CHAPITRE 3

Equations différentielles du premier ordre

1. Equations différentielles quelconques

DEFINITION 13. *Une équation de la forme*

$$F(x, y, y') = 0$$

où y qui est en fonction de x est l'inconnu, s'appelle équation différentielle du premuier ordre.

1.1. Equations séparables. Elles sont de la forme

$$y'f(y) = g(x).$$

La solution générale est donnée par

$$\int f(y)dy = \int g(x)dx \text{ (car } y' = \frac{dy}{dx}).$$

EXEMPLE. Intégrer les équations suivantes

$$\begin{aligned}(y^2+1)\,y' &= x+1\\ (x-1)\,y' + \sqrt{1-y^2} &= 0\end{aligned}$$

1.2. Equations homogènes. Elles sont de la forme

$$y' = F(\frac{y}{x}).$$

La solution générale est donnée par

$$x = Ce^{G(\frac{y}{x})}$$

où $C \in \mathbb{R}$ et $G(t) = \int \frac{dt}{F(t)-t}$ (pour la montrer on pose $y = tx \Longrightarrow dy = tdx + xdt$).

EXEMPLE .

2. Equations linéaires

Elles sont de la forme

$$y' + yf(x) = g(x). \tag{1}$$

2.1. Intégration de l'équation homogène (i.e., sans second membre).

$$y' + yf(x) = 0.$$

C'est une équation à variables séparables. La solution générale est donnée par

$$y = C\underbrace{\mathrm{e}^{-\int f(x)dx}}_{y_1}, \quad C \in \mathbb{R}.$$

2.2. Intégration de l'équation complète (1).

$$\underbrace{y_G}_{\text{S. générale de (1)}} = \underbrace{y}_{\text{S. générale de (1) sans 2ème membre}} + \underbrace{y_0}_{\text{S. particulière de (1)}}$$

Comment trouver y_0 ?
* Par constataion à l'oeil nu.
Sinon
* Par la méthode de variation de constantes.
Méthode de variation de constantes.
On pose $y_0(x) = C(x)y_1(x)$. Après calcul, on trouve $y_0(x) = \mathrm{e}^{-\int f(x)dx} \cdot \int g(x)\mathrm{e}^{\int f(x)dx}dx$.

EXEMPLE. Intégrer $xy' - 2y = x$ ($-x$ solution particulière).
$(1 - x^2)y' - xy = x$.

2.3. Equations de Bernoulli. Elles sont de la forme

$$y' + yf(x) = y^\alpha g(x).$$

* $y = 0$, c'est une solution particulière.
* $\alpha = 0$, équation linéaire complète.
* $\alpha = 1$, équation linéaire sans second membre.
* $\alpha \neq 0, \alpha \neq 1, y \neq 0$; on pose $z = y^{1-\alpha}$. On aura, $\frac{1}{1-\alpha}z' + zf(x) = g(x)$. On est dans le cas linéaire.

EXEMPLE. Intégrer
1. $xy' - y = y^2 \ln x$.
2. $xy' - y = \sqrt{y}$.

3. Equations linéaires à coéfficients constants

Elles sont de la forme

$$(2) \qquad ay'' + by' + cy = f(x).$$

où $a, b, c \in \mathbb{R}$.

3.1. Equations homogène (i.e., $f(x) = 0$). On cherche la solution générale sous la forme, $y = e^{rx}$. On remplace y par e^{rx} dans (2) sans le second membre, on aura

$$e^{rx}\left(ar^2 + br + c\right) = 0 \Longleftrightarrow \underbrace{ar^2 + br + c}_{\text{équation caractéristique } (*)} = 0.$$

3.1.1. (*) *Admet deux racines réelles r_1 et r_2 distinctes.*
Soit $y_1 = e^{r_1x}$ et $y_2 = e^{r_2x}$. La solution générale de l'équation (2) sans second membre est

$$y = C_1y_1 + C_2y_2; \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

3.1.2. *r_1 et r_2 complexes.*
$r_1 = \alpha + i\beta$, $r_2 = \alpha - i\beta$. La solution générale de l'équation homogène est

$$\begin{aligned} & e^{\alpha x}\left(C_1 \cos\beta x + C_2 \sin\beta x\right) \\ = \; & C_1e^{\alpha x}\cos\beta x + C_2e^{\alpha x}\sin\beta x \\ = \; & C_1y_1 + C_2y_2; \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

3.1.3. (*) *Admet une racine double.*
La solution est de la forme, $y = z(x)e^{rx}$. On remplace y par sa valeur dans (2) sans le second membre, on trouve $z = C_1x + C_2$, C_1 et C_2 dans $\mathbb{R}$. La solution générale de l'équation homogène est

$$\begin{aligned} & C_1xe^{rx} + C_2e^{rx} \\ = \; & C_1y_1 + C_2y_2; \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

3.2. Equation complète (i.e., $f(x) \neq 0$).

$$\underbrace{y_G}_{\text{S. générale de (2)}} = \underbrace{y}_{\text{S. générale de (2) sans 2ème membre}} + \underbrace{y_0}_{\text{S. particulière de (2)}}$$

3.2.1. *Cas où $f(x) \in R_n[X]$.*
- $c \neq 0$. On remplace y par un polynôme de degré n, puis on identifie.

- $c = 0, b \neq 0$. On remplace y par un polynôme de degré $n+1$, puis on identifie.
- $c = 0, b = 0, a \neq 0$. On intègre deux fois de suite $f(x)$.

3.2.2. *Cas où* $f(x) = e^{\alpha x} P_n(x)$.

On cherche la solution particilière en posant $y = e^{\alpha x} P(x)$ (P polynôme quelconque). (2) s'écrit

$aP'' + P'(2\alpha a + b) + P(a\alpha^2 + b\alpha + c) = P_n(x)$.

On est dans le premier cas.

3.2.3. *Cas où* $f(x) = A\cos\alpha x + B\sin\alpha x; \alpha, A$ *et* B *dans* $\mathbb{R}$.

- $i\alpha$ n'est une racine de l'équation caractéristique. On cherche y_0 sous la forme

$$y_0 = A'\cos\alpha x + B'\sin\alpha x.$$

- $i\alpha$ est une racine de l'équation caractéristique (nécesserement simple). On cherche y_0 sous la forme

$$y_0 = x\,(A'\cos\alpha x + B'\sin\alpha x)\,.$$

Dans le cas général, pour intégrer l'équation (2), on applique la méthode de variation des constantes.

Soit y la solution générale de (2) sans le second membre ($\Longrightarrow y = C_1 y_1 + C_2 y_2$).

Recherche d'une solution particulière par le méthode de variation des constantes. On pose

$y = C_1(x)\, y_1(x) + C_2(x)\, y_2(x)$ avec $C_1'(x)\, y_1 + C_2'(x)\, y_2 = 0$.

Après calcul, on trouve

$$\begin{aligned} & ay_0'' + by_0' + cy_0 \\ = {} & C_1\underbrace{(ay_1'' + by_1' + cy_1)}_{=0} + C_2\underbrace{(ay_2'' + by_2' + cy_2)}_{=0} \\ & + C_1'(x)\, y_1'(x) + C_2'(x)\, y_2'(x) \\ = {} & f(x). \end{aligned}$$

On aura donc deux équations à deux inconnues

$$\begin{cases} C_1'(x)\, y_1(x) + C_2'(x)\, y_2(x) &= 0 \\ C_1'(x)\, y_1'(x) + C_2'(x)\, y_2'(x) &= f(x) \end{cases}$$

Ce système a une et une seule solution car y_1 et y_2 sont linéairement indépendants.

$\Longrightarrow C_1(x)$ et $C_2(x)$.

EXEMPLE

Intégrer $y'' + y = x\sin x$.

1- $y'' + y = 0 \Longrightarrow y = C_1\underbrace{\sin x}_{y_1} + C_2\underbrace{\cos x}_{y_2}$.

$(r^2 + 1 = 0 \Longleftrightarrow r_1 = i, r_2 = -i)$

2-

$$\begin{cases} C_1'(x)\sin x + C_2'(x)\cos x &= 0 \\ C_1'(x)\cos x - C_2'(x)\sin x &= x\sin x \end{cases}$$
$\Longleftrightarrow$
$$\begin{cases} C_1'(x) &= \frac{1}{2}x\sin x \\ C_2'(x) &= x\sin^2 x \end{cases}$$
$\Longrightarrow$ (intégration par parties)
$$\begin{cases} C_1(x) &= -\frac{1}{4}x\cos 2x + \frac{1}{8}\sin^2 x + C_1 \\ C_2(x) &= -\frac{1}{4}\left(x\sin 2x + \frac{1}{2}\cos 2x - x^2\right) + C_2 \end{cases}$$
$$\begin{aligned} & y_G \\ = \; & C_1\sin x + C_2\cos x + C_1(x)\sin x + C_2(x)\cos x \\ = \; & \tfrac{\sin x}{4}\left(-x\cos 2x + \tfrac{1}{2}\sin^2 x + C_1\right) - \tfrac{\cos x}{4}\left(x\sin 2x + \tfrac{1}{2}\cos 2x - x^2 + C_2\right) \end{aligned}$$
C_1 et C_2 dans $\mathbb{R}$.