

Université de M'sila
 Tronc-commun sciences de la matière
 Faculté des sciences
 Année 2021/2022 Module Math 1

Série N **4** limites, continuité, dérivabilité
 et Développement limité

EX01 : Calculer les limites suivantes:

- | | |
|---|---|
| 1) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{1-x} - \frac{2}{1-x^2},$ | 2) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x}-1}{x-1},$ |
| 3) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x + \sqrt{x}} - \sqrt{x},$ | 4) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{x} + 1\right)^x,$ |
| 5) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2 + 2x} - x,$ | 6) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1+x^2}}{x}.$ |

EX02: 1) Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par: $f(x) = x + \frac{\sqrt{x^2}}{x}$. Déterminer l'ensembles des points de cotinuités de f .

2) On considère la fonction g définie sur \mathbb{R} par:

$$g(x) = \begin{cases} \frac{1}{\ln|x|} & \text{si } x \notin \{-1, 0, +1\} \\ 0 & \text{si } x \in \{-1, 0, +1\} \end{cases}$$

Etudier la continuité en points $-1, 0, +1$.

EX03: Soient les fonctions f, g et $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définies respectivement par : $f(x) = x|x|, g(x) = x^{\frac{3}{5}}$ et $h(x) = \cos(\sqrt{|x|})$ sont elles dérivables en 0.

EX04: Soit la fonction K définie sur \mathbb{R} telle que K est définie par

$$K(x) = \begin{cases} \frac{1}{e^x} & \text{si } x < 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \\ x \ln(x) - x & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

Etudier la dérivabilité de K en point 0.

EX05: Soit la fonction J définie sur \mathbb{R} telle que J est définie par

$$J(x) = \begin{cases} \frac{\sin(ax)}{x} & \text{si } x < 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \\ e^{bx} - x & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

- 1) A l'aide de la règle de L'hospital calculer la limite $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cos(x) - \sin(x)}{x^2}$.
- 2) Déterminer a, b pour que J soit continue sur \mathbb{R} .
- 3) Déterminer a, b pour que J soit dérivable sur \mathbb{R} .

EX06:

Montrer que pour tout réels $x, y \in \mathbb{R}$ on a $|\sin(x) - \sin(y)| \leq |x - y|$.

EX07:

Calculer les développements limités (DL) d'ordre $n = 3$ au voisinage de $x_0 = 0$ des fonctions suivantes:

- | | |
|------------------------|---|
| 1- $\ln(1+x)$ | 2- $\cos(x)$, |
| 3- $\sin(x)$ | 4- $(1+x)^\alpha / \alpha \in \mathbb{R}$, |
| 5- $x^4 + x^3 + x - 1$ | 6- $2\cos(x) + 3\sin(x)$, |
| 7- $e^x \tan(x)$ | 8- $\frac{\ln(1+x)}{x}$, |
| 9- $e^{\cos(x)}$ | 10- $\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x}$. |

EX08:

Calculer les développements limités (DL) d'ordre $n = 3$ au voisinage de $x_0 = 0$ des fonctions suivantes, en utilisant la division euclidienne à les puissances croissantes:

- | | |
|-------------------------------|----------------------------|
| 1- $\frac{\ln(1+x)}{\cos(x)}$ | 2- $\frac{e^x}{1+x-x^2}$. |
|-------------------------------|----------------------------|

EX09:

Déterminer les limites suivantes en utilisant les DL telles que les limites sont:

- | | | |
|---|---|--|
| 1- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x}$, | 2- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x}$, | 3- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1-\cos(x)}{x}$, |
| 4- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cos(x) - \sin(x)}{x^2}$, | 5- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(\cos(x) - 1)}{x^2}$, | 6- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1-x)}{e^x - 1}$. |