محاضرة 17و 18

اختبار الاستقلال باستخدام توزيع X^2

في كثير من المسائل العلمية والعملية، نقوم بتصنيف مجموعة من المشاهدات وفق أسلوبين، فمثلا قد بتصنيف معهد ما وفق الجنس من جهة ووفق المستوى الأكاديمي من جهة أخرى وقد نصنف مجتمع ما وفق خاصية التدخين من ناحية ووفق اصابتهم بسرطان الرئة من ناحية ثانية، ففي هذه الحالات وأمثالها ينشأ السؤال التالي:

هل هناك علاقة بين أسلوبي التصنيف؟

هل هناك علاقة بين الجنس والمستوى الأكاديمي؟

هل هناك علاقة بين التدخين والاصابة بسرطان الرئة؟

للإجابة عن هذه الأسئلة وأمثالها نستعمل اختبار الاستقلال المسمى باختبار كأي تربيع ، ولتوضيح X^2هذا الاختبار نأخذ المثالي التالي:

مثال: أراد فريق طبي أن يتعرف فيما اذا كانت هناك علاقة بين نوع الدم وشدة الإصابة بمرض معين، لهذا قام الفريق الطبي بدراسة 1500 حالة وصنفها في الجدول التالي

نوع الدم/ شدة الاصابة	A	B	AB	O	المجموع
بسيطة	543	211	90	476	1320
متوسطة	44	22	8	31	105
شديدة	28	09	7	31	75
المجموع	615	248	105	538	1500

يسمى هذا الجدول وأمثاله جدول التوافق

وبالاعتماد على أول قانون في الاحتمالات والذي ركزنا عليه كثيرا في المحاضرات الأولى لهذا المقياس وهو $P(A) = \frac{n_A}{n_3}$

أي احتمال حدوث الحادث A هو عدد نقاط المواتية للحادث A على مجموع نقاط الفضاء العيني S

ولنبدأ بالإجابة على الأسئلة التالية:

اذا اختير شخص عشوائيا فما احتمال

1)أن يكون دمه من النوع A

2)أن تكون فيه شدة المرض بسيطة

3)أن يكون دمه من النوع A وشدة مرضه بسيطة

الحل: 1) لاحظ أن عدد الأشخاص الذين دمهم من النوع A هي 615 فاحتمال أن يكون الشخص المختار عشوائيا من الذين دمهم من النوع A هو0,41 = $p(a) = \frac{615}{1500}$

2) واحتمال أن يكون الشخص المختار عشوائيا تكون اصابته بالمرض البسيطة

3)واحتمال أن يكون دمه من النوع A وشدة مرضه بسيطة

والآن اذا فرضنا أن شدة المرض ونوع الدم مستقلين عن بعضهما البعض فان احتمال الإصابة تكون بسيطة والدم من النوع A يساوي حاصل ضرب احتمال أن تكون الإصابة بسيطة P(b) في احتمال أن يكون نوع الدم P(a) A وهذا يساوي

P(a)XP(b)=0,41X0,88=0,3608

لاحظ أن هذا الاحتمال لا يساوي بالضبط قيمة الاحتمال المحسوب P(c) ولكنه قريب منه، وهذا الاحتمال يعني أننا نتوقع أن يكون عدد الأشخاص الذين اصابتهم بسيطة ودمهم من النوع Aيساوي

للاحظ أن هذا الاحتمال لا يساوي بالضبط قيمة الاحتمال المحسوب P(c) ولكنه قريب منه، وهذا الاحتمال يعني اننا نتوقع أن يكون عدد الأشخاص الذين أصابتهم بسيطة ودمهم من النوع A يساوي

في حين أن عدد الأشخاص الذين شاهدهم الفريق الطبي في هذه الفئة يساوي 543، لاحظ أن هذين العددين أيضا متقاربين

تقوم فلسفة اختبار كافي تربيع للاستقلال على إيجاد مقياس لهذه الأخطاء الناجمة عن تقريب القيم المشاهدة بالقيم المتوقعة بغرض الاستقلال. وهذا المقياس هو

الأفراد المتوقع تواجدهم في السطر j والعمود الذي ترتيبه iحيث عدد المشاهدات في السطر الذي ترتيبه بغرض الاستقلال.وللحكم فيما اذا كانت فرضية الاستقلال مقبولة أم j والعمود الذي ترتيبه iالذي ترتيبه كبيرة فان هذا يعني أن الأخطاء كبيرة وعليه U^2 صغيرة أم كبيرة، فاذا كانت U^2لأننا نقدر فيما اذا كانت صغيرة فان هذه الأخطاء قليلة وعليه فالاستقلال مقبول.U^2فالاستقلال مرفوض أما اذا كانت

ولتقدير صغر U^2 أو كبرها فإننا نقارنها بالعدد

حيث r عدد الأسطر

C عدد الأعمدة في جدول التوافق

فاذا أخذنا الدول السابق نستطيع أن نبين أن قيم .... يمكن ترتيبها في الجدول التالي:

نوع الدم/ شدة الاصابة	A	B	AB	O	المجموع
بسيطة	541,2	212,96	92,40	473,44	1320
متوسطة	43,05	16,94	7,35	37,66	105
شديدة	30,75	12,10	5,25	26,90	75
المجموع	615	242	105	538	1500

يمكن ملء الجدول السابق بشكل بسيط على النحو التالي:

أي مجموع العمود مضروبا في مجموع السطر على المجموع الكلي

وهكذا...

وبالتالي فان:

$$U2 = \frac{(543 - 54}{541,2}$$

$$\frac{(31 - 26,90)^2}{26,90} = 5$$

لاحظ أن 3 = 5 و 4 = cو نأخذ5% =∝

من الجدول المرفق نجد أن:

X

درجة الحدية مستوى الثقة

الاستنتاج: لما كانت[0,95; 6] X^2 2 U

فإننا لا نستطيع رفض الفرضية القابلة بالاستقلال المتغيرية ونستنتج أن لا علاقة بين نوع الدم وشدة الإصابة بهذا ا لمرض لنلخص هذا الاختبار بالنظرية التالية:

نظرية: اذا صنفت مجموعة من المشاهدات وفق أسلوبين أحدهما X والثانيY في جدول توافق مدخلاته.... وأردنا اختبار الفرضية M القابلة بأن X و لا مستقلات مقابل الفرضية M_1القائلة بأنهما غير مستقلين فإننا نرفض M_1 الى مستوى الدلالة d اذا كان

تمرين 1:

الجدول أدناه يلخص استقصاء عما اذا كان للأقدمية في العمل تأثير على عدد مرات الترقية داخل مؤسسة ما، والمطلوب اختبار عند مستوى معنوية 5% صحة الفرضية القائلة "أن عدد مرات الترقية مستقل عن الأقدمية في المنصب

الأقدمية/ عدد الترقية.....	5-0	10-5	15-10	أكثر من 15	المجموع
مرة واحدة	08	10	10	08	36
مرتين	16	20	12	08	56
ثلاث مرات	24	30	18	14	86
أكثر من ثلاث مرات	32	50	60	40	182
المجموع	80	110	100	70	360

حل التمرين:

*صياغة الفرضية

Ho: عدد مرات الترقية مستقل عن الأقدمية في المنصب

H^1:عدد مرات الترقية غير مستقل عن الأقدمية في المنصب

*بناء جدول القيم المتوقعة U^2

الأقدمية/ عدد الترقية.....	5-0	10-5	15-10	أكثر من 15	المجموع
مرة واحدة	08	11	10	07	36
مرتين	12,44	17,11	15,55	10,89	56
ثلاث مرات	19,11	26,28	23,89	16,72	86
أكثر من ثلاث مرات	40,44	55,61	50,56	35,39	182
المجموع	80	110	100	70	360

*حساب المعامل U^2

$U^2 =$

$$+\frac{(16-12,44)^2}{12,44}+\frac{(20-17,11)^2}{17,11}+\frac{(12-15,55)^2}{15;55}+\frac{(8-10,89)^2}{10,89}+\cdots\dots.+\frac{(40-35,39)^2}{35,35}=11,6810$$

***إيجاد X^2النظري:** من الجدول المرفق نجد:

$X^2[($

بما أن $U^2<X^2$ فإننا نقبل بالفرضية الصفرية أي أن عدد مرات الترقية مستقل عن الأقدمية في المنصب ونرفض الفرضية M2 عند مستوى معنوية5%=X

تمرين2:

الجدول أدناه يلخص مستوى أداء عينة من الطلبة في مقياس الإحصاء ومستوى أدائهم في مقياس المنهجية

والمطلوب: اختبار عند مستوى معنوية 1% فيما اذا كان مستوى أداء الطالب في الإحصاء مستقل عن مستوى أدائه في المنهجية

الأحصاء/ المنهجية	مرتفع	متوسط	منخفض
مرتفع	56	71	12
متوسط	47	163	38
منخفض	14	42	85

الحل: *صياغة الفرضية

Mo:متغير مستوى أداء الطالب في الإحصاء مستقل عن مستوى أدائه في المنهجية

H^1:متغير مستوى أداء الطالب في الإحصاء غير مستقل عن مستوى أدائه في المنهجية

*بناء جدول ا لقيم المتوقعة

الأحصاء/ المنهجية	مرتفع	متوسط	منخفض	المجموع
مرتفع	30,80	72,66	35,54	139
متوسط	54,95	129,64	63,41	248
منخفض	31,24	73,70	36,05	141
المجموع	117	276	135	528

حساب المعاملU^2

$\bigcup$

$\bigcup 2 = 145,77$

إيجاد X^2 النظري

$X^2[($

*الاستنتاج: لما كانت $X^2 < U^2$ فاننا نرفض Ho القائلة بأن مستوى أداء الطالب في الإحصاء مستقل عن مستوى أدائه في المنهجية ويمكن أن نقبل بالفرضية القائلة عكس ذلك عند مستوى معنوية 1%