Cours / TD PHELMA Equations Différentielles
OBJECTIFS

Objectifs du cours :

Il s'agit d'un cours de math appliqué à la physique et aux sciences pour l'ingénieur.
Les objectifs de ce cours sont de :

1. pratiquer à nouveau les calculs élémentaires de mathématique ;
2. revoir les méthodes de base de résolution d'équations différentielles linéaires et non linéaires ;
3. découvrir la méthode de résolution des équations différentielles linéaires par séries entières généralisés (avec application aux polynômes de Legendre et aux fonctions de Bessel) ;
4. découvrir la méthode de séparation de variable pour résoudre quelques équations aux dérivées partielles simples.

Consignes pour le bon découlement de l'enseignement :

Cette année, il n'y aura pas de séances de cours. C'est à vous de revoir les notions de résolution d'équations différentielles, à partir des notes manuscrites, et de livres si nécessaire.

- **Vous devez connaitre les résultats des deux premiers chapitres du cours par cœur**.
- Les deux dernières parties sont nouvelles pour vous, il faut les connaitre les principaux résultats, et savoir les mettre en œuvre. Les formules sur Bessel et Legendre ne sont pas à connaitre par cœur.
- **Vous devez lire les chapitres du cours correspondant avec chaque TD**, afin de pouvoir mieux suivre le TD et poser des questions sur les parties du cours correspondantes.
- **Vous devez lire et commencer à chercher les TD avant chaque séance**.

Bibliographie :

- Tout bon ouvrage de mathématique niveau prépa pour les trois premiers chapitres,
- « Mathematical methods in the physical sciences » Mary L Boas (Wiley),
- « Cours de mathématiques pour la physique » de Y. Ayant (Dunod),
- Schaum's easy outlines « differential equations » McGraw-Hill,
- « Compléments de mathématiques : à l'usage des ingénieurs de l'électrotechnique et des télécommunications », par André Angot (Dunod)

Contenu des Travaux Dirigés :

- TD1 : Exercices d'application du cours, exemple de résolution d'une équation différentielle du 1^{ier} ordre dans un contexte physique (loi de Mott et Gurney). (**Prérequis : Chapitre 1 du cours**)
- TD2 : Exercices d'application du cours, exemple de résolution d'une équation différentielle du $2^{ième}$ ordre dans un contexte physique (Charge accumulée à la surface d'un semiconducteur). (**Prérequis : Chapitre 2 du cours**)
- TD3 : Résolution d'équation aux dérivées partielles par la méthode de séparation de variable.
- TD4 : Exemple d'applications des fonctions de Bessels dans un contexte physique : fibre optique (**Prérequis : Chapitre 3 du cours**)
- TD5 : Exemple d'applications des polynômes de Legendre dans un contexte physique : Champ électrostatique créé par une sphère conductrice. (**Prérequis : Chapitre 4 du cours**)

<u>Contenu du cours :</u>

I Rappel sur les équations différentielles (ordinaires) linéaires et non linéaires du premier ordre.

- Définition des équations différentielles (linéaires, non linéaires, forme résolue ou implicite)
- Résolution des équations linéaires du premier ordre, avec second membre
- Equations du premier ordre non linéaire remarquables
  - A variable séparée
  - Equations homogènes
  - Equation de Bernouilli
  - Equations aux différentielles totales

II Rappel sur les équations différentielles (ordinaires) linéaires et non linéaires du second ordre.

- Résolution des équations linéaires du second ordre, à coefficient constants sans second membre, et méthodes de recherche d'une solution particulière.
- Autres astuces pour résoudre les équations linéaires du second ordre
  - Connaissant une solution de l'équation sans second membre
  - Pour déterminer une solution particulière connaissant les solutions de l'équation sans second membre
- Equations du second ordre non linéaire remarquables

III Fonctions de Bessel.

- Recherche de solutions d'une équation différentielle linéaire du second ordre sans second membre par série généralisée
- Application à l'équation de Bessel, cas où p est entier ou demi entier.
- Propriétés des fonctions de Bessel
  - Relation de récurrence
  - Orthogonalités des fonctions de Bessel
  - Allure des fonctions de Bessel et comportement asymptotique

IV Polynomes de Legendre et Fonctions de Legendre associées (Harmonique Sphérique).

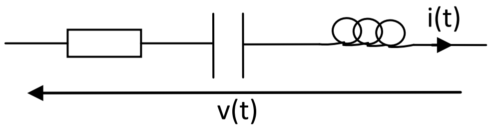
- Equations différentielles de Legendre
- Formule de récurrence, Formule de Rodrigues, orthogonalités (non démontrés)
- Fonction génératrice
- Fonctions de Legendre associées

Introduction sur la nécessité de ce cours

La physique, la biologie et les sciences pour l'ingénieur nécessitent de savoir résoudre une grande variété d'équations différentielles, c'est-à-dire une équation dont une fonction est l'inconnue, et qui relie cette fonction et ses variations.

Exemples :

- Principe fondamental de la dynamique :
  $m\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \sum \vec{F}$,
  $\vec{r}(t)$ trajectoire d'un point matériel
  $\vec{F}$ forces appliquées
- Transitoire d'un circuit RLC :



$$v(t) = Ri(t) + \frac{q(t)}{C} + L\frac{di}{dt}$$

v(t) tension aux bornes du circuit RLC
i(t) courant le traversant
q(t) charge

Si la fonction a une seule variable, on parle d'une *équation ordinaire*. Pour une fonction de plusieurs variables, d'une *équation aux dérivées partielles*.

Exemple :

- Equation de conservation de la charge

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + div(\vec{j}) = 0$$

$\rho(\vec{r}, t)$ densité volumique de charge (Cm^{-3})
$\vec{j}(\vec{r}, t)$ densité de courant ($A.m^{-2}$)

Il s'agit donc de revoir les méthodes de résolution des équations différentielles « simples » et de découvrir d'autres méthodes utiles pour résoudre certaines équations ordinaires plus complexes ou aux dérivées partielles.

Evidemment, la plupart des équations différentielles ne se résolvent pas i.e n'ont pas de solution analytique. Elles nécessitent d'être résolues numériquement. Néanmoins, si, grâce aux progrès de l'informatique et des méthodes numériques, il est possible de calculer des solutions à un problème donné avec une très bonne précision, dans la plupart des cas, **les solutions analytiques permettent mieux de comprendre et d'interpréter les résultats**.
Pour cela, elles sont toujours préférées aux solutions numériques, quand elles existent. Enfin, la manipulation et la mise en œuvre des codes informatiques étant délicate, il est souvent nécessaire, voire indispensable, de vérifier la validité d'un code, et de son utilisation, en comparant avec une solution analytique en simulant un cas d'école.

Enfin, ce cours n'est pas un cours de mathématiques, mais plutôt un cours de méthodes de calcul pour la physique et les sciences de l'ingénieur. Nous nous excusons par avance de son manque de rigueur mathématique car l'effort portera surtout sur l'apprentissage de méthodes de calcul. Un certain nombre de résultats ne seront pas démontrés.

Chapitre 1 : Rappel sur les équations différentielles (ordinaires) linéaires et non linéaires du premier ordre

I. Quelques définitions

Une *équation différentielle* est une relation entre une ou plusieurs fonctions inconnues et leurs dérivées.

$$F(x, y, y', \dots y^n) = 0$$

Si les fonctions inconnues sont des fonctions d'une seule variable, on parle d'*équations ordinaires*, sinon d'*équations aux dérivées partielles (EDP)*.

L'*ordre d'une équation* est le degré maximal de différenciation auquel l'une des fonctions est soumise.

On dit qu'une équation est mise sous forme *résolue* quand on peut la mettre sous la forme

$$y^{(n)} = G(x, y, y', \dots y^{(n-1)})$$

Dans le cas contraire, on dit qu'elle est sous forme *implicite*. Les méthodes que l'on verra en cours portent, sauf exception, sur la résolution d'équations résolues. On doit donc chercher dans la mesure du possible à la mettre sous cette forme, ce qui peut poser des problèmes.

Exemple :

- $(1 - x^2)y' + xy + 1 = 0$ (forme implicite)
  admet pour forme résolue : $y' = \frac{xy+1}{x^2-1}$
  seulement sur $]-\infty; -1[$ ou $]-1; 1[$ ou $]1; +\infty[$
  On trouve des solutions sur chacun des trois intervalles mais la seule solution C^1 (continue, dérivable et de dérivée continue) est y = -x sur $]-\infty; +\infty[$.

Enfin, une équation différentielle est *linéaire* (en fait affine) quand F est linéaire (affine) pour $y, \dots y^{(n)}$.
En conséquence, F est de la forme :

$$F\left(x, y, y', \dots y^{(n)}\right) = \sum_{k=0}^{n} a_k(x) y^{(k)}$$

Et toute combinaison linéaire des solutions est également solution de l'équation.

Exemples :

- $y'' + xy = 0$ est linéaire
- $m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx - f\frac{dx}{dt}$ est linéaire
- Mais $m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx - f\left(\frac{dx}{dt}\right)^2$ ne l'est pas

II. Résolution des équations linéaires du premier ordre

Il s'agit d'équations de la forme :

y' = a(x)y + b(x) équation (E)

II.1 Méthode générale

Pour résoudre ce type d'équation, on commence par étudier *l'équation sans second membre (ESSM)* : y' = a(x)y. On recherche ensuite une *solution particulière (SP)* de l'équation avec second membre.

Si y_1 et y_2 sont deux solutions de l'équation (E), alors :

$(y_2-y_1)' + a(x)(y_2-y_1) = 0$

Donc y_2-y_1 est une solution de l'ESSM, notée ϕ.

$y_2-y_1=\phi$ et $y_2=y_1+\phi$

Si on sait déterminer les solutions ϕ de l'ESSM et si on connait une solution particulière y_1 de (E), on peut donc déterminer y_2. Réciproquement, si $y_2 = y_1 + \phi$, y_2 est bien solution de l'équation globale (E). Il est donc nécessaire de savoir trouver toutes les solutions de l'ESSM.

II.2 Relation entre deux solutions de l'ESSM

Soient y_1 et y_2 deux solutions non nulles de y' = a(x)y, alors :

$y_1y_2' - y_2y_1' = y_1a(x)y_2-y_2a(x)y_1 = 0$

soit $\begin{vmatrix} y_1' & y_2' \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix} = 0$

Ce déterminant est appelé Wronskien, du nom du mathématicien polonais Wronski (1778-1853).

Il existe alors une constante A telle que : $\begin{pmatrix} y_1' \\ y_1 \end{pmatrix} = A\begin{pmatrix} y_2' \\ y_2 \end{pmatrix}$, soit $y_1 = Ay_2$

Les solutions d'une ESSM du premier ordre sont donc colinéaires. Elles sont donc de la forme Ay_0, A étant une constante fixée par les conditions aux limites et y0 une solution de l'ESSM.

II.3 Méthode pour déterminer les solutions de l'ESSM

$\frac{dy}{dx} = a(x)y$ donc $\frac{dy}{y} = a(x)dx$

En conséquence, $\ln(|y|) = \int a(x)dx + B$ soit,

$y = Cexp(\int a(x)dx)$.

Cette méthode s'appelle méthode de *séparation des variables*.

II.4 Méthode pour déterminer une solution particulière

S'il n'y a pas de solution évidente, on peut chercher des solutions sous la forme :

$y(x)=C(x)y_0(x)$

où C est une fonction à déterminer et y_0 une solution de l'ESSM.

Dans ce cas,

$y' = C'y_0 + Cy_0'$

et y' = ay + b devient $C'y_0 + Cy_0' = aCy_0 + b$

Or y0' - ay0 = 0 donc C'y0 = b d'où :

$C = \int \frac{b(u)}{y_0(u)}du + D$ et $y(x) = y_0(x)\int \frac{b(u)}{y_0(u)}du$ est une solution particulière.

Cette méthode s'appelle la *méthode de variation de la constante*.

On sait donc toujours trouver une solution particulière analytique à une équation différentielle linéaire du premier ordre.

III. Equations du premier ordre non linéaires remarquables

Il n'y a pas de méthode générale pour résoudre une équation différentielle du premier ordre non linéaire. On sait en revanche résoudre quelques cas particuliers.

III.1 Equations à variables séparées

Il s'agit d'équation du type :

y'=G(x,y) avec G(x,y)=A(x)*B(y)

Dans ce cas,

$$\frac{dy}{B(y)} = A(x)dx$$

Il faut ensuite intégrer chaque membre.

Exemple :

- o $(1 + x^2)y' = 1 + y^2$, 1 + x > 0
  donc $\frac{y'}{1+y^2} = \frac{1}{1+x^2}$
  et en intégrant, arctan(y) = arctan(x) + c
  soit, y = tan(arctan(x) + c)

III.2 Equations homogènes

Il s'agit des équations du type :

y'=$f(x,y) = g(\frac{y}{x})$

On effectue un changement de fonction inconnue

y(x) = u(x)x

On a alors y' = u + xu'=g(u)

On est revenu à une équation à variables séparées :

$$\frac{du}{g(u)-u} = \frac{dx}{x}$$

Exemple :

- o $xy' - y + xe^{y/x} = 0$
  Cette équation est sous forme résolue sur $]-\infty; 0[$ ou $]0; +\infty[$
  En posant y(x) = u(x)x, on a
  $u + xu' - u + e^u = 0$
  soit $u'e^{-u} = 1/x$ et $e^{-u} = \ln(|x|) + a$, a une constante
  On doit donc avoir :
  ln(|x|) + a >0
  et u = -ln(ln(|x|) + a)
  puis y = -x ln(ln(|x|) + a)

III.3 Equation de Bernoulli

Ce type d'équations tient son nom du physicien et mathématicien suisse Bernoulli (1654-1705)

Il s'agit d'équations de la forme :

$y' + P(x)y = Q(x)y^m$

les cas m=0 et m=1 correspondent aux équations linéaires

On effectue le changement de fonction inconnue :

$z(x) = y^{1-m}(x)$

Alors, $z'(x) = (1-m)y'y^{-m}$

On multiplie l'équation différentielle par $(1-m)y^{-m}$ et on obtient :

$z' + (1-m)P(x)z = (1-m)Q(x)$

C'est une équation linéaire.

III.4 Equations aux différentielles totales

Il s'agit d'équations de la forme :

$P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0$

avec $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$

Dans ce cas il existe une fonction F(x,y) telle que :

$P = \frac{\partial F}{\partial x}\ et\ Q = \frac{\partial F}{\partial y}$

L'équation différentielle peut alors se mettre sous la forme :

$dF = Pdx + Qdy = 0$

soit, $F(x,y(x)) = Constante$

C'est à partir de cette dernière équation que l'on détermine y(x).

Remarque :

Si $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} = 0\ (ou = constante)$, la méthode précédente s'applique mais c'est inutile puisque l'équation est à variables séparées.

En effet, $\frac{\partial P}{\partial y} = 0$ implique que P ne dépend pas de x mais seulement de y. De même, Q ne dépendra pas de y mais que de x. L'équation différentielle devient :

$P(x)dx = -Q(y)dy$

Exemple :

- $xy' + yln(y) = 0$

  L'équation est résolue sur $]-\infty; 0[$ ou $]0; +\infty[$.

  y doit être strictement positive.

  Première méthode :

  $$\frac{y'}{yln(y)} = \frac{-1}{x}$$

  Donc $\ln(|\ln(y)|) = -\ln(|x|) + a$

  D'où $\ln(y) = b/x$ et $y = e^{b/x}$

  Seconde méthode

  $xy' + yln(y) = 0$

  soit $yln(y)dx + xdy = 0$

  On pose $P(x,y)=yln(y)$ et $Q(x,y)=x$

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = 1 \; et \; \frac{\partial P}{\partial y} = \ln(y) + y * \frac{1}{y}$$

Cette équation n'est pas à différentielles totales.

En revanche, si on pose P(x,y) = ln(y) et Q(x,y) = x/y,

$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{1}{y} \; et \; \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{1}{y}$.

Sous cette forme ça marche.

On recherche donc F tel que :

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \ln(y) \; et \; \frac{\partial F}{\partial y} = \frac{x}{y}$$

La première équation donne :

F(x,y) = xln(y) + A(y)

La seconde permet de déterminer A(y) :

$\frac{\partial F}{\partial y} = \frac{x}{y} + A'(y) = \frac{x}{y}$ d'où A = Constante

On cherche donc y telle que :

xln(y) = B, soit y = $e^{B/x}$

Chapitre 2 : Rappel sur les équations différentielles (ordinaires) linéaires et non linéaires du second ordre

Contrairement au premier ordre, il n'existe pas de méthode générale pour résoudre à coup sûr une équation différentielle dite linéaire du second ordre. En revanche, pour une équation linéaire, il est toujours possible de chercher séparément les solutions générales de l'ESSM et une solution particulière (SP).

On peut déterminer les solutions d'une équation différentielle ordinaire (EDO) linéaire du second ordre :

- Si l'ESSM est à coefficients constants (et ce même avec un second membre)
- Si on connait une solution de l'ESSM (une solution « évidente »)
- Ou par des méthodes plus sophistiquées comme les transformées de Fourrier ou de Laplace, la recherche de solutions sous la forme de séries entières généralisées. On étudiera cette méthode plus en détail dans la suite du cours.

I. Résolution des équations linaires du second ordre à coefficients constants

On cherche ici à résoudre :

$y'' + 2\lambda y' + \Omega y = F(x)$ où λ et Ω sont des constantes

I.1 Résolution de l'ESSM

On cherche à résoudre :

$y'' + 2\lambda y' + \Omega y = 0$

Dans ce cas, il faut d'abord factoriser le polynôme du second ordre $X^2 + 2\lambda X + \Omega$ en cherchant ses racines.

S'il y a **2 racines réelles** distinctes x_1 et x_2,

On peut le mettre sous la forme :

$(X-x_1)(X-x_2)$

Donc l'équation peut se mettre sous la forme :

$$\left(\frac{d}{dx} - x_1\right)\left(\frac{d}{dx} - x_2\right)y = 0$$

$\left(\frac{d}{dx} - x_2\right)y = 0$ donne une solution que l'on trouve en résolvant $y'-x_2y=0$ soit,

$$y = Ae^{x_2x}$$

De même, $y = Be^{x_1x}$ est aussi une solution.

Si $x_1 \neq x_2$, on obtient deux solutions indépendantes, pour une équation d'ordre 2. La forme générale des solutions dans ce cas est de

$$y = Ae^{x_2x} + Be^{x_1x}$$

S'il y a **une racine double** x_1, on a :

$$\left(\frac{d}{dx} - x_1\right)^2 y = 0$$

On pose alors $u = \frac{dy}{dx} - x_1 y$. On a alors :

$u' - x_1 u = 0$

soit $u = Ae^{x_1 x}$

On doit alors résoudre :

$y' - x_1 y = Ae^{x_1 x}$ (1^er ordre)

Soit $y = Be^{x_1 x} + y_{sp}$

Il reste à déterminer une solution particulière y_{sp}. On applique la méthode de la variation de la constante et l'on recherche y_{sp} sous la forme :

$y_{sp} = B(x)e^{x_1 x}$

Soit $B'(x) = A$

On obtient finalement, comme solution générale dans ce cas :

$y = (Ax + B)e^{x_1 x}$

Enfin, s'il y a **deux racines complexes** x_1 et x_2 :

Pour λ et Ω réels, ces deux racines sont nécessairement complexes conjuguées :

$x_{1/2} = -\lambda \pm i\sqrt{\Omega - \lambda^2}$

Les solutions générales dans $\mathbb{C}$ sont :

$y = Ae^{x_2 x} + Be^{x_1 x}$ où A et B sont complexes.

Elles peuvent se réécrire :

$y = e^{\lambda x}\left(Ae^{-i\delta x} + Be^{i\delta x}\right)$ avec $\delta = \sqrt{\Omega - \lambda^2}$

Nous recherchons des solutions réelles i.e. telles que $y = \bar{y}$, donc

$A = \bar{B}$, c'est-à-dire,

$y = e^{-\lambda x}\left(Ae^{i\delta x} + \bar{A}e^{-i\delta x}\right)$

$y = 2|A|e^{\lambda x}cos(\delta x - \varphi)\ avec\ A = |A|e^{i\varphi}$

Au final, les solutions générales dans ce cas sont de la forme :

$y = ae^{\lambda x}cos(\delta x - b)\ avec\ \delta = \sqrt{\Omega - \lambda^2}$

Ou bien encore $y = e^{\lambda x}[acos(\delta x) + bsin(\delta x)]\ avec\ \delta = \sqrt{\Omega - \lambda^2}$

où a et b sont des constantes réelles à déterminer.

I.2 Recherche d'une solution particulière

On verra par la suite des méthodes de recherche de solutions particulières pour des équations à coefficients constants ou non. Pour les équations à coefficients constants, nous détaillons ici quelques techniques propres. On pourra aussi se référer au paragraphe II-2.

Cas où le second membre est de la forme $\mathbf{P_n(x)e^{cx}}$ où P_n est un polynôme de degré n.

Si **c n'est pas racine** de $X^2 + 2\lambda X + \Omega$,

on cherche une solution particulière de la forme :

$y_{sp}(x) = Q_n(x)e^{cx}$

où Q_n est un polynôme de degré n à déterminer

Si c est une **racine simple** de $X^2 + 2\lambda X + \Omega$,

on cherche une solution particulière de la forme :

$y_{sp}(x) = xQ_n(x)e^{cx}$

où Q_n est un polynôme de degré n à déterminer

Si c est une **racine double** de $X^2 + 2\lambda X + \Omega$,

on cherche une solution particulière de la forme :

$y_{sp}(x) = x^2Q_n(x)e^{cx}$

où Q_n est un polynôme de degré n à déterminer

Cas où le second membre est de la forme **ksin(αx) (resp. kcos(αx))**.

On cherche une solution particulière de la forme :

$Im(Ae^{i\alpha x})$ (resp. $Re(Ae^{i\alpha x})$)

Méthode générale par intégrations successives.

Comme précédemment, on doit résoudre :

$$\left(\frac{d}{dx} - x_1\right)\left(\frac{d}{dx} - x_2\right) y = F(x)$$

On pose

$u = y' - x_2 y$

on a alors :

$u' - x_1 u = F(x)$

Il s'agit d'une équation différentielle du premier ordre que l'on résoudre. Puis, connaissant u, on doit résoudre :

$y' - x_2 y = u(x)$

Il s'agit à nouveau d'une équation différentielle du premier ordre.

Cette méthode marche bien mais peut vite donner beaucoup de calculs.

II. Autres astuces pour résoudre les équations différentielles linéaires du second ordre

On cherche ici à résoudre :

$y'' + a(x)y' + b(x)y = c(x)$

II.1 Résolution de l'équation connaissant une solution de l'ESSM

On connait u tel que :

$u'' + a(x)u' + b(x)u = 0$

On pose $y = u*z$ et on cherche z.

$y' = u'z + z'u$

$y'' = u''z + 2z'u' + uz''$

Et, en remplaçant dans l'équation,

$u\, z'' + (2u' + a(x)u)z' + (u'' + a(x)u' + b(x)u)z = c(x)$

Puisque u est solution de l'ESSM, on a :

$uz'' + (2u' + a(x)u)z' = c(x)$

C'est une équation linéaire du premier ordre en z'. On sait la résoudre.

II.2 Méthodes pour déterminer une solution particulière de l'équation avec second membre

Principe de superposition :

Si le second membre est composé d'une somme de plusieurs termes, on peut chercher une solution particulière pour chaque terme et les additionner.

Méthode de variation des constantes.

On suppose que l'on connait la forme générale des solutions de l'ESSM :

$$y(x) = \lambda u(x) + \mu v(x)$$

On cherche une solution particulière sous la forme :

$$y_{sp}(x) = \lambda(x)u(x) + \mu(x)v(x)$$

On a deux fonctions à déterminer, λ et μ. Puisque l'on cherche une seule solution particulière, on pourra se donner une contrainte supplémentaire (une équation) pour les déterminer.

D'autre part,

$$(\lambda u)' = \lambda' u + \lambda u'$$

$$(\lambda u)'' = \lambda'' u + 2\lambda' u' + \lambda u''.$$

De même pour $(\mu v)'$ et $(\mu v)''$.

L'équation devient :

$$\lambda'' u + \mu'' v + 2\lambda' u' + 2\mu' v' + a(\lambda' u + \mu' v) + \lambda(u'' + au' + bu) + \mu(v'' + av' + bv) = c$$

Or, puisque u et v sont solutions de l'ESSM.

$$u'' + au' + bu = v'' + av' + bv = 0$$

Si l'on suppose par ailleurs (notre contrainte supplémentaire) que :

$$\lambda' u + \mu' v = 0,$$

on a également, en dérivant l'expression précédente,

$$\lambda'' u + \lambda' u' + \mu'' v + \mu' v' = 0$$

L'équation devient alors :

$$\lambda' u' + \mu' v' = c$$

Pour déterminer λ et μ, on doit résoudre le système suivant :

$$\begin{pmatrix} u' & v' \\ u & v \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \lambda' \\ \mu' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c \\ 0 \end{pmatrix}$$

Les fonctions u et v forment une base des solutions de l'ESSM. Elles sont donc indépendantes i.e leur Wronskien n'est jamais nul. Le système précédent a alors nécessairement une solution unique.

III. Equations du second ordre non linéaires remarquables

On s'intéresse à des équations de la forme :

$$y'' = F(y, y', x)$$

Si F ne contient **pas de terme en y** :

C'est une équation du premier ordre en y'.

Si F ne contient **pas de terme en x** :

On pose $z(y) = \frac{dy}{dx}$

$$\frac{dz}{dx} = \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{dz}{dy} * \frac{dy}{dx} = z\frac{dz}{dy}$$

On obtient une équation du premier ordre en z(y)

Exemple :

- $2yy'' = (y')^2$

  On a alors

  $2yzz' = z^2$ soit $2yz' = z$

D'où :

$$2\frac{z'}{Z} = \frac{1}{y} \; et \; 2\ln(|z|) = \ln(|y|) + A$$

Soit :

z^2 = B|y| et $z = \sqrt{B}\sqrt{|y|} = \frac{dy}{dx}$

Et finalement, si y >0,

$$y = \left(\frac{\sqrt{B}x + C}{2}\right)^2$$

Si F ne contient **pas de termes en x et y'** :

y''=F(y)

On multiplie le tout par y' :

y''y'=F(y)y'

et donc, en intégrant,

$$\frac{1}{2}(y')^2 = \int F(y)dy$$

Exemple :

- Théorème de l'énergie cinétique :

  $m\frac{d^2x}{dt^2} = F(x)$

  Donc $m\frac{dx}{dt}\frac{d^2x}{dt^2} = F(x)\frac{dx}{dt}$

  Et $\frac{m}{2}\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 = \int F(x)dx$

  La variation de l'énergie cinétique est égale à la somme des travaux des forces.

Chapitre 3 : Fonctions de Bessel

I. Méthode de Frobenius

Nous avons vu qu'il n'y a pas de méthodes générales pour résoudre une équation différentielle ordinaire (EDO) du second ordre linéaire. On peut en revanche résoudre un grand nombre d'EDO linéaires en cherchant les solutions sous la forme de séries.

Les séries entières, i.e de la forme $\sum_n a_n x^n$, ne suffisent pas toujours. Considérons l'exemple suivant :

$y'' + \frac{1}{x}y' - \frac{b^2}{x^2}y = 0$ (résolue sur $]-\infty; 0[$ ou $]0; +\infty[$)

Il s'agit bien d'une équation linéaire. Cherchons des solutions sous la forme de séries entières avec un rayon de convergence >0 :

$$y = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$$
$$y' = \sum_{n=0}^{+\infty} n a_n x^{n-1}$$
$$y'' = \sum_{n=0}^{+\infty} n(n-1) a_n x^{n-2}$$

Remarque : En dérivant y, le terme constant a_0 a disparu. Il faudrait donc faire partir la somme à n = 1. De même pour y'', il n'y a pas de termes en 1/x et la somme devrait partir à n = 2. Néanmoins, formellement on garde ce terme car il est multiplié par n qui vaut 0 pour ce premier terme (ou n-1 pour le deuxième).

L'équation précédente devient :

$\sum_{n=0}^{+\infty}[n(n-1)a_n + na_n - b^2 a_n]x^{n-2} = 0$

Les x^n étant une famille libre (car RCV >0), on doit avoir, pour tout n :

$(n(n-1) + n - b^2)a_n = (n^2-b^2)an=0$

Donc soit $a_n = 0$, soit $n^2 - b^2 = 0$. Il est donc clair que la forme générale de cette solution est :

$y(x) = Ax^b + Bx^{-b}$

Ce n'est pas une solution développable en série entière. Pourtant, la recherche de solutions sous la forme de série a bien permis de déterminer les solutions.

D'où l'idée de chercher des solutions sous la forme de *série entière généralisée*, i.e. de la forme :

$y(x) = x^s \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$

avec s un nombre réel (non nécessairement entier)

$a_0 \neq 0$ (sinon il y a ambiguïté pour définir s)

II. Théorème d'existence des solutions

Théorème de Fuch :

Soit une équation différentielle sans second membre linéaire de la forme :

$y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0.$

Si $xP(x)$ et $x^2Q(x)$ peuvent être développés en série entière (convergente au moins sur un certain domaine) alors cette équation admet **au moins une** solution sous la forme de séries entières généralisées.

Plus précisément, on cherche des solutions de la forme :

$y(x) = x^s \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$

avec s un nombre réel et $a_0 \neq 0$

En remplaçant la série dans l'EDO, on obtient une équation d'inconnue s (polynôme du second degré).

Si le polynôme a **deux racines simples** distinctes s_1 et s_2 telles que **s_1 - s_2 n'est pas un entier** :

On a deux séries entières généralisées indépendantes comme solutions. Toute solution peut donc s'écrire comme une combinaison linéaire de ces deux séries entières généralisées

Si on a **une racine double** s :

On trouve une solution $S_1(x)$, série entière généralisée d'indice s

L'autre solution est à chercher sous la forme :

$S_1(x)\ln(|x|) + S_2(x)$

S_2 étant une série entière généralisée à déterminer (d'indice s)

Si on a **deux racines distinctes** s_1 et s_2 telles que **$s_1 - s_2$ est entier** :

Supposons $s_1 > s_2$.

La série d'indice s_1 est solution.

L'autre l'est peut être ou pas (à vérifier). Si elle ne l'est pas, il faut chercher une deuxième solution sous la forme :

$S_1(x)\ln(|x|) + S_2(x)$

S_2 étant une série entière généralisée à déterminer d'indice s_2

III. Les fonctions de Bessel

III.1 Equation de Bessel

On étudie les solutions de l'équation suivante :

$x^2y'' + xy' + (x^2-p^2)y = 0$

p un réel positif

Sous forme résolue, on a :

$$y'' + \frac{1}{x}y' + \left(1 - \frac{p^2}{x^2}\right)y = 0$$

Il faut donc étudier les solutions sur $]-\infty; 0[$ ou $]0; +\infty[$

D'après le théorème de Fuch, cette équation admet au moins une solution sous forme de série entière généralisée.

On peut aussi la mettre sous la forme :

$x(xy')' + (x^2 - p^2)y = 0$

On pose :

$$y(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^{n+s}$$

$$xy' = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (n+s) x^{n+s}$$

$$x(xy')' = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (n+s)^2 x^{n+s}$$

$$x^2 y = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^{n+s+2} = \sum_{n'=2}^{+\infty} a_{n'-2} x^{n'+s} \ avec\ n' = n+2$$

En remplaçant dans l'équation différentielle, on a donc :

Pour n=0 :

$$a_0 s^2 - p^2 a_0 = 0 \qquad (1)$$

Pour n=1 :

$$[(1+s)^2 - p^2] a_1 = 0 \qquad (2)$$

Pour tout n ≥ 2, on a la formule de récurrence :

$$[\ (n+s)^2 - p^2\ ] a_n + a_{n-2} = 0 \qquad (3)$$

De (1) on tire (puisque $a_0 \neq 0$) :

$$s = \pm p$$

(2) devient alors $(1+2s)a_1=0$.

D'où :

$$a_1 = 0 \text{ ou } s = -½ \qquad \text{(2bis)}$$

III.2 Etude du cas s = p

Comme s=p>0, le cas s=-1/2 dans (2 bis) est impossible, et on a alors **a_1=0**.

D'autre part, la formule de recurrence de l'équation (3) devient :

Pour tout n>2, $((n+s)^2-p^2)a_n+a_{n-2} = (n^2+2np)a_n+a_{n-2}=0$ (3 bis)

Or pour tout n>1, $(n^2+2np)\neq 0$, donc pour tout n : $a_n = \frac{-a_{n-2}}{(n+s)^2-p^2}$

Cela implique que **tous les termes d'indice impair sont nuls**, vu que a_1=0.

Pour les termes d'indice pair, on pose n = 2k, k entier.

$(n+s)^2 - p^2 = 4k(k+p) \neq 0$, pour tout k

Donc :

$$a_{2k} = \frac{-a_{2k-2}}{4k(k+p)}$$

On a :

$$a_2 = \frac{-a_0}{4(1+p)}$$

$$a_4 = \frac{-a_2}{4*2(2+p)} = \frac{a_0}{4*4*1*2*(1+p)*(2+p)}$$

*III.2.1 Cas particulier **p entier***

On aurait alors

$$a_{2k} = \frac{(-1)^k p!\, a_0}{4^k k!\,(k+p)!}$$

Et

$$y(x) = a_0 \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k \mathrm{p}!}{4^k k!\,(p+k)!} x^{2k+p}$$

*III.2.2 Cas particulier **p non-entier***

Dans le cas où p n'est pas entier, il faudrait, pour exprimer a_{2k}, généraliser la notion de factoriel à des nombres réels non entiers.

Pour cela, on introduit la *fonction d'Euler* (Cf Annexe du chapitre 3)

$\Gamma(p) = \int_0^{+\infty} x^{p-1}e^{-x}dx$, p >0

L'une de ses principales propriétés est de coïncider avec la fonction factorielle sur les entiers selon la relation:

$\Gamma(p+1) = p!$, pour p entier >0

On peut alors écrire le terme générique de la suite généralisée solution de l'équation de Bessel :

$$a_{2k} = \frac{(-1)^k\Gamma(1+p)}{4^k k!\,\Gamma(p+1+k)}a_0$$

Une des solutions peut alors se mettre sous la forme :

$$y(x) = a_0\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(-1)^k\Gamma(1+p)}{4^k k!\,\Gamma(p+1+k)}x^{2k+p}$$

On appelle ***fonction de Bessel de première espèce***, la fonction définie par :

$$\boxed{J_p(x) = \sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{k!\,\Gamma(p+1+k)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k+p}}$$

Cette série à un rayon de convergence infini.

La solution trouvée précédemment s'écrit alors:

$y(x) = a_0 2^p\Gamma(p+1)J_p(x) = AJ_p(x)$, A une constante à définir

*III.3 Etude du cas **s = -p***

III.3.1 **p n'est ni entier, ni demi entier**,

On a toujours s ≠-1/2. Donc d'après (2bis), $\mathbf{a_1=0}$.
En outre, (3 bis) étant toujours valable, et **n(n-2p)≠0 pour tout n (car p n'est ni entier, ni demi-entier)** on peut appliquer le raisonnement du dessus en remplaçant s par –s. Et on obtient une nouvelle solution de l'équation de Bessel sur]0,+∞[ou]-∞,0[:

$$\boxed{J_{-p}(x) = \sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{k!\,\Gamma(-p+1+k)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k-p}}$$

On a dans ce cas deux solutions indépendantes à l'équation. On peut obtenir, par combinaison linéaire de ces deux solutions, n'importe quelle solution.

III.3.2. **p est entier** (cas très fréquent)

Soit N l'entier en question, s = -p = -N.
La résolution de (3bis) n'est plus aussi simple que précédemment. En effet, il existe un unique n_0 tel que $n_0^2+2n_0p=0$. Cet entier vaut $n_0=2N$. Il est donc pair.

Pour tous les entiers impairs, on a donc : $n^2+2np\neq 0$. Et comme précédemment, (puisque s ≠ -1/2), $a_1=0$, et tous les termes impairs de la série sont nuls.

On note a_{2k}, $k \geq 0$ les coefficients d'ordre pair.
D'après (3bis) :

$$\mathbf{4k(k-N)a_{2k} + a_{2k-2} = 0}$$

Pour k = N, $n=n_0$, et on obtient $a_{2N-2} = 0$.
Ensuite, comme k=N est l'unique situation où 4k(k-N) =0, tous les a_{2k} tels que k < N sont proportionnels à a_{2N-2} qui est nul. **Donc tous les termes d'indice pair jusqu'au rang 2N-2 sont nuls.**

On peut quand même construire une série pour k ≥ N :

$$J_{-N}(x) = \sum_{k=N}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k!\,(k-N)!}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k-N}$$

On pose k' = k-N, k = k'+N,

$$\boxed{J_{-N}(x) = \sum_{k'=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{k'+N}}{(k'+N)!\,(k')!}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k'+N} = (-1)^N J_N(x)}$$

Par conséquent, pour p entier, J_{-p} ne constitue pas une deuxième solution indépendante.

On montre que la deuxième solution indépendante est la *fonction de Bessel de seconde espèce* donnée par :

$$\boxed{N_p(x) = \lim_{\nu \to p} \frac{\cos(\pi\nu)\,J_\nu(x) - J_{-\nu}(x)}{\sin(\pi\nu)}}$$

Cette limite existe toujours, même dans le cas indéterminé où p est entier.

Remarque :

On peut toujours écrire les solutions de l'EDO de Bessel sous la forme $AJ_p(x) = BN_p(x)$, que p soit entier ou non.

III.3.3. **p est demi entier**

Cela correspond au deuxième cas où le coefficient de a_n dans (3 bis) s'annule.
On peut directement intégrer l'EDO de Bessel ; la méthode de Frobenius n'est pas nécessaire.

En effet, prenons le cas p = ½. On a :

$$y'' + \frac{1}{x}y' + \left(1 - \frac{1}{4x^2}\right)y = 0$$

On pose $y = x^{-1/2}u$.

$$x^{-1}y' = x^{-1}\left(-\frac{1}{2}x^{-3/2}u + x^{-1/2}u'\right) = -\frac{1}{2}x^{-5/2}u + x^{-3/2}u'$$

$$y'' = \left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)x^{-5/2}u + x^{-1/2}u'' - x^{-3/2}u'$$

$$\left(1 - \frac{1}{4x^2}\right)y = x^{-1/2}u - \frac{1}{4}x^{-5/2}u$$

On obtient alors :

$x^{-1/2}[u''+u] = 0$ soit, $y(x) = \frac{A}{\sqrt{x}}\cos(x) + \frac{B}{\sqrt{x}}\sin(x)\,, x > 0$

Lien avec $J_{1/2}$:

$$J_{1/2}(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k!\,\Gamma(1/2+1+k)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k+\frac{1}{2}}$$

Or, $\Gamma\left(k+1+\frac{1}{2}\right)=\frac{\sqrt{\pi}(2k+1)!}{2^{2k+1}k!}$

(se démontre par récurrence, sachant $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{\pi}$)

$$J_{1/2}(x)=\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(-1)^k 2^{2k+1}k!}{k!\sqrt{\pi}(2k+1)!}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k+\frac{1}{2}}=\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{(2k+1)!}x^{2k+1}=\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\sin(x)$$

De même, $N_{\frac{1}{2}}(x)=-\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\cos(x)$

On détermine les autres fonctions en utilisant les formules de récurrence (voir suite).

III.4 Tableau récapitulatif pour p>0

On peut récapituler les résultats de la discussion ci-dessus dans le tableau suivant à retenir :

	Base des solutions de l'équation de Bessel, p>0	
p non entier relatif (p ≠ …-2, -1, 0, 1, 2, 3, etc …)	p ≠ k/2, avec k entier relatif (p≠-5/2, -2, -3/2, -1, -1/2, 0, ½, 1, etc…)	J_p et J_{-p} sont deux solutions indépendantes de l'équation de Bessel $J_p(x)=\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{k!\,\Gamma(p+1+k)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k+p}$
	p = -5/2, -3/2,-1/2, etc …	J_p et J_{-p} constituent toujours une base des solutions de l'équation de Bessel, mais on peut exprimer J_p et J_{-p} à l'aide des fonctions usuelles.
p entier relatif (p=…, -3,-2,-1,0,1,2,3, etc …)	J_p et N_p sont deux solutions indépendantes. Toute solution de l'équation de Bessel s'écrit donc $y = \alpha J_p + \beta N_p$ (J_p et J_{-p} ne sont plus indépendantes dans ce cas)	

III.5 Propriétés des fonctions de Bessel

III.5.1 Relations de récurrence

Relations de récurrence :

$$\boxed{\begin{aligned} xJ_p' &= pJ_p - xJ_{p+1} \\ xJ_p' &= -pJ_p + xJ_{p-1}\end{aligned}}$$

Ces mêmes relations sont valables pour $N_p(x)$.

Conséquences :

$$2pJ_p(x)=x(J_{p+1}(x)+J_{p-1}(x))$$

$$\text{Pour } p=0,\ J_0'(x)=-J_1(x)$$

On peut démontrer la première relation.

$$xJ_p'(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k(2k+p)}{k!\,\Gamma(p+1+k)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k+p}$$
$$xJ_p'(x) = pJ_p(x) + \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k 2k}{k!\,\Gamma(p+1+k)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k+p}$$
Or, puisque le premier terme de la somme (k = 0) est nul,
$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k 2k}{k!\,\Gamma(p+1+k)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k+p} = -x\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{(k-1)!\,\Gamma(p+1+k)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k+p-1}$$
Et, en faisant le changement de variable n = k-1,
$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k 2k}{k!\,\Gamma(p+1+k)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k+p} = -x\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{n}}{n!\,\Gamma(p+1+1+n)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2n+p+1} = -xJ_{p+1}(x)$$

III.5.2 Orthogonalité des fonctions de Bessel

Propriété :

Soient α et β deux zéros de J_p.

Si $\alpha^2 \neq \beta^2$, alors

$$\int_0^1 xJ_p(\alpha x)J_p(\beta x)dx = 0$$

Si α = β, alors

$$\int_0^1 x\left(J_p(\alpha x)\right)^2 dx = \tfrac{1}{2}\left(J_{p+1}(\alpha)\right)^2$$

Démonstration :

$J_p(z)$ est solution de $z(zy')' + (z^2-p^2)y = 0$

Si on pose z = αx et qu'on effectue le changement de variable y(z) = Y(αx),

$$\frac{dy}{dz} = \frac{dx}{dz}\frac{dY}{dx} = \frac{1}{\alpha}Y'(\alpha x)$$
$$z\frac{dy}{dz} = \frac{z}{\alpha}\frac{dY}{dx} = xY'(\alpha x)$$

Donc,

$$x(xY'(\alpha x))' + (\alpha^2x^2 - p^2)Y(\alpha x) = 0$$

On pose $a(x) = J_p(\alpha x)$ et $b(x) = J_p(\beta x)$ avec $J_p(\alpha) = J_p(\beta) = 0$.

On a alors, d'après les calculs précédents :

$$x(xa')' + (\alpha^2x^2 - p^2)a = 0$$
$$x(xb')' + (\beta^2x^2 - p^2)b = 0$$

On multiplie la première équation par b, la seconde par a et on fait la différence :

$$bx(xa')'-ax(xb')' +(\alpha^2-\beta^2)x^2ab = 0$$

Après division par x, on a :

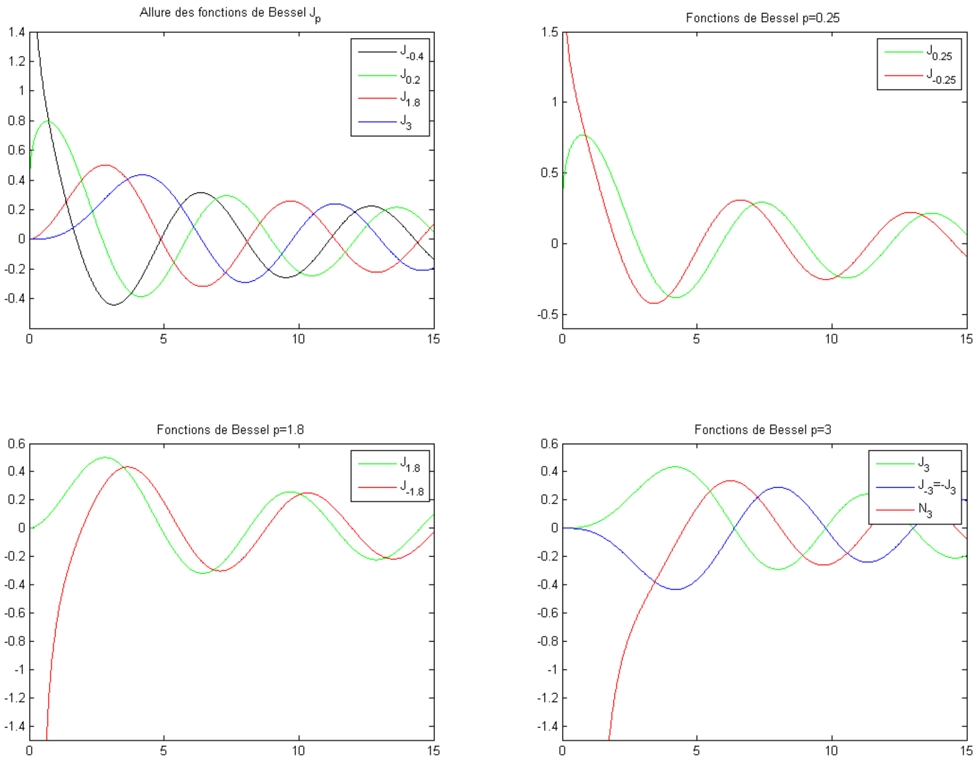
$$(bxa'-axb')' + (\alpha^2-\beta^2)xab = 0$$

En intégrant, on trouve :

$$[bxa' - axb']_0^1 + (\alpha^2 - \beta^2)\int_0^1 xa(x)b(x)dx = 0$$

Or, a(1) = b(1) = 0 et a'b et ba' ont une limite finie en zéro. D'où le résultat pour $\alpha^2 \neq \beta^2$.

III.5.3 Allure des fonctions de Bessel (voir figures)



*Comportement en **x = 0***

D'après le développement en série,

$$J_p(x) \sim_{x\to 0} \left(\frac{x}{2}\right)^p \frac{1}{\Gamma(p+1)}$$

donc $J_0(0) = 1$ et $J_p(0) = 0$ pour p>0.

$$N_0(x) \sim_{x\to 0} \frac{2}{\pi}\ln(x)$$

$$N_p(x) \sim_{x\to 0} \frac{-\Gamma(p)}{\pi}\left(\frac{2}{x}\right)^p \text{pour } p > 0$$

donc $\lim_{x\to 0} N_p(x) = -\infty$

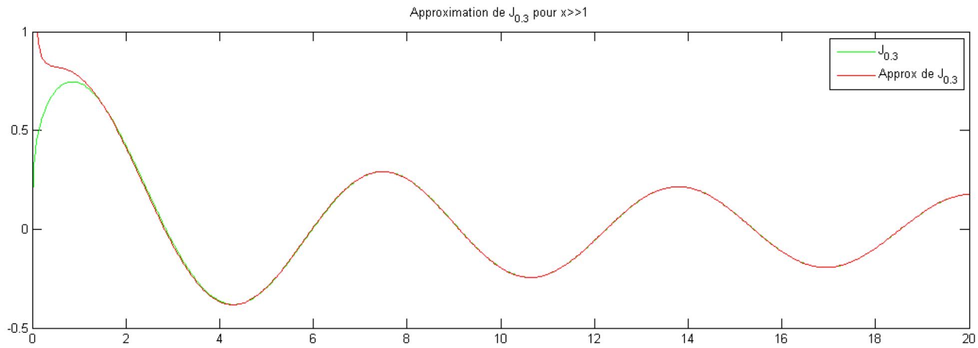
*Comportement en **x** $\to +\infty$ (asymptotique)*

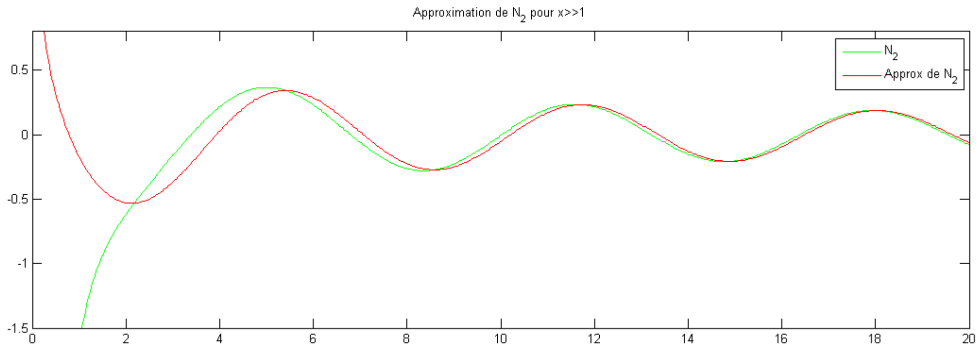
$$J_p(x) \sim_{x\to+\infty} \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\cos\left(x - \frac{2p+1}{4}\pi\right)$$

$$N_p(x) \sim_{x\to+\infty} \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\sin\left(x - \frac{2p+1}{4}\pi\right)$$

$J_p(x)$ et $N_p(x)$ tendent vers 0 quand x tend vers $+\infty$. Les zéros deviennent distants de π.

Assez étonnement, alors que les fonctions ci-dessus ne constituent des approximations $J_p(x)$ et $N_p(x)$ que pour x » 1, on peut voir sur le graphe ci-dessous que la fonction $\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\cos\left(x - \frac{2p+1}{4}\pi\right)$ constitue une très bonne approximation de la fonction $J_p(x)$ pour x≥ 1. L'approximation n'est valable pour $N_p(x)$ qu'à partir de x>10.





<u>III.6 Forme générale de l'équation de Bessel</u>

La forme générale de l'*<u>équation de Bessel</u>* est la suivante :

$$y'' + \frac{1-2a}{x}y' + \left[(bcx^{c-1})^{c-1} + \frac{a^2-p^2c^2}{x^2}\right]y = 0$$

Les solutions sont :

$$y(x) = Ax^aJ_p(bx^c) + Bx^aN_p(bx^c)$$

Pour le démontrer, il suffit de faire le changement de variable $y = x^az(x)$ puis de poser $u = bx^c$

Exemple :

- $y'' + xy = 0$

  On doit avoir a = ½ car 1-2a = 0.

  $$\begin{cases} 2(c-1) = 1 \\ a^2 - p^2c^2 = 0 \\ (bc)^{c-1} = 1 \end{cases} donc \begin{cases} c = 3/2 \\ p = a/c = 1/3 \\ b = 2/3 \end{cases}$$

Remarque : On peut toujours prendre p≥0.

Les solutions sont $y(x) = Ax^{1/2}J_{1/3}\left(\frac{2}{3}x^{3/2}\right) + Bx^{1/2}J_{-1/3}\left(\frac{2}{3}x^{3/2}\right)$

III.7 Annexe sur la fonction d'Euler

$$\Gamma(p) = \int_0^{+\infty} x^{p-1} e^{-x} dx \text{ , p >0}$$

Pour **p > 0**,

Cette intégrale est parfaitement définie. Etudions ses propriétés.

Γ(1) = 1

$\Gamma(p+1) = \int_0^{+\infty} x^p e^{-x} dx$

En intégrant par partie

$u' = e^{-x}$ $\qquad u = - e^{-x}$

$v = x^p$ $\qquad v' = px^{p-1}$

$\Gamma(p+1) = p\int_0^{+\infty} x^{p-1} e^{-x} dx = p\Gamma(p)$

Donc, pour tout a entier positif inférieur à p,

$$(\mathrm{p}-1)\ldots(\mathrm{p}-\mathrm{a}) = \frac{\Gamma(\mathrm{p})}{\Gamma(\mathrm{p}-\mathrm{a})}$$

Ce qui peut être calculé (numériquement) puisque la fonction d'Euler est défini par une intégrale.

Pour **p < 0**,

on ne peut plus définir Γ(p) par sa forme intégrale. On peut par contre toujours la définir par la relation de récurrence :

Γ(p+1)=pΓ(p)

Si **p n'est pas un entier relatif négatif** (car Γ(0) n'est pas défini)

Exemple :

- $\Gamma\left(-\frac{3}{2}\right) = \frac{\Gamma(-1/2)}{-3/2} = \frac{\Gamma(1/2)}{(-3/2)(-1/2)}$

<u>Chapitre 4 :</u> Polynômes de Legendre et Fonctions de Legendre associées (Harmonique sphérique)

Les polynômes de Legendre (Adrien-Marie Legendre, mathématicien Français (1752 - 1833)) sont des solutions particulières de l'équation différentielle de Legendre, et constituent un exemple de suite de polynômes orthogonaux.
Ces solutions trouvent application dans la résolution de nombreux problèmes à symétrie sphérique : équation de Laplace, atome d'Hydrogène en mécanique quantique (harmonique sphérique) etc.

I. <u>Polynômes de Legendre</u>

<u>*I.1 Solutions de l'équation de Legendre*</u>

On s'intéresse aux solutions sur]-1 ;1[de l'EDO suivante :

$(1-x^2)y'' - 2xy' + l(l+1)y = 0$

l est à priori un nombre réel, le cas le plus courant étant l entier.

Cette équation satisfait aux critères de Fuch sur]-1 ;1[. On cherche les solutions sous la forme d'une série entière généralisée :

$y(x) = \sum a_n x^{n+s}$ (s étant à déterminer)

Alors,

$$l(l+1)y = \sum l(l+1)a_n x^{n+s}$$
$$-2xy' = -\sum 2(n+s)a_n x^{n+s}$$
$$-x^2y'' = -\sum (n+s)(n+s-1)a_n x^{n+s}$$
$$y'' = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+s)(n+s-1)a_n x^{n+s-2}$$

En effectuant le changement d'indice n' = n-2 et on a :

$$y'' = \sum_{n'=0}^{+\infty} (n'+s+2)(n'+s+1)a_{n'+2} x^{n'+s} + a_0 s(s-1)x^{s-2} + a_1 s(s+1)x^{s-1}$$

On doit donc avoir :

$s(s-1)a_0 = 0$ et $a_0 \neq 0$ donc s = 0 ou s = 1

$s(s+1)a_1 = 0$ donc $a_1 = 0$ si s = 1

Et, pour tout n ≥ 2,

$$a_{n+2} = \frac{(n+s)(n+s+1) - l(l+1)}{(n+s+2)(n+s+1)} a_n$$

<u>*Etude du cas **s = 0** :*</u>

$a_0 \neq 0$, $a_1 \neq 0$ et $a_{n+2} = \frac{(n+s)(n+s+1) - l(l+1)}{(n+s+2)(n+s+1)} a_n = \frac{(n-l)(n+l+1)}{(n+1)(n+2)} a_n$

On trouve donc deux solutions. L'une est proportionnelle à a_0 et la seconde à a_1. Celle proportionnelle à a_0 est paire (termes en x^{2k}), l'autre impaire (termes proportionnels en x^{2k+1})

Etude de la convergence des séries (critère de convergence de d'Alembert).

$$\frac{a_{n+2}x^{n+2}}{a_n x^n} = \frac{(n-l)(n+l+1)}{(n+1)(n+2)} x^2$$

Si **l n'est pas entier**, le rapport tend vers x2. La série diverge si |x| > 1 et converge pour |x| < 1. Ce critère ne permet pas de conclure pour |x| = 1. On montre alors que les deux séries divergent dans ce dernier cas.
Seul le cas **l entier** permet d'avoir des solutions qui convergent pour |x| = 1 (remarquons que dans ce cas, les solutions sont des polynômes et non des séries). C'est le cas que l'on va étudier par la suite.

*Etude du cas **s = 1** :*

$a_1 = 0$.

$y = \sum b_{2k}x^{2k+1}\ avec\ b_{2k+2} = \frac{(2k-l)(2k+l+1)}{(2k+1)(2k+2)}b_{2k}$

En fait, cette série est la même que celle obtenue pour s = 0 (proportionnelle à a_1), qui vaut :

$$y = \sum a_{2k+1}x^{2k+1}\ avec\ a_{2k+1} = \frac{(2k+1-l)(2k+1+l+1)}{(2k+2)(2k+3)}a_{2k-1}$$

Avec $b_{2k} = a_{2k+1}$.

Si l est un entier pair, soit **l = 2N** avec N entier

$$a_{n+2} = \frac{(n-2N)(n+2N+1)}{(n+1)(n+2)}a_n$$

La série paire est un polynôme puisque $a_{2N+2} = 0$. Ce polynôme est de degré l = 2N.
La série impaire n'est en revanche pas un polynôme et diverge en |x|=1.

Idem pour **l = 2N + 1**, sauf que dans ce cas c'est la série impaire qui est un polynôme.

Les *polynômes de Legendre* P_n sont les solutions polynômiales de l'équation de Legendre quand l est un entier n. Pour fixer la constante de proportionnalité, on se donne également la condition suivante : $P_n(x=1) = 1$.

I.2. Propriétés des polynômes de Legendre

Formule de Rodrigues (Benjamin Rodrigues, 1795-1851) :

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!}\frac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^n$$

Cette formule permet notamment de déterminer les premiers P_n.
Démontrons que ces polynômes sont bien solutions de l'équation de Legendre (pour l=n).

Pour cela on pose :

$v = (x^2-1)^n$

$v' = n2x(x^2-1)^{n-1}$

$v'' = 2n(x^2-1)^{n-1} + n(n-1)4x^2(x^2-1)^{n-2}$

$(x^2-1)v'' = 2n(x^2-1)^n + n(n-1)4x^2(x^2-1)^{n-1} = 2nv + (n-1)2xv'$.

La fonction v est donc solution de l'équation :

$$(x^2-1)v'' + 2x(1-n)v' - 2nv = 0$$

On va maintenant dériver n fois cette équation et montrer que l'on obtient ainsi l'équation de Legendre. Pour cela on utilise la *formule de Leibnitz* :

$$(\varphi\phi)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k \varphi^{(k)}\phi^{(n-k)}\ avec\ C_n^k = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}$$

On dérive donc n fois le premier terme.

$$\left((x^2-1)v''\right)^{(n)} = C_n^0(x^2-1)v^{(n+2)} + C_n^1 2xv^{(n+1)} + C_n^2 2v^{(n)}$$

Or $C_n^0 = 1,\ C_n^1 = n\,, C_n^2 = \frac{n(n-1)}{2}$ donc

$$\left((x^2-1)v''\right)^{(n)} = (x^2-1)v^{(n+2)} + 2nxv^{(n+1)} + n(n-1)v^{(n)}$$

De même,

$$(2x(1-n)v')^{(n)} = (1-n)2xv^{(n+1)} + 2n(1-n)v^{(n)}$$
$$(-2nv)^{(n)} = -2nv^{(n)}$$

On a alors :

$$(x^2-1)\left(v^{(n)}\right)'' + 2x\left(v^{(n)}\right)' - n(n+1)v^{(n)} = 0$$

Finalement, $v^{(n)}$ est bien une solution polynomiale de degré n de l'équation de Legendre.

Vérifions à présent que $P_n(1) = 1$

$$v^{(n)} = \frac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^n = \frac{d^n}{dx^n}(x+1)^n(x-1)^n = \sum_{k=0}^n C_n^k \frac{d^k}{dx^k}(x-1)^n \frac{d^{n-k}}{dx^{n-k}}(x+1)^n.$$

Tous les termes en (x-1) s'annulent pour x = 1 donc

$$v^{(n)}(x=1) = C_n^n n!\,2^n = n!\,2^n$$

(seul terme k=n n'est pas nul en x=1 dans la somme précédente)

Application à la détermination des polynômes :

$P_0(x) = 1$

$$P_1(x) = \frac{1}{2}(x^2-1)' = \frac{1}{2}2x = x$$

$$P_2(x) = \frac{1}{4}\frac{1}{2}((x^2-1)^2)'' = \frac{1}{8}\left(4x(x^2-1)\right)' = \frac{4}{8}[(x^2-1)+x.2x] = \frac{1}{2}(3x^2-1)$$

Fonction génératrice des polynômes de Legendre

$$\phi(x,h) = \frac{1}{\sqrt{1-2xh+h^2}} = \sum_{n=0}^{+\infty} h^n P_n(x) \ \ avec \ \ |h| < 1$$

On a alors :

$$\phi(1,h) = (1-2h+h^2)^{-1/2} = (1-h)^{-1} = \sum h^n$$

Ce qui est compatible avec les résultats ci-dessus puisque, pour tout n, $P_n(1) = 1$.

Démontrons maintenant que les $P_n(x)$ sont bien les polynômes de Legendre. Pour cela nous allons démontrer que les coefficients $P_n(x)$ de la décomposition en série de ϕ (x,h) en puissance de h sont bien solutions polynomiales de l'équation de Legendre.

$$\frac{\partial\phi}{\partial x} = -\frac{1}{2}(-2h)(1-2xh+h^2)^{-3/2} = hA^{-3/2}$$

avec $A(x,h) = 1 - 2xh + h^2$

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} = -\frac{3}{2}h(-2h)A^{-5/2} = 3h^2A^{-5/2}$$

$$\frac{\partial h\phi}{\partial h} = \phi + h\left(-\frac{1}{2}\right)(-2x+2h)A^{-3/2} = \phi + h(-h+x)A^{-3/2}$$

$$\frac{\partial^2 h\phi}{\partial h^2} = (x-h)A^{-3/2} + (-2h+x)A^{-3/2} + h(x-h)\frac{-3}{2}(2h-2x)A^{-5/2}$$

$$\frac{\partial^2 h\phi}{\partial h^2} = (2x-3h)A^{-3/2} + 3h(x-h)^2A^{-5/2}$$

Donc,

$$(1-x^2)\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} - 2x\frac{\partial\phi}{\partial x} + h\frac{\partial^2 h\phi}{\partial h^2}$$
$$= 3h^2(1-x^2)A^{-5/2} - 2hxA^{-3/2} + h(2x-3h)A^{-3/2} + 3h^2(x-h)^2A^{-5/2}$$

D'où :

$$(1-x^2)\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} - 2x\frac{\partial\phi}{\partial x} + h\frac{\partial^2 h\phi}{\partial h^2} = 3h^2(1-x^2+(x-h)^2)A^{-5/2} - 3h^2A^{-3/2}$$

Or,

$1 - x^2 + (x-h)^2 = 1 - 2xh + h^2 = A(x,h)$.

La fonction ϕ vérifie donc l'équation suivante:

$$(1-x^2)\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} - 2x\frac{\partial\phi}{\partial x} + h\frac{\partial^2 h\phi}{\partial h^2} = 3h^2A^{-3/2} - 3h^2A^{-3/2} = 0$$

Par ailleurs,

$$\phi(x,h) = \sum_n h^n P_n(x).$$

Les fonctions polynomiales $P_n(x)$ doivent donc vérifier :

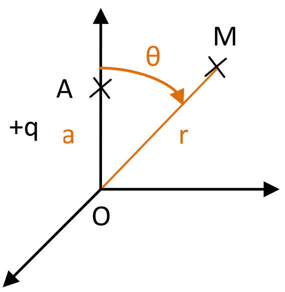
$$(1-x^2)P_n'' - 2xP_n' + n(n+1)P_n \ = 0$$

C'est l'équation de Legendre. Et, puisque $P_n(x=1) = 1$, les P_n ainsi définis sont bien les polynômes de Legendre.

Interprétation de la fonction génératrice (en électrostatique)

On considère une charge électrique q en un point z=a qui n'est pas l'origine des coordonnées O. Le potentiel en tout point M créé par une charge en A est :

$$V(M) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{AM}$$



On utilise les coordonnées sphériques, comme sur le schéma ci-contre.

$$AM^2 = \left(\overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OM}\right)^2 = a^2 + r^2 + 2\overrightarrow{AO}.\overrightarrow{OM}$$

$$AM^2 = a^2 + r^2 - 2ar\cos\theta$$

Avec a, r et θ définis sur le schéma ci-contre.

Donc

$$V(M) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{\sqrt{a^2+r^2-2ar\cos\theta}}$$

Et, en posant h = a/r et x = cosθ,

$$V(M) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{\sqrt{1-2xh+h^2}}$$

On reconnait la fonction génératrice des polynômes de Legendre et

$$V(M) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\sum P_n(\cos\theta)\left(\frac{a}{r}\right)^n$$

<u>Formule de récurrence</u>

$(1+n)P_{n+1} - x(2n+1)P_n + nP_{n-1} = 0$ pour tout $n \geq 1$

On peut démontrer ces formules à partir de la fonction génératrice.

$$\frac{\partial\phi}{\partial h} = -\frac{1}{2}\frac{2h-2x}{(1+h^2-2xh)^{3/2}} = \frac{x-h}{(1+h^2-2xh)^{3/2}}$$

Donc,

$$(x-h)\phi = (1+h^2-2xh)\frac{\partial\phi}{\partial h}$$

Or,

$$(x-h)\phi = \sum_n xP_nh^n - \sum_n P_nh^{n+1}$$

Et, en faisant le changement de variable n'=n+1 dans la seconde somme,

$$(x-h)\phi = xP_0 + \sum_{n=1}(xP_n - P_{n-1})h^n$$

D'autre part,

$$(1+h^2-2xh)\frac{\partial\phi}{\partial h} = \sum_n(nP_nh^{n-1} + nP_nh^{n+1} - 2xnP_nh^n)$$

Et, en faisant le changement de variable n'=n-1 pour le premier terme et n'=n+1 dans le deuxième,

$$(1+h^2-2xh)\frac{\partial\phi}{\partial h} = \sum_{n=0}\big((n+1)P_{n+1}h^n + (n-1)P_{n-1}h^n - 2xnP_nh^n\big)$$

$$(1+h^2-2xh)\frac{\partial\phi}{\partial h} = P_1 + \sum_{n=1}\big((n+1)P_{n+1}h^n + (n-1)P_{n-1}h^n - 2xnP_nh^n\big)$$

D'où finalement, on a :

$xP_0 = P_1$ (rappel : $P_0(x) = 1$ et $P_1(x) = x$)

et, pour tout $n \geq 1$, $(1+n)P_{n+1} - x(2n+1)P_n + nP_{n-1} = 0$

Orthogonalité des polynômes de Legendre

Si $l \neq m$,

$$\int_{-1}^{1} P_l(x)P_m(x)dx = 0$$

Sinon,

$$\int_{-1}^{1} P_l(x)P_m(x)dx = \frac{2}{2l+1} \qquad \text{(pour l=m)}$$

Soient l et m deux entiers. A partir de l'équation de Legendre,

$$\left((1-x^2)P_m'\right)' + m(m+1)P_m = 0$$
$$\left((1-x^2)P_l'\right)' + l(l+1)l = 0$$

Et, en multipliant la première équation par P_l et la seconde par P_m et en les sommant,

$$\left((1-x^2)P_l'\right)'P_m - \left((1-x^2)P_m'\right)'P_l + [l(l+1) - m(m+1)]P_mP_l = 0$$

Or,

$$[(1-x^2)(P_l'P_m - P_m'P_l)]' = \left((1-x^2)P_l'\right)'P_m + (1-x^2)P_l'P_m' - \left((1-x^2)P_m'\right)'P_l - (1-x^2)P_l'P_m'$$

D'où :

$$[(1-x^2)(P_l'P_m - P_m'P_l)]' + [l(l+1) - m(m+1)]P_mP_l = 0$$

Et, en intégrant entre -1 et 1 on obtient :

$$[l(l+1) - m(m+1)]\int_{-1}^{1} P_l(x)P_m(x)dx = 0$$

D'où l'orthogonalité.

II. Fonctions de Legendre associées

On considère l'équation différentielle suivante :

$$(1-x^2)y'' - 2xy' + \left(n(n+1) - \frac{m^2}{1-x^2}\right)y = 0$$

$m^2 \leq n^2$, $m \in \mathbb{Z}$

Si m = 0, on retrouve l'équation de Legendre. On va chercher à relier les solutions de cette équation à celle de l'équation de Legendre.

On pose

$$y = (1-x^2)^{m/2}u$$
$$y' = \frac{m}{2}(-2x)(1-x^2)^{m/2-1}u + (1-x^2)^{m/2}u'$$
$$y'' = \left[\frac{m}{2}\left(\frac{m}{2}-1\right)4x^2(1-x^2)^{m/2-2} - m(1-x^2)^{m/2-1}\right]u$$
$$+2\frac{m}{2}(-2x)(1-x^2)^{m/2-1}u'$$
$$+(1-x^2)^{m/2}u''$$

D'où :

$$(1-x^2)y'' = \left[\frac{m}{2}\left(\frac{m}{2}-1\right)4x^2(1-x^2)^{m/2-1} - m(1-x^2)^{m/2}\right]u$$

$$+2\frac{m}{2}(-2x)(1-x^2)^{m/2}u'$$
$$+(1-x^2)^{m/2+1}u''$$
$$-2xy' = \frac{m}{2}4x^2(1-x^2)^{m/2-1}u - 2x(1-x^2)^{m/2}u'$$
$$-\frac{m^2}{1-x^2}y = -m^2(1-x^2)^{m/2-1}u$$

Alors, en divisant tout par $(1-x^2)^{m/2}$, l'équation devient :

$$(1-x^2)u'' - 2x(m+1)u' + (n(n+1) - m(m+1))u = 0$$

C'est l'équation de Legendre dérivée m fois.
En effet, si on part de l'équation de Legendre :

$(1-x^2)y'' - 2xy' + l(l+1)y = 0$

Et, à partir de la formule de Leibnitz,

$((1-x^2)y'')^{(m)} = (1-x^2)y^{(m+2)}-2xmy^{(m+1)}-m(m-1)y^{(m)}$

$(-2xy')^{(m)} = -2xy^{(m+1)}-2my^{(m)}$

Donc

$(1-x^2)y^{(m+2)}-2x(m+1)y^{(m+1)}+(l(l+1)-m(m+1))y^{(m)} = 0$

On a donc finalement,

$$y = (1-x^2)^{m/2}\frac{d^m}{dx^m}(AP_n(x) + BQ_n(x))$$

P_n étant les polynômes de Legendre, Q la solution non polynomiale qui diverge en |x|=1.

On appelle les *<u>fonctions de Legendre associées</u> les fonctions suivantes* :

$$P_n^m(x) = (1-x^2)^{m/2}\frac{d^{n+m}}{dx^{n+m}}\frac{(x^2-1)^n}{2^n n!}, pour\ n\epsilon[-n;n]$$

EQUATIONS DIFFERENTIELLES

EQUATIONS DIFFERENTIELLES LINEAIRES DU 1^{ier} ORDRE

<u>Equations linéaires</u> $\frac{d\,y}{dx} + a(x)\,y = b(x)$

On peut séparer sa résolution en recherche de la solution générale de l'équation sans second membre, et d'une solution particulière.

- <u>Equation sans second membre :</u> $\frac{d\,y}{dx} + a(x)\,y = 0$ Résolution par séparation de variable : $\frac{d\,y}{y} = -a(x)\,dx$
- <u>Solution particulière :</u>

1 / recherche d'une solution évidente en fonction de la forme du second membre ;

2 / méthode de la variation de la constante : $y = A(x)\,y_0$ où y_0 est une solution de l'équation sans second membre.

EQUATIONS DIFFERENTIELLES NON LINEAIRES DU 1^{ier} ORDRE

<u>Equations non linéaires</u> $\frac{d\,y}{dx} = F\,(y, x)$ (pas de méthodes générales)

- Equation à variable séparable : $\frac{d\,y}{dx} = \Phi(y)\,\varphi(x)$. On a donc : $\frac{d\,y}{\Phi(y)} = \varphi(x)\,dx$
- Equation homogène : $\frac{d\,y}{dx} = F\,(\frac{y}{x})$. On pose $y = u\,x$. On obtient une équation à variable séparable d'inconnu u.
- Equation de Bernoulli : $\frac{d\,y}{dx} + P(x)\,y = Q(x)\,y^n$. On pose $z = y^{1-n}$. On obtient une équation linéaire.
- Equation aux dérivées totales : $P(x, y)\,dx + Q(x, y)\,dy = 0$, avec $\frac{\partial\,P}{\partial y} = \frac{\partial\,Q}{\partial x}$.

On peut alors trouver une fonction F(x,y) telle que $\frac{\partial\,F}{\partial x} = P$ et $\frac{\partial\,F}{\partial y} = Q$. L'équation devient $dF = 0$ soit $F(x, y) = C^{ste}$.

EQUATIONS DIFFERENTIELLES LINEAIRES DU 2nd ORDRE

<u>Equations linéaires</u> $\frac{d^2 y}{dx^2} + a(x)\frac{d y}{dx} + b(x)\, y = c(x)$

On peut séparer sa résolution en recherche de la solution générale de l'équation sans second membre, et d'une solution particulière

<u>Equation sans second membre :</u> $\frac{d^2 y}{dx^2} + a(x)\frac{d y}{dx} + b(x)\, y = 0$ (pas de méthodes générales)

- à coefficients C^st^ $\frac{d^2 y}{dx^2} + a\frac{d y}{dx} + b\, y = 0$. On résout $r^2 + a\, r + b = 0$, équation du 2nd degré, de discriminant Δ

$\Delta > 0$: deux racines réelles r_1 et r_2, $y = A\, e^{r_1 x} + B\, e^{r_2 x}$

$\Delta = 0$: une racine double r : $y = (A\, x + B)\, e^{r x}$

$\Delta < 0$: deux racines complexes conjuguées : $r = \alpha \pm i\, \beta$ soit $y = e^{\alpha x}(\, A \cos(\beta x) + B \sin(\beta x)\,)$

- si on connaît une des deux solutions générales u(x) (par astuce ou par résolution en série généralisée), on pose $y = u\, z$, où z est une fonction inconnue. On obtient une équa. dif. du 1ier ordre en z' que l'on peut résoudre, y compris avec le second membre.
- utiliser les séries de Frobénius (voir suite)
- utiliser les transformées de Laplace ou Fourier Y de la fonction inconnue y. (à condition de savoir exprimer y(x) connaissant Y(p) ou Y(ν)).

<u>Solution particulière :</u>

1/ recherche d'une solution évidente en fonction de la forme du second membre : x^n, $Q_n(x)e^{r x}$ … ;

2/ Méthode de la variation des constantes :

on cherche à déterminer les fonctions A(x) et B(x) tels que $y = A(x)\, y_1 + B(x)\, y_2$, où y_1 et y_2 sont deux solutions indépendantes de l'équation sans second membre.

On impose pour simplifier $A'(x)\, y_1 + B'(x)\, y_2 = 0$. On doit obtenir un système de la forme :

$$\begin{pmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A' \\ B' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ c \end{pmatrix}$$

(système ayant nécessairement une solution unique, propriété de l'équa. dif.)

EQUATIONS DIFFERENTIELLES NON LINEAIRES DU 2nd ORDRE

<u>Equations non linéaires</u> $\frac{d^2 y}{dx^2} = F(\frac{d y}{dx}, y, x)$ (pas de méthodes générales)

- Equation ne possédant pas de terme en y : il s'agit d'une équation du premier ordre en y'
- Equation ne possédant pas de terme en x : $\frac{d^2 y}{dx^2} = F(\frac{d y}{dx}, y)$

  On pose $z(y) = \frac{d y}{dx}$. On a par ailleurs : $\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{d z}{dx} = \frac{d z}{dy}\cdot\frac{d y}{dx} = z\frac{d z}{dy}$, soit $z\frac{d z}{dy} = F(\, z, y)$.

  Il s'agit d'une équation du premier ordre, de fonction inconnue z et de variable y.

- Equation ne possédant pas de termes en x et y' : $\frac{d^2 y}{dx^2} = F(y)$

  On a $\frac{d y}{dx}\cdot\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\frac{1}{2}\left(\frac{d y}{dx}\right)^2$ soit $d\frac{1}{2}\left(\frac{d y}{dx}\right)^2 = F(y)\, dy$

SOLUTIONS AUX EQUATIONS DIFFERENTIELLES LINEAIRES DU 2nd ORDRE SOUS LA FORME DE SERIES DE FROBENIUS

On cherche des solutions sous la forme $y(x) = x^s \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ avec $a_0 \neq 0$ à

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + a(x)\frac{dy}{dx} + b(x)\, y = 0$$

s est un nombre réel à déterminer. Si s est un entier positif, la série est une série entière. s est fixé par une équation du second degré, que l'on obtient à partir des termes de plus bas degré de l'équation (équation déterminante).

Si x a(x) et x^2 b(x) sont développables en série entière, l'équation est dite régulière, c'est à dire que l'on est sûr :

- soit de déterminer deux solutions S_1 et S_2 indépendantes,
- soit de déterminer une seule solution S_1 de l'équation. Dans ce cas, on peut trouver l'autre solution en posant $y = S_1\, z$ (comme préalablement cité) soit en cherchant la solution sous la forme

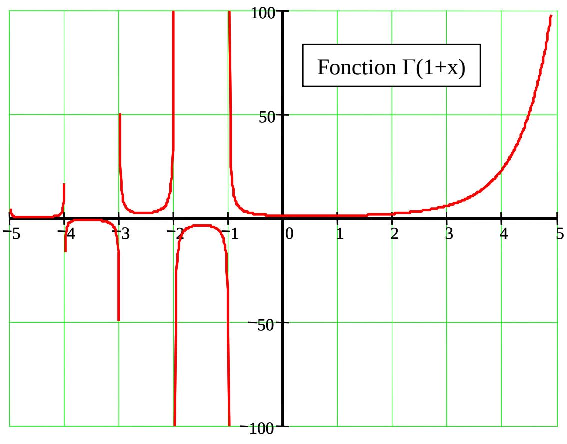
$$S_2(x) = S_1(x) \ln x + x^s \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n .$$

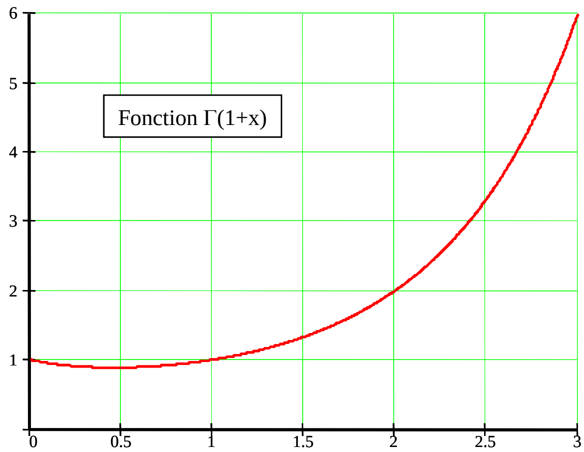
FONCTION GAMMA D'EULER

Fonction possédant la propriété pour tout x (non entier négatif) $\Gamma(1+x) = x\,\Gamma(x)$.

Si n est un nombre entier, on a : $\Gamma(n+1) = n!$ et $\Gamma(n+\frac{1}{2}) = \frac{(2n)!}{4^n\, n!}\sqrt{\pi}$

Pour x > -1, la fonction Gamma peut être définie sous la forme $\Gamma(1+x) = \int_0^{\infty} t^x\, e^{-t}\, dt$





FONCTIONS DE BESSEL

<u>Fonctions de Bessel de première espèce d'ordre p</u>, définies par

$$J_p(x) = \sum_{n=0} \frac{(-1)^n}{n!\,\Gamma(n+p+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n+p} \quad \text{(p réel)}$$

(Pour n un entier non nul, on considère que $\Gamma(-n)^{-1} \approx 0$, ce qui permet de conserver l'écriture précédente pour J_{-n}).

- $J_{-n}(x) = (-1)^n J_n(x)$, i.e. pour tout nombre entier n, J_{-n} est proportionnel à J_n, (faux pour p non entier).
- $x\frac{dJ_p}{dx} = p\,J_p - x\,J_{p+1}$ et $x\frac{dJ_p}{dx} = -p\,J_p + x\,J_{p-1}$ Csq : $2p\,J_p = x\,(J_{p+1} + J_{p-1})$ et $\frac{dJ_0}{dx} = -J_1$
- $J_{1/2} = \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\sin(x)$
- $\int_0^1 x\,J_p(\alpha x)\,J_p(\beta x)\,dx = 0$ si $\alpha \neq \beta$ ou $\frac{1}{2}(J_{p+1}(\alpha))^2$ si $\alpha = \beta$
- $J_{-1/2} = \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\cos(x)$

α et β sont <u>deux racines</u> de J_p

<u>Fonctions de Bessel de seconde espèce d'ordre p</u>, définies par : $N_p(x) = \frac{J_p(x)\cos(p\pi) - J_{-p}(x)}{\sin(p\pi)}$

Pour p non entier, N_p n'est qu'une combinaison linéaire de J_p et J_{-p}. Pour p = n entier, la formule précédente est une forme indéterminée 0 / 0, qui cependant admet une limite pour tout x, permettant ainsi de définir N_n.

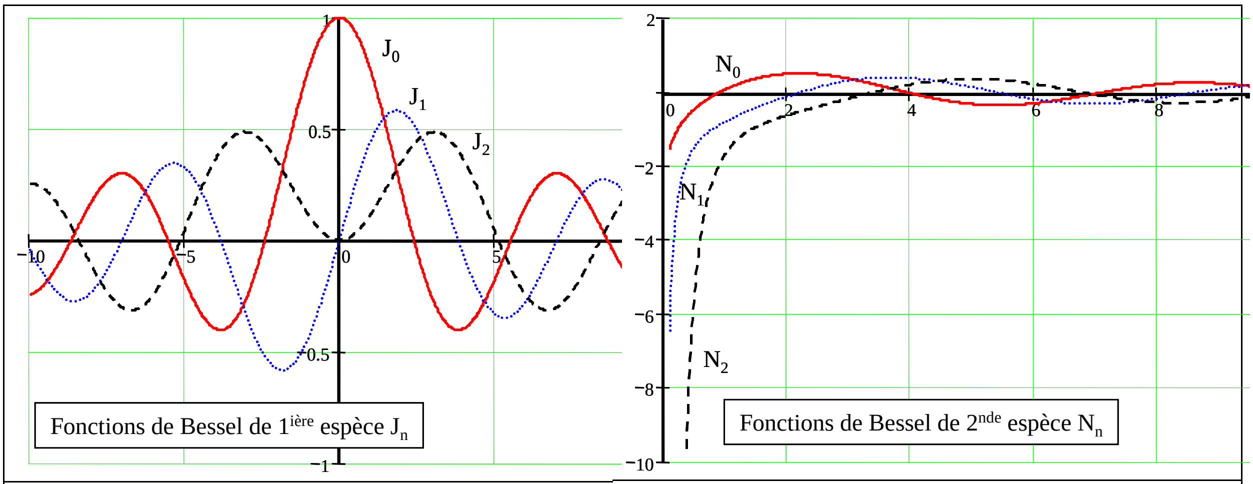
<u>Solutions de l'équation :</u> $\boxed{x^2\frac{d^2y}{dx^2} + x\frac{dy}{dx} + (x^2 - p^2)\,y = 0}$ avec p un nombre réel positif.

J_p, J_{-p}, N_p sont toujours solutions de l'équation précédente.
La question est de savoir quelle est la forme générale des solutions y.

- Pour p non entier : $y(x) = A\,J_p(x) + B\,J_{-p}(x)$ (N_p dans ce cas est une combinaison linéaire de J_p, J_{-p})
- Pour p = n + 1/2demi entier, l'écriture précédente est toujours valable, mais $J_{-n-1/2}$ et $J_{n+1/2}$ s'expriment en fonction de cos(x) et sin(x).
- Pour p = n entier, $y(x) = A\,J_n(x) + B\,N_n(x)$ (J_{-n} dans ce cas est proportionnel à J_n : $J_{-n}(x) = (-1)^n J_n(x)$)

<u>Solutions de l'équation :</u> $\boxed{\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{1-2a}{x}\frac{dy}{dx} + \left[(bc\,x^{c-1})^2 + \frac{a^2 - p^2c^2}{x^2}\right]y = 0}$ avec p un nombre réel positif

- Pour p non entier : $y(x) = A\,x^a J_p(b\,x^c) + B\,x^a J_{-p}(b\,x^c)$
- Pour p = n entier : $y(x) = A\,x^a J_n(b\,x^c) + B\,x^a N_n(b\,x^c)$



Développements asymptotiques des fonctions de Bessels

- Comportement au voisinage de x = 0 : $J_p(x) \approx \dfrac{1}{\Gamma(1+p)}\left(\dfrac{x}{2}\right)^p$ donc $J_0(0)=1$ et $J_p(0)=0$ pour p>0.

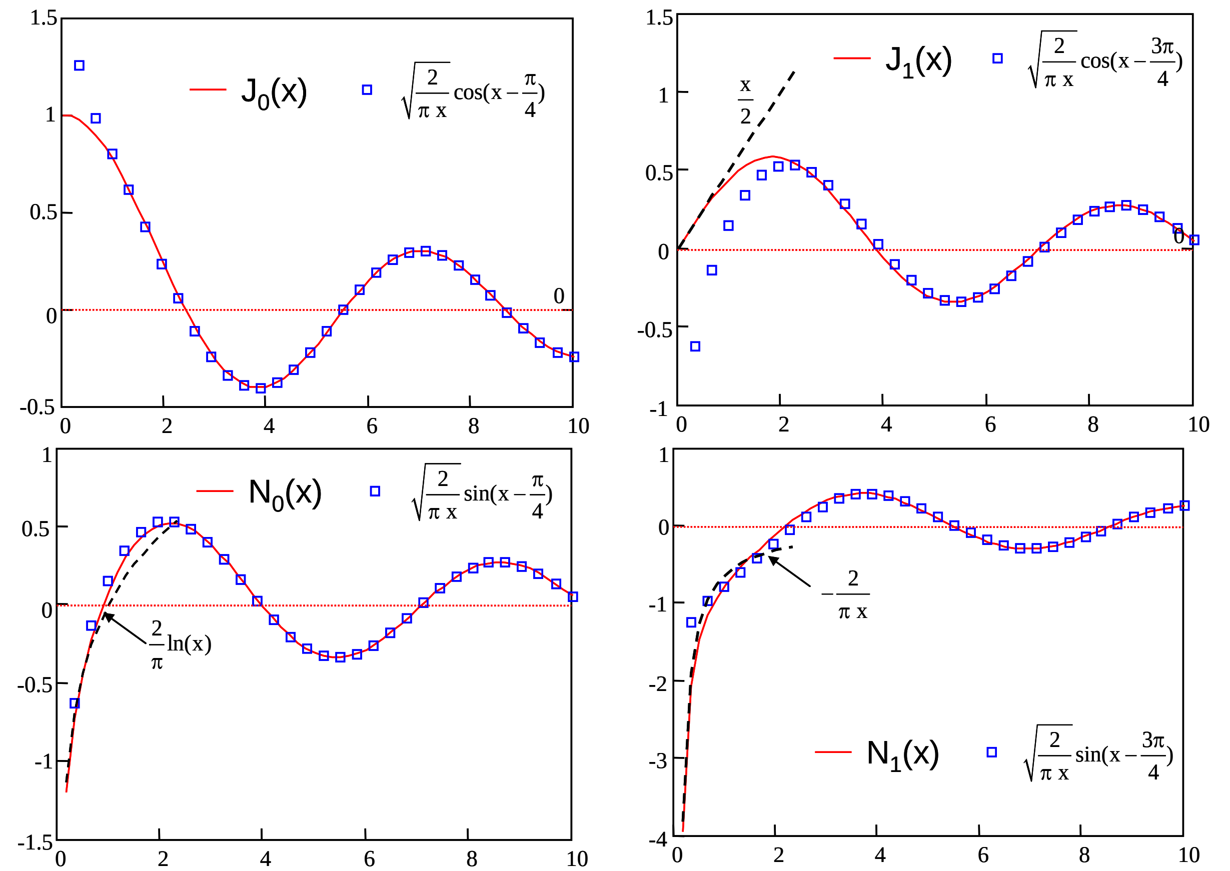
  $N_0(x) \approx \dfrac{2}{\pi}\ln(x)$ et $N_p(x) \approx -\dfrac{\Gamma(p)}{\pi}\left(\dfrac{2}{x}\right)^p$ pour p entier ≠ 0. Donc N_p n'a pas de valeurs finies en 0.

- Comportement au voisinage quand x tend vers +∞ :

$$J_p(x) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\cos\left(x - \frac{2p+1}{4}\pi\right) \quad \text{et} \quad N_p(x) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\sin\left(x - \frac{2p+1}{4}\pi\right)$$

J_p et N_p tendent vers 0 quand quand x tend vers +∞

Comparaison avec les développements asymptotiques en 0 et en +∞



POLYNOMES DE LEGENDRE

Fonction génératrice des polynômes :

$$\frac{1}{\sqrt{1-\rho\,(2\,x-\rho)}} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x)\,\rho^n \quad \text{avec} \quad P_n(x) = \sum_{k=0}^{[n/2]} \frac{(-1)^k\,(2n-2k)!}{2^n\,k!\,(n-k)!\,(n-2k)!}\,x^{n-2k}$$

P_n sont les polynômes de Legendre. [n/2] = q si n = 2q ou si n = 2q + 1.

On a $P_n(1)=1$. P_n a la parité de n.

Equation différentielle de Legendre : $\boxed{(1-x^2)\frac{d^2y}{dx^2} - 2x\frac{d\,y}{dx} + \nu(\nu+1)y = 0}$ avec ν un nombre réel.

- Pour ν non entier, les solutions sont des combinaisons linéaires de séries entières de rayon de convergence 1.
- Pour ν = n entier, les solutions sont des combinaisons linéaires du polynôme de Legendre P_n et d'une série entière de rayon de convergence 1.

Formule de récurrence : $(n+1)\,P_{n+1}(x) - (2n+1)\,x\,P_n(x) + n\,P_{n-1}(x) = 0$

$$\frac{d\,P_{n+1}}{dx} - \frac{d\,P_{n-1}}{dx} = (2n+1)\,P_n$$

Formule de Rodrigues : $P_n(x) = \dfrac{1}{2^n\,n\,!}\dfrac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^n$

Orthogonalité des polynômes : $\displaystyle\int_{-1}^{1} P_n(x)\,P_m(x)\,dx = \frac{2}{2n+1}\,\delta_{n\,m}$

$$P_0(x) = 1 \qquad P_1(x) = x$$

$$P_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2-1) \qquad P_3(x) = \frac{1}{2}(5x^3-3x)$$

$$P_4(x) = \frac{1}{8}(35x^4-30x^2+3) \qquad P_5(x) = \frac{1}{8}(63x^5-70x^3+15x)$$

FONCTIONS DE LEGENDRE ASSOCIEES

$$P_n^m(x) = (1-x^2)^{m/2} \frac{d^m}{dx^m} P_n(x) = \frac{(1-x^2)^{m/2}}{2^n n!} \frac{d^{n+m}}{dx^{n+m}} (x^2-1)^n$$

solutions particulières de : $\boxed{(1-x^2)\frac{d^2y}{dx^2} - 2x\frac{d\,y}{dx} + \left(n(n+1) - \frac{m^2}{1-x^2}\right) y = 0}$

(seules solutions finies sur [- 1, 1])

Applications : laplacien en coordonnées sphériques, partie angulaire

$$P_1^1(x) = (1-x^2)^{1/2}$$
$$P_2^1(x) = 3\,x\,(1-x^2)^{1/2}$$
$$P_2^2(x) = 3\,(1-x^2)$$
$$P_3^1(x) = \frac{3}{2}(1-x^2)^{1/2}(5x^2-1)$$
$$P_3^2(x) = 15\,x\,(1-x^2)$$
$$P_3^3(x) = 15\,(1-x^2)^{3/2}$$

$$P_1^1(\cos\theta) = \sin\theta$$
$$P_2^1(\cos\theta) = \frac{3}{2}\sin 2\theta$$
$$P_2^2(\cos\theta) = \frac{3}{2}(1-\cos 2\theta)$$
$$P_3^1(\cos\theta) = \frac{3}{8}(\sin\theta + 5\sin 3\theta)$$
$$P_3^2(\cos\theta) = \frac{15}{4}(\cos\theta - \cos 3\theta)$$
$$P_3^3(\cos\theta) = \frac{15}{4}(3\sin\theta - \sin 3\theta)$$