Corrigé Type " Série n° 02 "

Algèbre I

Exo1 :

1 * $2 \in A$ signifie que 2 est un élément de A. Elle est vraie car les éléments de A sont 1, 2 et 3.

* $3 \subset A$ signifie que 3 est une partie de A. Elle est fausse car 3 est un élément de A et non une partie de A.

* $\phi \in A$ signifie que ϕ est un élément de A. Elle est fausse car les élément de A sont 1, 2 et 3 mais ϕ ne figure pas parmi ces éléments.

* $\{\phi\} \subset A$ signifie que le singleton $\{\phi\}$ est une partie de A. Elle est fausse car $\{\phi\}$ est une partie de $\mathcal{P}(A)$ et non partie de A.

* $A \cup \{\phi\} = \{1, 2, 3, \phi\}$. Elle est fausse car A possède trois éléments.

2 a) $B \cap C = \{1\}$; $B \cup C = \{1, 2, 3\}$; $C_A(B) = \{3, 4, 5\}$.

$C_A(C) = \{2, 4, 5\}$; $A \setminus B = \{3, 4, 5\}$.

$B \Delta C = (B \cup C) \setminus (B \cap C) = \{1, 2, 3\} \setminus \{1\} = \{2, 3\}$.

b) * $B \times C = \{(x, y) \setminus x \in B \wedge y \in C\} = \{(1,1), (1,3), (2,1), (2,3)\}$.

* $B \times \phi = \{(x, y) \setminus x \in B \wedge y \in \phi\}$ or ϕ ne contient aucun élément, alors $B \times \phi = \phi$.

* $B \times \{\phi\} = \{(x, y) \setminus x \in B \wedge y \in \{\phi\}\} = \{(1, \phi), (2, \phi)\}$.

* $\mathcal{P}(B) = \{\phi, B, \{1\}, \{2\}\}$, donc $\mathcal{P}(\mathcal{P}(B)) = \{\phi, \mathcal{P}(B), \{\phi\}, \{B\}, \{\{1\}\}, \{\{2\}\}, \{\phi, B\}, \{\phi, \{1\}\}, \{\phi, \{2\}\}, \{B, \{1\}\}, \{B, \{2\}\}, \{\{1\}, \{2\}\}, \{\phi, B, \{1\}\}, \{\phi, B, \{2\}\}, \{B, \{1\}, \{2\}\}, \{\phi, \{1\}, \{2\}\}\}$. /Pos

Exo2

① $A \cap B = \phi \Leftrightarrow A \subset \underset{E}{C}(B)$.

$\Rightarrow$) On a $A \cap B = \phi$. Soit $x \in A$ et supposons que $x \notin \underset{E}{C}(B)$. Alors

$x \notin \underset{E}{C}(B) \Rightarrow x \in \underset{E}{C}(C_E(B)) = B \Rightarrow x \in A \cap B \Rightarrow A \cap B \neq \phi$

Ce qui est absurde. Donc, $x \in \underset{E}{C}(B)$.

$\Leftarrow$) On suppose que $A \cap B \neq \phi$. Alors, $\exists x \in E / x \in A \cap B$

$\Rightarrow x \in A \wedge x \in B$ et comme $A \subset \underset{E}{C}(B)$, donc

$x \in \underset{E}{C}(B) \wedge x \in B \Rightarrow x \in \underset{E}{C}(B) \cap B = \phi$

Contradiction. Donc, $A \cap B = \phi$.

② $A \subset B \Leftrightarrow \underset{E}{C}(B) \subset \underset{E}{C}(A)$.

$\Rightarrow$) Supposons que $A \subset B$ et $x \in \underset{E}{C}(B)$. Alors

$x \in \underset{E}{C}(B) \Rightarrow x \notin B$ et comme $A \subset B$, donc $x \notin A$

$\Rightarrow x \in \underset{E}{C}(A) \Rightarrow \underset{E}{C}(B) \subset \underset{E}{C}(A)$.

$\Leftarrow$) On a $\underset{E}{C}(B) \subset \underset{E}{C}(A)$. Alors

$x \in A \Rightarrow x \notin \underset{E}{C}(A) \Rightarrow x \notin \underset{E}{C}(B) \Rightarrow x \in B$. Donc, $A \subset B$.

③ $\underset{E}{C}(A \cap B) = \underset{E}{C}(A) \cup \underset{E}{C}(B)$.

$x \in \underset{E}{C}(A \cap B) \Leftrightarrow x \notin (A \cap B) \Leftrightarrow x \notin A \vee x \notin B$

$\Leftrightarrow x \in \underset{E}{C}(A) \vee x \in \underset{E}{C}B$

$\Leftrightarrow x \in \underset{E}{C}(A) \cup \underset{E}{C}(B)$.

De même pour la réunion.

④ $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$.

$$A \setminus (B \cup C) \overset{\text{Déf}}{=} A \cap \underset{E}{\complement}(B \cup C) \overset{(3)}{=} A \cap \left(\underset{E}{\complement} B \cap \underset{E}{\complement} C\right)$$

$$= \left(A \cap \underset{E}{\complement} B\right) \cap \left(A \cap \underset{E}{\complement} C\right) \overset{\text{Déf}}{=} (A \setminus B) \cap (A \setminus C).$$

⑤ $\underset{E}{\complement}(A) \, \Delta \, \underset{E}{\complement}(B) = A \, \Delta \, B$.

D'après la définition : $A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A) = \left(A \cap \underset{E}{\complement}(B)\right) \cup \left(B \cap \underset{E}{\complement}(A)\right)$

En remplaçant A par $\underset{E}{\complement}(A)$ et B par $\underset{E}{\complement}(B)$ dans la formule précédente

$$\underset{E}{\complement}(A) \, \Delta \, \underset{E}{\complement}(B) = \left(\underset{E}{\complement}(A) \setminus \underset{E}{\complement}(B)\right) \cup \left(\underset{E}{\complement}(B) \setminus \underset{E}{\complement}(A)\right) = \left(\underset{E}{\complement}(A) \cap B\right) \cup \left(\underset{E}{\complement}(B) \cap A\right)$$

$$= \left(A \cap \underset{E}{\complement}(B)\right) \cup \left(B \cap \underset{E}{\complement}(A)\right) = A \, \Delta \, B.$$

Car $\cap$, $\cup$ sont des lois commutatives.

⑥ $(A \times C) \cup (B \times C) = (A \cup B) \times C$.

$$(A \times C) \cup (B \times C) = \{(x,y) \,/\, (x,y) \in A \times C \text{ ou } (x,y) \in B \times C\}$$

$$= \{(x,y) \,/\, (x \in A \text{ et } y \in C) \text{ ou } (x \in B \text{ et } y \in C\}$$

$$= \{(x,y) \,/\, (x \in A \text{ ou } x \in B) \text{ et } y \in C\}$$

$$= (A \cup B) \times C.$$

⑦

$A \subset B \Rightarrow \mathcal{P}(A) \subset \mathcal{P}(B)$.

D'après la définition : $\mathcal{P}(A) = \{X \,/\, X \subset A\}$ on trouve :

$X \in \mathcal{P}(A) \Rightarrow X \subset A$ et comme $A \subset B$. Alors, $X \subset B$

$\Rightarrow X \in \mathcal{P}(B)$. Donc l'inclusion.

Exo4

① $f(A\cap B) \subset f(A)\cap f(B)$.

Soit $y \in f(A\cap B)$, il existe $x \in A\cap B$ tel que $y = f(x)$, or $x \in A$ donc $y = f(x) \in f(A)$ et de même $x \in B$ donc $y \in f(B)$.

D'où, $y \in f(A)\cap f(B)$.

② f est injective $\Leftrightarrow f(A\cap B) = f(A)\cap f(B)$.

$\Leftarrow$) Soient $x_1, x_2 \in E$ tels que $f(x_1) = f(x_2)$. Posons $A = \{x_1\}$ $B = \{x_2\}$. On a $g(x_1) = g(x_2) \in g(A)\cap g(B) = g(A\cap B)$.

Donc, $g(A\cap B) \neq \phi$ et par suite, $A\cap B \neq \phi$. Ceci implique $x_1 = x_2$.

$\Rightarrow$) On a d'après ① $f(A\cap B) \subset f(A)\cap f(B)$.

On démontre maintenant que $f(A)\cap f(B) \subset f(A\cap B)$.

Soit $y \in f(A)\cap f(B) \Rightarrow y \in f(A) \wedge y \in f(B)$.

$\Rightarrow \exists x \in A \,/\, y = f(x) \wedge \exists x' \in B \,/\, y = f(x')$.

Alors, $f(x) = f(x')$ et comme f est injective donc $x = x'$

$\Rightarrow x \in A\cap B \Rightarrow f(x) \in f(A\cap B) \Rightarrow y \in f(A\cap B)$.

Donc, $f(A)\cap f(B) \subset f(A\cap B)$. D'où, $f(A\cap B) = f(A)\cap f(B)$.

③ $$\begin{aligned} f^{-1}(C\cap D) &= \{x \,;\, f(x) \in C\cap D\} \\ &= \{x \,;\, f(x) \in C \wedge f(x) \in D\} \\ &= \{(x \,;\, f(x)\in C) \text{ et } (x \,;\, f(x) \in D)\} \\ &= f^{-1}(C) \cap f^{-1}(D). \end{aligned}$$

Poy

④ Soit $f(x) \in f(f^{-1}(C)) \Rightarrow x \in f^{-1}(C) \Rightarrow f(x) \in C$

Donc, $f(f^{-1}(C)) \subset C$.

⑤ f est surjective $\Leftrightarrow f(f^{-1}(C)) = C$.

$\Leftarrow$) on démontre que $\forall y \in F, \exists x \in E / y = f(x)$.

$\forall y \in F : y \in \{y\}$ et d'après l'hypothèse on peut écrit $\{y\} = f(f^{-1}(\{y\}))$

Alors, il existe un élément x de E avec $x \in f^{-1}(\{y\}) \Rightarrow f(x) \in \{y\} \Rightarrow f(x) = y$.

$\Rightarrow$) On a d'après ④ $f(f^{-1}(C)) \subset C$, on démontre maintenant que $C \subset f(f^{-1}(C))$.

Soit $y \in C$, donc $y \in F$ et comme f est surjective. Alors

$\exists x \in E / y = f(x)$. Donc, $f(x) \in C \Rightarrow x \in f^{-1}(C) \Rightarrow f(x) \in f(f^{-1}(C))$

Alors, $y \in f(f^{-1}(C))$. D'où, $f(f^{-1}(C)) \supset C$.

⑥ $x \in f^{-1}(\complement_F(C)) \Leftrightarrow f(x) \in \complement_F(C) \Leftrightarrow f(x) \notin C \Leftrightarrow x \notin f^{-1}(C)$

$\Leftrightarrow x \in \complement_E f^{-1}(C)$.

⑦ $f^{-1}(C \Delta D) = f^{-1}((C \setminus D) \cup (D \setminus C)) = f^{-1}(C \setminus D) \cup f^{-1}(D \setminus C)$

$= f^{-1}(C \cap \complement_F D) \cup f^{-1}(D \cap \complement_F C)$

$= (f^{-1}(C) \cap f^{-1}(\complement_F D)) \cup (f^{-1}(D) \cap f^{-1}(\complement_F C))$.

$= (f^{-1}(C) \cap \complement_E f^{-1}(D)) \cup (f^{-1}(D) \cap \complement_E f^{-1}(C))$.

$= (f^{-1}(C) \setminus f^{-1}(D)) \cup (f^{-1}(D) \setminus f^{-1}(C))$

$= f^{-1}(C) \Delta f^{-1}(D)$.

EX05

1/ f n'est pas injective car $f(2) = f(\frac{1}{2}) = \frac{4}{5}$ mais $2 \neq \frac{1}{2}$.

f n'est pas surjective car "2" n'a pas d'antécédent

En effet : L'équation $f(x) = 2$ devient $x^2 - x + 1 = 0$ qui n'a pas de solutions réelles.

2/ On sait que $f(\mathbb{R}) = [-1, 1]$ si l'équation $f(x) = y$ admet une solution x, $\forall y \in [-1, 1]$.

$$f(x) = y \Rightarrow yx^2 - 2x + y = 0 \; \ldots\ldots \; (*)$$

$$\Delta' = 1 - y^2$$

$(*)$ admet une solution ssi $\Delta' \geq 0$, donc il y a des solutions si et seulement si $y \in [-1, 1]$. Donc, $f(\mathbb{R}) = [-1, 1]$.

3/ g est bijective $\Leftrightarrow$ g est injective et surjective

$\Leftrightarrow$ $\forall y \in [-1, 1]$, l'équation $g(x) = y$ a une solution unique

$\Leftrightarrow$ $\forall y \in [-1, 1]$, $\exists! \, x \in [-1, 1] : g(x) = y$.

Soit $y \in [-1, 1]$. Alors, les solutions de $g(x) = x$ sont $\begin{cases} x = \dfrac{1 - \sqrt{1 - y^2}}{y} \\ x = \dfrac{1 + \sqrt{1 - y^2}}{y} \end{cases}$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{y}{1 + \sqrt{1 - y^2}} \in [-1, 1]. \\ \text{ou} \\ x = \dfrac{1 + \sqrt{1 - y^2}}{y} \notin [-1, 1] \end{cases}$$

Donc, la seule solution est $x = \dfrac{y}{1 + \sqrt{1 - y^2}}$. D'où g est bijective.

$$g^{-1} : [-1, 1] \longrightarrow [-1, 1]$$

$$y \longmapsto g^{-1}(y) = \frac{1 - \sqrt{1 - y^2}}{y}.$$