Université Mohamed Boudiaf - Msila
Faculté de Mathématiques et de l'informatique
Socle commun MI
Année universitaire 2021/2022

Module : **Algèbre01**

(Série d'exercices N° 3)

Exercice n°1 :

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on définit une relation binaire sur $\mathbb{Z}$ par

$$\forall x, y \in \mathbb{Z} : x\mathcal{R}y \Longleftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z} \mid x - y = kn$$

1. Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence sur $\mathbb{Z}$.
2. Supposons que $n = 3$:
   (a) Déterminer la classe d'équivalence de $x \in \mathbb{Z}$. En déduire les classes $\overline{0}, \overline{1}, \overline{2}$.
   (b) Montrer que $\forall m \in \mathbb{Z} : \overline{0} = \overline{3m}, \quad \overline{1} = \overline{3m+1}, \quad \overline{2} = \overline{3m+2}$.
   (c) Montrer que $\overline{0} \cap \overline{1} = \emptyset$, $\overline{1} \cap \overline{2} = \emptyset$, $\overline{0} \cap \overline{2} = \emptyset$. En déduire l'ensemble quotient $\mathbb{Z}/\mathcal{R}$.

Exercice n°2 :

On définit sur $\mathbb{R}^2$ une relation binaire $\mathcal{R}$ par

$\forall (x_1, y_1), (x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2 : (x_1, y_1)\mathcal{R}(x_2, y_2) \Longleftrightarrow x_1 \leq x_2$ et $y_1 \leq y_2$.

1. Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'ordre sur $\mathbb{R}^2$.
2. Les éléments $(2, 4)$, $(3, 1)$ de $\mathbb{R}^2$ sont-ils comparables par $\mathcal{R}$?
3. L'ordre est-il total sur $\mathbb{R}^2$?
4. Déterminer l'ensemble des majorants de $A = \{(1, 2), (3, 1)\} \subset \mathbb{R}^2$.