Corrigé de la série03

Exercice01

① La réflexivité : On sait que $\forall x \in \mathbb{Z} : x - x = 0 = 0.n$, avec $k=0 \in$

Donc, $x R x$.

② La symétrie : $x R y \Leftrightarrow x-y = kn \Rightarrow y - x = (-k).n = k'.n$ avec $k'=-$

Donc, $y R x$.

③ La transitivité :

$$\begin{cases} xRy \\ \wedge \\ yRz \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-y = k_1.n \ / k_1 \in \mathbb{Z} \\ y-z = k_2.n \ / k_2 \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

; La sommation membre à membre donne :

$$x - z = (k_1+k_2)n = k_3.n \text{ avec } k_3 = k_1 + k_2 \in \mathbb{Z}.$$

Donc, $x R z$.

② Pour $n=3$: $\forall x, y \in \mathbb{Z} : x R y \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z} : x - y = 3k$.

a) Pour tout $x \in \mathbb{Z}$: $\bar{x} = \{y \in \mathbb{Z} : y R x\} = \{y \in \mathbb{Z} : y = x + 3k\}$

$= \{x + 3k \mid k \in \mathbb{Z}\}$.

En particulier : $\bar{0} = \{y \in \mathbb{Z} : y R 0\} = \{3k \mid k \in \mathbb{Z}\} = 3\mathbb{Z}$.

$\bar{1} = \{y \in \mathbb{Z} : y R 1\} = \{3k+1 \mid k \in \mathbb{Z}\} = 3\mathbb{Z}+1$.

$\bar{2} = \{y \in \mathbb{Z} : y R 2\} = \{3k+2 \mid k \in \mathbb{Z}\} = 3\mathbb{Z}+2$.

(b)

$\forall m \in \mathbb{Z} : \begin{cases} \overline{0} = \overline{3m} \\ \overline{1} = \overline{3m+1} \\ \overline{2} = \overline{3m+2} \end{cases}$ car $\forall m \in \mathbb{Z} : \begin{cases} 0 \, \mathcal{R} \, (3m) \\ 1 \, \mathcal{R} \, (3m+1) \\ 2 \, \mathcal{R} \, (3m+2) \end{cases}$.

En effet $\forall m \in \mathbb{Z} : \begin{cases} 0 - (3m) = 3(-m) \\ 1 - (3m+1) = 3(-m) \\ 2 - (3m+2) = 3(-m) \end{cases}$, $-m \in \mathbb{Z}$.

(C)

On a $\begin{cases} \overline{0} \cap \overline{1} = \phi \\ \overline{1} \cap \overline{2} = \phi \\ \overline{0} \cap \overline{2} = \phi \end{cases}$, car $\begin{cases} 0 \not{\mathcal{R}} \, 1 \\ 1 \not{\mathcal{R}} \, 2 \\ 0 \not{\mathcal{R}} \, 2 \end{cases}$

En effet $\begin{cases} 0 - 1 = -1 \neq 3k_1 \\ 1 - 2 = -1 \neq 3k_2 \\ 0 - 2 = -2 \neq 3k_3 \end{cases}$ / $k_1, k_2, k_3 \in \mathbb{Z}$.

On sait que $\mathbb{Z}/\mathcal{R} = \{ \overline{x} : x \in \mathbb{Z} \}$

$= \{ \overline{x} : x = 3m \} \cup \{ \overline{x} : x = 3m+1 \} \cup \{ \overline{x} : x = 3$

$= \{ \overline{0}, \overline{1}, \overline{2} \}$.

<u>Exercice02</u>

$$\forall (x_1, y_1), (x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1 \leq x_2 \text{ et } y_1 \leq y_2.$$

1 (i) La réflexivité : On sait que $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 : \begin{cases} x \leq x \\ y \leq y \end{cases}$

$\Rightarrow (x, y) \mathcal{R} (x, y) \Rightarrow \mathcal{R}$ est réflexive.

(ii) L'anti-symétrie : Supposons $(x_1, y_1) \mathcal{R} (x_2, y_2)$ et $(x_2, y_2) \mathcal{R} (x_1, y_1)$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 \leq x_2 \wedge y_1 \leq y_2 \\ \wedge \\ x_2 \leq x_1 \wedge y_2 \leq y_1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = x_2 \\ \wedge \\ y_1 = y_2 \end{cases} \Rightarrow (x_1, y_1) = (x_2, y_2).$$

Donc $\mathcal{R}$ est Anti-symétrique

(iii) La transitivité : Soient $(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3) \in \mathbb{R}^2$

$$\begin{cases} (x_1, y_1) \mathcal{R} (x_2, y_2) \\ \wedge \\ (x_2, y_2) \mathcal{R} (x_3, y_3) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 \leq x_2 \wedge y_1 \leq y_2 \\ \wedge \\ x_2 \leq x_3 \wedge y_2 \leq y_3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 \leq x_3 \\ \wedge \\ y_1 \leq y_3 \end{cases} \Rightarrow (x_1, y_1) \mathcal{R} (x_3, y_3)$$

Donc, $\mathcal{R}$ est transitive. D'où, $\mathcal{R}$ est une relation d'ordre sur $\mathbb{R}^2$.

2 $(2,4)$ et $(3,1)$ ne sont pas comparables car $(2,4)$ et $(3,1)$ ne vérifient pas la relation $\mathcal{R}$. En effet $\begin{cases} 2 \leq 3 \\ \wedge \\ 4 \not\leq 1 \end{cases}$ et $\begin{cases} 3 \not\leq 2 \\ \wedge \\ 1 \leq 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (2,4) \not\mathcal{R} (3,1) \\ \wedge \\ (3,1) \not\mathcal{R} (2,4) \end{cases}$

3 L'ordre est partiel car $\exists\, a = (2,4)$ et $b = (3,1) \,/\, a \not\mathcal{R} b \wedge b \not\mathcal{R} a$

④

$t = (x,y) \in \mathbb{R}^2$ est un majorant de $A \iff \forall a \in A : a \mathcal{R} t$

$$\Rightarrow \begin{cases} (1,2)\, \mathcal{R}\, (x,y) \\ \wedge \\ (3,1)\, \mathcal{R}\, (x,y) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 1 \leq x \wedge 2 \leq y . \\ \wedge \\ 3 \leq x \wedge 1 \leq y . \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \geq 3 \\ \wedge \\ y \geq 2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \underset{\mathbb{R}^2}{\mathrm{Maj}}(A) = \{(x,y) : x \geq 3 \wedge y \geq 2\} .$$