Chapitre1

Echantillonnage et Transformée en Z

1. 1 Introduction

Le traitement numérique du signal par ordinateur exige que le signal soit converti en une suite de nombres (numérisation). Cette conversion se décompose, sur le plan théorique, en trois opérations :

1. l'échantillonnage prélève, le plus souvent à intervalles réguliers, la valeur du signal.
2. la quantification transforme une valeur quelconque en une valeur prise dans une liste finie de valeurs valides pour le système.
3. le codage fait correspondre à chaque valeur valide pour le système un code numérique.

L'objectif de l'échantillonnage est la transmission de l'information d'un signal. La question du choix de la fréquence d'échantillonnage se pose immédiatement :

- si la fréquence d'échantillonnage est trop faible, les acquisitions seront trop espacées et si le signal comporte des détails pertinents entre deux positions de capture, ceux-ci seront perdus.
- plus la fréquence d'échantillonnage est élevée, et plus la transmission coûte en puissance de traitement, en capacités de transmission et en espace de stockage.

Pour choisir une fréquence d'échantillonnage qui soit suffisante, il faut que la connaissance des échantillons suffise pour calculer la valeur du signal dans tous les points intermédiaires. Claude Shannon a montré à quelle condition cela était possible, connaissant la largeur de bande de l'information codée dans le signal à transmettre.

Le théorème d'échantillonnage indique que si toutes les fréquences du signal sont inférieures à la moitié de la fréquence d'échantillonnage, il peut être parfaitement reconstitué. En général, les fréquences supérieures à la moitié de la fréquence d'échantillonnage introduisent un recouvrement spectral également appelé Repliement de spectre (aliasing).

1. 2 Théorème d'échantillonnage

L'échantillonnage consiste à prélever les valeurs d'un signal à intervalles définis, généralement réguliers. Il produit une suite de valeurs discrètes nommées échantillons. Pour choisir une fréquence d'échantillonnage qui soit suffisante, il faut que la connaissance des échantillons suffise pour calculer la valeur du signal dans tous les points intermédiaires. Claude Shannon a montré à quelle condition cela était possible, connaissant la largeur de bande de l'information codée dans le signal à transmettre. Le théorème d'échantillonnage indique que si toutes les fréquences du signal sont inférieures à la moitié de la fréquence d'échantillonnage, il peut être parfaitement reconstitué. En général, les fréquences supérieures à la moitié de la fréquence d'échantillonnage introduisent un recouvrement spectral également appelé Repliement de spectre (ang. *aliasing*).

Dans cette section, on veut étudier l'échantillonnage d'un signal déterministe quelconque $g(t)$ à bande limitée de fréquence maximale f_m (Fig. 1.1). Alors, la transformée de Fourier, $G(f)=0$ pour $|f| > f_m$

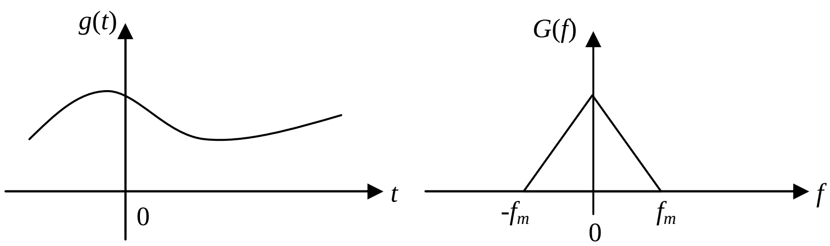


Fig. 1. 1 Signal analogique avec son spectre à bande limitée

Idéalement, l'échantillonnage est obtenu en multipliant le signal $g(t)$ par un train d'impulsions $p(t)$ [1] (Fig. 1.2). Soit $g_s(t)= g(t)p(t)$

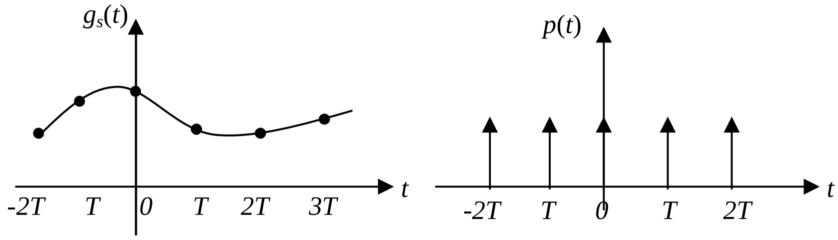


Fig. 1. 2 Echantillonnage avec un train d'impulsion $p(t)= \delta(t)$

Comme $p(t)$ est une fonction périodique, elle peut être représentée par la série de Fourier suivante [1]:

$$p(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_n e^{j2\pi n\frac{t}{T}} \tag{1.1}$$

où $C_n = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} p(t)e^{-j2\pi n\frac{t}{T}}dt = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} \delta(t)e^{-j2\pi n\frac{t}{T}}dt = \frac{1}{T}$

$\frac{1}{T}$ est la fréquence fondamentale du signal périodique $p(t)$, qui représente aussi la fréquence d'échantillonnage, $f_s = \frac{1}{T} Hz$. La fonction $g_s(t)$ devient

$$g_s(t) = f_s g(t) \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{j2\pi n f_s} \tag{1.2}$$

La TF de $g_s(t)$ est

$$\begin{aligned} G_s(f) &= \int_{-\infty}^{+\infty} [f_s g(t) \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{j2\pi n f_s}] e^{-j2\pi ft} dt \\ &= f_s \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} g(t) e^{-j2\pi(f-nf_s)t} dt \\ &= f_s \sum_{n=-\infty}^{+\infty} G(f-nf_s) \end{aligned} \tag{1.3}$$

La Fig. 1.3 représente le tracé de l'équation (1.2) pour $f_s > 2f_m$.

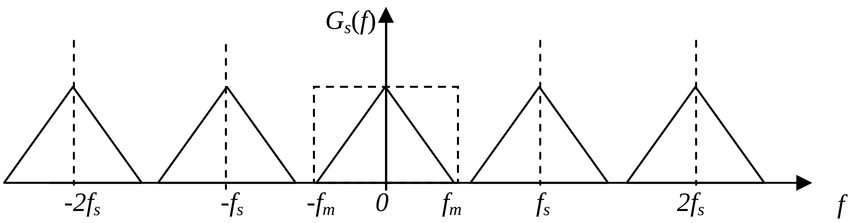


Fig. 1. 3 Spectre du signal échantillonné pour $f_s > 2f_m$

On observe que le signal original $g(t)$ peut être reconstruit par l'application du filtre passe-bas comme montré par la ligne pointillée. On peut aussi remarquer que le taux d'échantillonnage devient au moins $2f_m$. Alors la fréquence d'échantillonnage minimale est $f_s = 2f_m$ qui est appelée le taux de Nyquist. L'échantillonnage par une fréquence inférieure au taux de Nyquist (Fig. 1.4) permet de produire l'erreur de recouvrement (chevauchement) et le signal original ne peut être reconstruit [1, 2].

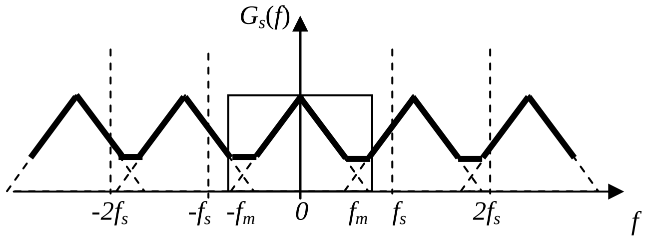
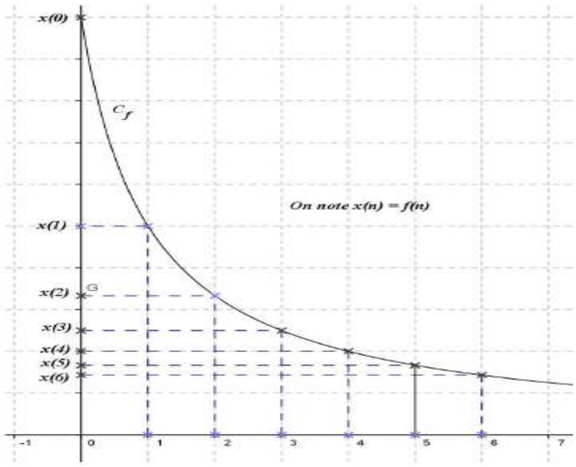


Fig. 1. 4 Spectre du signal échantillonné pour $f_s < 2 f_m$

1. 3 Transformée en Z

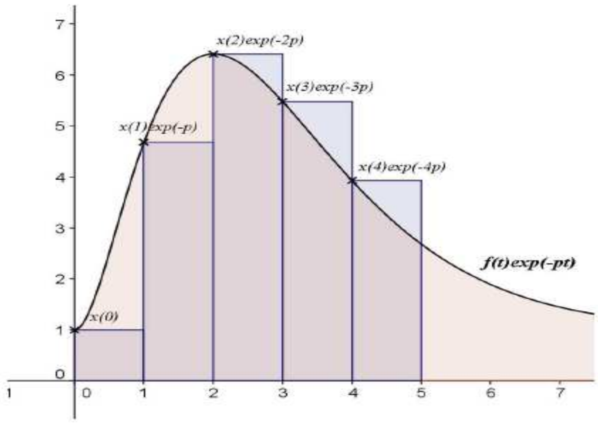
La transformée en Z (TZ) est un outil mathématique de l'automatique et du traitement du signal, qui est l'équivalent discret de la transformée de Laplace. Elle est utilisée pour le calcul de filtres numériques à réponse impulsionnelle infinie (RII), réponse impulsionnelle finie (RIF) et en automatique pour modéliser des systèmes dynamiques de manière discrète [2, 3].

(i) Définitions : On considère un signal analogique défini par x_a(t). Cette fonction définie sur *IR* est causale si : Pour tout t<0, x_a(t)= 0. En ne prenant que les valeurs des images par *x* des nombres entiers, on construit une suite numérique, appelée signal échantillonné de *f*. La suite *x(n)* est appelée un signal causal discret ou numérique par opposition à la fonction $x_a(t)$ qui est un signal causal continu ou analogique. Si l'on appelle *T* la période entre deux mesures de l'échantillon, on peut construire le signal causal discret : $x(n) = x_a(nT)$.



Maintenant, nous voulons définir pour les signaux causaux discrets une transformation analogue à la transformée de Laplace pour les signaux causaux continus. Soit un signal causal continu $x_a(t)$ et le signal discret échantillonné associé : Pour tout $n \in N$, $x(n) = x_a(n)$. La transformée de Laplace du signal continu x est : $X(s)=\int_0^{+\infty} x_a(t)e^{-st}dt$. La fonction $x_a(t)e^{-st}$ a pour signal discret échantillonné associé : pour tout $n\in N$, $x(n)\,e^{-sn}$.

Il s'agit ici d'approximer l'aire définie par l'intégrale X(s) par une série $\int_0^{+\infty} x_a(t)e^{-st}dt \cong \sum_{n=0}^{+\infty} x(n)e^{-sn}$ avec T=1.



En posant $z=e^{j\omega}=e^{s}$, la TZ, X(z) de la suite x(n) est définie par la relation suivante [2-4]:

$$X(z)=\sum_{n=0}^{+\infty} x(n)z^{-n} \tag{1.4}$$

Z est une variable complexe et la fonction X(z) possède un domaine de convergence qui en général est un anneau centré sur l'origine de rayons R_1 et R_2. C'est-à-dire que X(z) est définie pour $R_1<z<R_2$. Les valeurs R_1 et R_2 dépendent de la suite $x(n)$. Si la suite $x(n)$ représente la suite des échantillons d'un signal prélevé avec 1a période T, 1a transformée de Fourier discrète (TFD) de cette suite s'écrit:

$$S(f)=\sum_{n=0}^{\infty} x(n)e^{-j2\pi fnT} \tag{1.5}$$

Pour $z=e^{j2\pi fT}$, la transformée en Z de la suite x(n) coïncide avec sa transformée de Fourier. C'est-à-dire on peut faire l'analyse fréquentielle du signal discret par la transformée en Z.

(ii) Propriétés : On montre les propriétés énoncées ci-dessous :

- Linéarité :

$$Z\{a_1x_1(n)\pm a_2x_2(n)\}=a_1Z\{x_1(n)\}\pm a_2Z\{x_2(n)\} \tag{1.6}$$

- Décalage temporel :

$$Z\{x(n-k)\}=z^{-k}Z\{x(n)\} \tag{1.7}$$

- Avance :

$$Z\{x(n+k)\} = z^k \left[Z\{x(n)\} - \sum_{j=0}^{k-1} x(j) z^{-j} \right] \tag{1.8}$$

- Convolution :

$$Z\{x * y\} = Z\{x\} Z(y) \tag{1.9}$$

Où $(x * y)(n) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(n-k) y(k)$

- Multiplication par une exponentielle :

$$Z\{a^n x(n)\} = X(z/a) \tag{1.10}$$

- Théorème de la valeur initiale : soit $x(n)$ signal causal

$$x(0) = \lim_{z \to +\infty} X(z) \tag{1.11}$$

- Théorème de la valeur finale :

$$\lim_{n \to +\infty} x(n) = \lim_{z \to 1, |z|<1} (z-1) X(z) \tag{1.12}$$

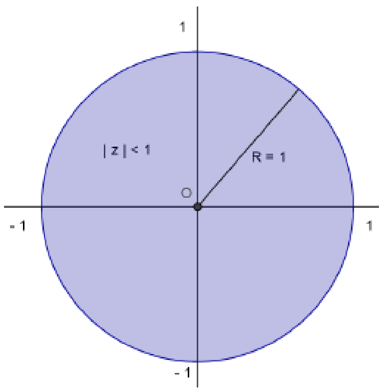
- Multiplication par la variable d'évolution :

$$Z\{n^k x(n)\} = \underbrace{-z\frac{d}{dz}\left\{-z\frac{d}{dz}\left[-z\frac{d}{dz} ......X(z)\right\}\right.}_{k\ fois} \tag{1.13}$$

Remarques :

- La série géométrique $\sum_{0}^{+\infty} q^n$ de raison $q \neq 0$ converge si est seulement si $|q| < 1$. Si cette série entière converge, on a alors : $\sum_{0}^{N} q^n = \frac{1-q^{N+1}}{1-q}$, $\sum_{0}^{\infty} q^n = \frac{1}{1-q}$, $|q| < 1$

- Soit $z \in C$ et $z \neq 1$. $\sum_{n=0}^{+\infty} z^n$ est une série entière à variable complexe et qui converge si $|z| < 1$. Le nombre « 1 » s'appelle le rayon de convergence de la série où l'ensemble des nombres complexes appartient dans le disque de convergence ci-contre.



Exemple 1:

Calculer la TZ de la séquence,

$x(n) = (n+2)^2$

Solution :

Pour, $y(n) = n^2$, on applique la propriété de multiplication par la variable évolution.

$$Y(z) = -z \frac{d\left(\frac{z}{(z-1)^2}\right)}{dz} = \frac{z(z+1)}{(z-1)^3}$$

Puis, on applique la propriété de l'avance. D'où

$$X(z) = Z\{y(n+2)\} = z^2\left(Y(z) - \sum_{j=0}^{2-1} y(j) z^{-j}\right)$$

$$= z^2\left(\frac{z(z+1)}{(z-1)^3} - (0^2 z^{-0} + 1^2 z^{-1})\right)$$

$$= \frac{z^3(z+1)}{(z-1)^3} - z$$

$$= \frac{z(4z^2 - 3z + 1)}{(z-1)^3}$$

1. 4 Transformée en Z inverse

En général, la TZ inverse (TZI) de *X(z)* peut être effectuée par l'une des quatre méthodes suivantes :

a- Méthode de la table de transformation : On consulte directement la table si c'est possible.

b- Méthode des fractions rationnelles (partial-fraction expansion method) : On décompose *X(z)* en une somme de plusieurs fonctions rationnelles suivante :

$$X(z) = X_1(z) + X_2(z) + X_3(z) + \ldots.$$

La T.Z inverse est ensuite obtenue par l'utilisation de la table des transformations. D'où

$$x(n) = x_1(n) + x_2(n) + x_3(n) + \ldots$$

c- Méthode de série en puissances (power-series method) : On transforme *X(z)* en une série finie (z^{-k}, k=1, …, n) de puissances utilisant la division polynomiale.

$$X(z) = x(0) + x(1)z^{-1} + x(2)z^{-2} + \ldots. + x(k)z^{-k}.$$

Alors, il suffit de trouver $x(n)$ à partir de $x(0), x(1), x(2),\ldots., x(k)$

d- Méthode de l'inversion de la formule (inversion formula method) : Cette dernière méthode repose sur le calcul de l'intégrale de contour suivant :

$$x(n) = \frac{1}{2\pi j} \oint_C X(Z) Z^{n-1} dZ \tag{1.14}$$

Où C est un contour fermé contenant tous les points singuliers ou pôles de X(Z). Le théorème des résidus est souvent utilisé pour déterminer $x(n)$

$$x(n) = \sum_{Z_k = \text{pôles de } Z^{n\text{-}1} X(Z)} \operatorname{Re} s\left\{X(Z)Z^{n\text{-}1}\right\}_{Z=Z_k} \quad (1.15)$$

Le résidu à un pôle $z=a$ d'ordre q de la fonction $X(Z)Z^{n\text{-}1}$ est donné par [4] :

$$\operatorname{Re} s_a^q = l\,im_{z\to a} \frac{1}{(q-1)!} \frac{d^{q-1}}{dz^{q-1}}\left[X(Z)Z^{n\text{-}1}(z-a)^q\right] \quad (1.16)$$

Exemple 2:

Calculer la TZ inverse de la fonction,

$$X(z) = \frac{z^2}{6z^2 - 5z + 1}$$

Solution :

On applique par exemple la méthode de fractions rationnelles

$$X(z) = \frac{z^2}{6z^2 - 5z + 1} = \frac{z^2}{6(z-1/2)(z-1/3)}$$

$$X(z) = \frac{z}{6}\left(\frac{A}{z-1/2} + \frac{B}{z-1/3}\right)$$

$$A = \lim_{z\to 1/2} \frac{z}{z-1/3} = 3$$

$$B = \lim_{z\to 1/3} \frac{z}{z-1/2} = -2$$

$$X(z) = \frac{1}{2}\frac{z}{z-1/2} - \frac{1}{3}\frac{z}{z-1/3}$$

$$x(n) = \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} u(n) - \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1} u(n)$$

1. 5 Transformées en Z usuelles

Les transformées en Z de quelques fonctions les plus utilisées en traitement du signal sont présentées dans la Table. 1. Quelques transformations usuelles peuvent être utilisées [5].

$$(-1)^n \leftrightarrow \frac{z}{z+1},$$

$$n^2 \leftrightarrow \frac{z(z+1)}{(z-1)^3},$$

$$n^3 \leftrightarrow \frac{z(z^2+4z+1)}{(z-1)^4} \quad \text{et} \quad a^n n^2 \leftrightarrow \frac{az(z+a)}{(z-a)^3}$$

Table. 1 Transformations en Z usuelles [5]

Transformées en Z

	Signal $x(n)$	Transformée en Z $X(z)$	Domaine de convergence
1	$\delta[n]$	1	$\mathbb{C}$
2	$u[n]$	$\frac{1}{1-z^{-1}}$	$\|z\|>1$
3	$nu[n]$	$\frac{z^{-1}}{(1-z^{-1})^2}$	$\|z\|>1$
4	$a^n u[n]$	$\frac{1}{1-az^{-1}}$	$\|z\|>\|a\|$
5	$na^n u[n]$	$\frac{az^{-1}}{(1-az^{-1})^2}$	$\|z\|>\|a\|$
6	$-a^n u[-n-1]$	$\frac{1}{1-az^{-1}}$	$\|z\|<\|a\|$
7	$-na^n u[-n-1]$	$\frac{az^{-1}}{(1-az^{-1})^2}$	$\|z\|<\|a\|$
8	$\cos(\omega_0 n)u[n]$	$\frac{1-z^{-1}\cos(\omega_0)}{1-2z^{-1}\cos(\omega_0)+z^{-2}}$	$\|z\|>1$
9	$\sin(\omega_0 n)u[n]$	$\frac{z^{-1}\sin(\omega_0)}{1-2z^{-1}\cos(\omega_0)+z^{-2}}$	$\|z\|>1$
10	$a^n\cos(\omega_0 n)u[n]$	$\frac{1-az^{-1}\cos(\omega_0)}{1-2az^{-1}\cos(\omega_0)+a^2z^{-2}}$	$\|z\|>\|a\|$
11	$a^n\sin(\omega_0 n)u[n]$	$\frac{az^{-1}\sin(\omega_0)}{1-2az^{-1}\cos(\omega_0)+a^2z^{-2}}$	$\|z\|>\|a\|$

1. 6 Quelques définitions

a. Système causal

Un signal causal est défini par $x(t)$ pour $t>0$. Autrement dit, un signal est dit causal si ce signal est nul quand $t<0$. Par opposition, un signal non causal est défini et non nul pour au moins une valeur $t<0$. Cette définition s'applique aussi bien à un système discret qu'à un système continu. Le système est causal si et seulement si sa fonction de transfert est propre. Cela signifie que la sortie à un instant donné n'est pas influencée par le futur de l'entrée. Par exemple, le système $y(n) = \underline{x}(n+1)$, où x désigne l'entrée et y la sortie, n'est pas causal car la valeur du signal de sortie à l'instant ne dépend de la valeur du signal d'entrée à un instant ultérieur $(n+1)$.

b. Stabilité des systèmes discrets

Un système à temps discret de fonction de transfert $H(z)$ est stable si et seulement si ses pôles, p_1, p_2, …p_n, c'est-à-dire les racines du dénominateur de $H(z) = \frac{(z - z_1)(z - z_2)...(z - z_m)}{(z - p_1)(z - p_2)...(z - p_n)}$, sont tous situés à l'intérieur du cercle unité. Puisque, $z = e^{pT}$, on a donc $|z| < 1$ si et seulement si, $\Re(p) < 0$.

c. Système à minimum de phase

Pour un système discret, en supposant que la fonction de transfert $H(z)$ est rationnelle, ce système est à minimum de phase si et seulement si tous les pôles et zéros de $H(z)$ sont à l'intérieur du disque unité.

1. 7 Commandes Matlab [6] :

(i) Calcul de la transformée en Z et Z inverse:

La bibliothèque Matlab délivre les fonctions « ztrans » et « iztrans » pour la transformée en Z et la transformée en Z inverse.

Exemples :

```
>> syms z n
>> ztrans(1/4^n)
ans =z/(z - 1/4)

>> syms z n
>> iztrans((6-9*z^-1)/(1-2.5*z^-1+z^-2))
ans =2*2^n + 4*(1/2)^n
```

(i) Calcul de la série de puissance:

La fonction « deconv » est utilisée pour exécuter la division polynomiale demandée par la méthode en série de puissance. Etant donné la fonction de transfert $H(z)$ par

$$H(z) = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + ... + b_n z^{-n}}{a_0 + a_1 z^{-1} + ... + a_n z^{-m}}$$

La commande Matlab est:

```
>> [q,r]=deconv(b,a)
```

Exemple:

$$H(z) = \frac{1 + 2z^{-1} + z^{-2}}{1 - z^{-1} + 0.356 z^{-2}}$$

```
>> b=[1 2 1];
>> a=[1 -1 0.356];
>> n=5
n = 5;
>> b=[b zeros(1,n-1)];
```

```
>> [x,r]=deconv(b,a);
>> disp(x)
    1.0000    3.0000    3.6440    2.5760    1.2787
```

(ii) Calcul des Fractions rationnelles:

La fonction « residuez » est utilisée pour trouver les coefficients et les pôles des fractions partielles des la fonction $X(z)$.

$$H(z)=\frac{b_0+b_1z^{-1}+\ldots+b_nz^{-n}}{a_0+a_1z^{-1}+\ldots+a_nz^{-m}}=\frac{r_0}{1-p_1z^{-1}}+\ldots+\frac{r_n}{1-p_nz^{-1}}$$

La commande Matlab est :

```
>> [r,p,k]=residuez(b,a);
```

Exemple:

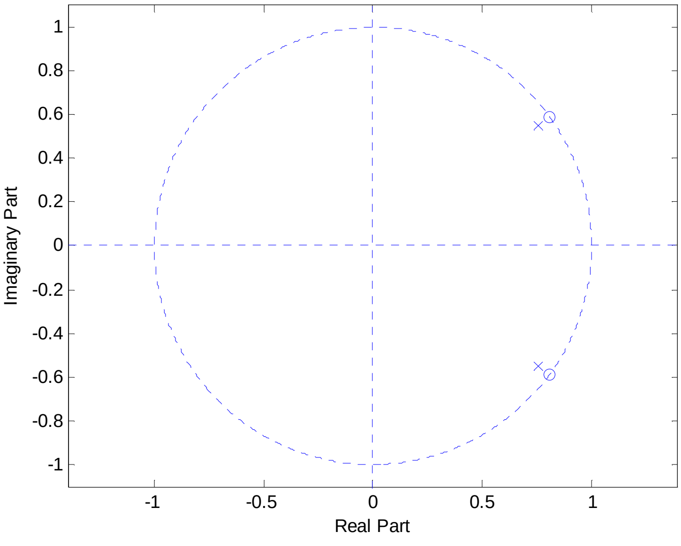
$$H(z)=\frac{1+2z^{-1}+z^{-2}}{1-z^{-1}+0.356z^{-2}}$$

```
>> [r,p,k]=residuez([1,2,1],[1,-1,0.3561])
r =
  -0.9041 - 5.9928i
  -0.9041 + 5.9928i
p =
   0.5000 + 0.3257i
   0.5000 - 0.3257i
k =
    2.8082
```

(iii) Calcul du diagramme pôles/zéros:

La commande “zplane” calcule et race la localisation des pôles et des zéros dans le plan complexe. La commande est :

```
>> zplane(b,a)
```



Exemple :

$$H(z)=\frac{1+1.618z^{-1}+z^{-2}}{1-1.516z^{-1}+0.878z^{-2}}$$

```
>> b=[1 -1.618 1];
>> a=[1 -1.5161 0.878];
>> roots(a)
ans =
   0.7581 + 0.5508i
   0.7581 - 0.5508i
>> roots(b)
ans =
   0.8090 + 0.5878i
```

0.8090 - 0.5878i
>> zplane(b,a)

(iii) Calcul de la réponse fréquentielle:

La commande « freqz » calcule et trace la réponse fréquentielle de $H(z)$. la commande est :

>> freqz(b,anpt,Fs)

Où Fs est la fréquence d'échantillonnage, npt est le nombre de points de la fréquence entre 0 et $Fs/2$.

Exemple :

$$H(z)=\frac{1+1.618z^{-1}+z^{-2}}{1-1.516z^{-1}+0.878z^{-2}}$$

>> b=[1 -1.618 1];

>> a=[1 -1.5161 0.878];

>> freqz(b,a)