'identique pour un système général pour peu que nous disposions d'une fonction V , infinie à l'infini (on dira non bornée radialement), bornée inférieurement et décroissante le long de toute trajectoire.

