

TD n°1
CALCUL DIFFÉRENTIEL

Exercice 1

Calculer les dérivées partielles des fonctions suivantes :

1. $f(x, y) = e^x \cos(y)$.
2. $f(x, y) = (x^2 + y^2) \cos(xy)$.
3. $f(x, y) = \sqrt{1 + x^2 y^2}$.
4. $f(x, y) = \arctan(x + y^2)$.
5. $f(x, y) = \ln(1 + xy)$.

Exercice 2

Calculer les dérivées partielles à l'ordre 2 des fonctions suivantes :

1. $f(x, y) = x^2(x + y)$.
2. $f(x, y) = e^{xy}$.

Exercice 3

Pour les fonctions de deux variables suivantes, calculer les dérivées partielles $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$.

$$f(x, y) = \tan(xy) + y, f(x, y) = \frac{x + y}{1 + x^2 y}, f(x, y) = e^{x+y} \ln\left(\frac{x}{y}\right).$$

Exercice 4

Déterminer toutes les fonctions $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1 solutions des systèmes suivants :

$$\mathbf{1.} \begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = xy^2. \\ \frac{\partial f}{\partial y} = yx^2. \end{cases} \quad \mathbf{2.} \begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = e^{xy}. \\ \frac{\partial f}{\partial y} = e^x + 2y. \end{cases} \quad \mathbf{3.} \begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = x^2 y. \\ \frac{\partial f}{\partial y} = xy^2. \end{cases}$$

Exercice 5

On considère les fonctions $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ et $g : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ définies par

$$f(x, y) = (\sin(xy), y \cos(x), xy \sin(xy) \exp(y^2)), g(u, v, w) = uvw.$$

1. Calculer explicitement $g \circ f$.
2. En utilisant l'expression trouvée en (1), calculer les dérivées partielles de $g \circ f$.

TD n°2
COMMANDE DYNAMIQUE ET MODE GLISSANT

Exercice 1 :

L'équation dynamique non linéaire pour un pendule est donnée par :

$$ml\ddot{\theta} = -mg \sin(\theta) - kl\dot{\theta},$$

où l est la longueur du pendule, m est la masse du tige, et θ est l'angle sous-tendu par la tige et l'axe vertical passant par le point de pivot, voir la figure 1.

1. Choisissez les variables d'état appropriées et notez les équations d'état.
2. Trouver tous les points d'équilibre du système.
3. Linéariser le système autour des points d'équilibre et déterminer si les points d'équilibre du système sont stables ou non.

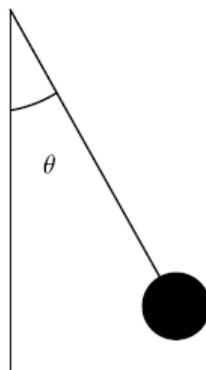


FIGURE 1 – Le pendule.

Exercice 2 :

Les équations dynamiques non linéaires pour un manipulateur à liaison unique, voir Figure 2, avec des joints flexibles, amortissement ignoré, est donnée par :

$$\begin{aligned} I\ddot{q}_1 + MgL \sin(q_1) + k(q_1 - q_2) &= 0 \\ J\ddot{q}_2 - k(q_1 - q_2) &= u, \end{aligned}$$

Choisissez des variables d'état pour ce système et écrivez les équations d'état.

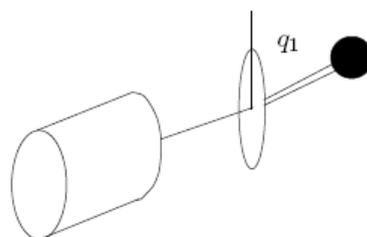


FIGURE 2 – Le manipulateur flexible.

Exercice 3 :

Un générateur synchrone connecté à un bus infini peut être modélisé par :

$$M\ddot{\delta} = P - D\dot{\delta} - \eta_1 E_q \sin(\delta)$$

$$\tau \dot{E}_q = -\eta_2 E_q + \eta_3 \cos(\delta) + E_{FD},$$

où δ est l'angle en radians, E_q est la tension, P est la puissance d'entrée mécanique, E_{FD} est la tension de champ (entrée), D est le coefficient d'amortissement, M est le coefficient d'inertie, est une constante de temps et η_1, η_2 et η_3 sont des paramètres constants.

1. En utilisant $\delta, \dot{\delta}$, et E_q comme variables d'état, trouvez l'équation d'état.
2. Supposons que τ soit relativement grand de sorte que $\dot{E}_q \approx 0$. Montrez que supposant que E_q est constant réduit le modèle à une équation du pendule.
3. Pour le modèle simplifié, dérivé en 2, trouvez tous les points d'équilibre.

Exercice 4 :

Considérons le système :

$$\ddot{x} + d\dot{x}^3 + kx = 0.$$

Montrer que :

$$V(x) = \frac{1}{2}(kx^2 + \dot{x}^2)$$

est une fonction de Lyapunov. Le système est-il localement stable, localement asymptotiquement stable et globalement asymptotiquement stable ?

Exercice 5 :

Considérons le système :

$$\dot{x}_1 = x_2$$

$$\dot{x}_2 = -2x_1 - 2x_2 - 4x_1^3$$

Utiliser la fonction

$$V(x) = 4x_1^2 + 2x_2^2 + 4x_1^4$$

pour montrer que :

1. le système est globalement stable autour de l'origine.
2. l'origine est globalement asymptotiquement stable.

Exercice 6 :

Considérons un système linéaire :

$$\dot{x}_1 = ax_2 + bu$$

$$\dot{x}_2 = x_1$$

avec des valeurs nominales des paramètres $a = 1, b = 1$. Les équations du système ont été obtenues par linéarisation d'un système non linéaire, ce qui a pour conséquence que les paramètres a et b varient dans la région de fonctionnement.

L'un des paramètres de conception dans la conception d'un contrôleur par mode glissant est le choix de la surface de glissement.

Laquelle des surfaces de glissement suivantes entraînera un mode de glissement stable pour le système ci-dessus ?

- (i) $\sigma(x) = x_1 - x_2$
- (ii) $\sigma(x) = x_1 + 2x_2$
- (iii) $\sigma(x) = x_1$

Exercice 7 :

Considérons le système :

$$\dot{x}_1 = 2x_1 - x_2 + u$$

$$\dot{x}_2 = x_1$$

Concevoir un contrôleur par mode glissant tel que l'origine puisse être globalement asymptotiquement stable.

TP

COMMANDE À STRUCTURE VARIABLE (MODE GLISSANT CLASSIQUE)

Introduction :

La commande en présence d'incertitude est l'un des principaux sujets de la théorie moderne de commande. Dans la formulation de tout problème de commande, il y a toujours un écart entre la dynamique réelle du système et son modèle mathématique utilisé pour la conception du contrôleur. Ces écarts proviennent principalement de facteurs tels que les perturbations externes, paramètres inconnus du système et des dynamiques parasites. Concevoir des lois de commande qui fournissent les performances souhaitées du système en boucle fermée en présence de ces perturbations/incertitudes est une tâche très difficile pour un ingénieur automatique. Cela a conduit à un vif intérêt pour le développement des méthodes de commande dites robustes, qui sont censées résoudre ce problème.

Malgré le développement étendu et réussi des techniques de commande adaptative robuste, de commande \mathcal{H}_∞ et commande par backstepping, la commande par mode glissant (SMC) reste probablement l'approche la plus efficace pour gérer les incertitudes/perturbations bornées et dynamique parasite.

Historiquement, les modes de glissement ont été découverts en tant que mode spécial dans les systèmes à structure variable (VSS). Ces systèmes comprennent une variété de structures, avec des règles pour basculer entre les structures en temps réel pour obtenir des performances appropriées pour un système, alors que l'utilisation d'une seule structure fixe pourrait être instable. Le résultat qui peut être considéré comme une combinaison de sous-systèmes où chaque sous-système a une structure de commande fixe et est valable pour des régions spécifiées de comportement du système. Il est apparu que le système en boucle fermée peut être conçu pour posséder de nouvelles propriétés qui ne sont présentes dans aucune des sous-structures constitutives seules. De plus, dans un mode spécial, appelé mode glissant, ces propriétés incluent l'insensibilité à certaines perturbations externes et les incertitudes du modèle ainsi que la robustesse vis-à-vis les dynamiques parasites.

L'idée de la commande par mode glissant est basée sur l'introduction d'une fonction "sur mesure", appelée variable glissante. Dès que la variable de glissement correctement conçue devient égale à zéro, elle définit la surface de glissement.

Solutions d'équations différentielles ordinaires :

Les solutions numériques des équations différentielles ordinaires (EDO) sont, en fait, les fondements des techniques de simulation de systèmes dynamiques. Supposons que l'équation différentielle du premier ordre est décrite par :

$$\dot{x}_i = f_i(t, x), \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

où \mathbf{x} est le vecteur de variable d'état, $\mathbf{x} = [x_1, x_2, \dots, x_n]^T$, t est la variable de temps, $\mathbf{x}(0)$ est le vecteur d'état initial et n est l'ordre du système.

Les fonctions $f_i(\cdot)$ sont des fonctions non linéaires arbitraires. Des algorithmes numériques peuvent être utilisés pour résoudre les EDO.

Il existe différents algorithmes pour les solutions numériques d'EDO. Les plus couramment utilisés sont l'algorithme d'Euler, l'algorithme de Runge-Kutta, la méthode multi-étapes d'Adams et l'algorithme Gear. Il existe également de nombreux algorithmes pour les équations rigides et d'autres types d'EDO. Plusieurs solveurs ODE sont fournis, tels que `ode23()`, `ode45()`, `ode15s()` et `ode113()`, où Runge-Kutta-Fehlberg, Adams-Bashforth-Moulton, sont implémentés. Ces méthodes prennent toutes en charge le pas variable.

Les syntaxes des fonctions sont les mêmes

`[t, x]=ode23(Fun,tspan,x0,options,additional parameters)`

`[t, x]=ode45(Fun,tspan,x0,options,additional parameters)`

`[t, x]=ode15s(Fun,tspan,x0,options,additional parameters)`

`[t, x]=ode113(Fun,tspan,x0,options,additional parameters)`

où les options sont accessibles avec les commandes `odeget()` et `odeset()`.

Trois méthodes peuvent être utilisées pour décrire les EDO. La fonction peut être exprimée par des M-fonctions, des fonctions anonymes et des fonctions inline. Elle sera appelée "fonction descriptive ODE". La variable `tspan` peut être utilisée pour décrire la plage de simulation, c'est-à-dire $tspan = [t_0, t_f]$, où t_0 et t_f sont respectivement les instances de temps de début et de fin.

Avec ces paramètres, les solveurs ODE peuvent être utilisés pour résoudre directement les systèmes. Après l'appel de la fonction, deux arguments `t` et `x` sont renvoyés, où `t` est le vecteur des instances temporelles.

Étant donné que le pas variable est autorisé, il peut ne pas être espacé uniformément. Une autre variable `x` renvoie les états des résultats de la simulation, où la i ème colonne représente les valeurs de l'état $x_i(t)$ à toutes les instances temporelles.

Le tracé de l'état en fonction du temps peut être tracé avec la commande `plot(t,x)`, et la trajectoire de l'espace des phases peut être tracée avec `plot(x(:,i), x(:,j))`.

La syntaxe des fonctions descriptives ODE est assez standard. L'énoncé principal dans la fonction descriptive ODE est

Function `x1=Fun(t,x,additional parameters)`

où `t` est la variable temporelle, `x` est le vecteur d'état et `x1` est la dérivée du vecteur d'état.

S'il y a des paramètres supplémentaires à transférer, ils doivent être donnés à la fois dans les solveurs et dans la fonction descriptive ODE. Le nombre de variables et le format dans les deux fonctions doivent être les mêmes.

Exemple 1 :

Supposons que l'équation de Lorenz est décrite par :

$$\begin{aligned}\dot{x}_1(t) &= -8x_1(t)/3 + x_2(t)x_3(t) \\ \dot{x}_2(t) &= -10x_2(t) + 10x_3(t) \\ \dot{x}_3(t) &= -x_1(t)x_2(t) + 28x_2(t) - x_3(t),\end{aligned}$$

et les états initiaux $x_1(0) = x_2(0) = 0, x_3(0) = \epsilon$ sont connus, où $\epsilon = 1.0 \times 10^{-10}$.

L'équation différentielle d'origine peut être exprimée par la fonction anonyme suivante et l'ODE d'origine peut être résolue avec la fonction `ode45()`

```
>> f=@(t,x)[-8/3*x(1)+x(2)*x(3);-10*x(2)+10*x(3);-x(1)*x(2)+28*x(2)-x(3)];
t_final=100;x0=[0;0;1e-10];
[t,x]=ode45(f,[0,t_final],x0);plot(t,x)
figure;plot3(x(:,1),x(:,2),x(:,3)), axis ([10 40 -20 20 -20 40]);
```

On peut voir que le problème ODE apparemment compliqué peut être résolu facilement avec seulement quelques instructions MATLAB.

Exemple 2 :

Considérons l'équation bien connue de Van der Pol $\ddot{y} + \mu(y^2 - 1)\dot{y} + y = 0$. En sélectionnant les variables d'état $x_1 = y$ et $x_2 = \dot{y}$, l'équation d'origine peut être transformée sous la forme :

$$\begin{aligned}\dot{x}_1(t) &= x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) &= -\mu(x_1^2(t) - 1)x_2(t) - x_1(t),\end{aligned}$$

Étant donné que μ peut être affecté en tant que variable supplémentaire, il peut être plus facile de modifier la valeur de sans réécrire la fonction descriptive ODE. Nous pouvons utiliser la fonction anonyme pour décrire l'ODE d'origine. Ensuite, le solveur `ode45()` peut être utilisé pour résoudre numériquement l'ODE décrite par `f`. La valeur de μ peut être affectée dans l'espace de travail MATLAB, avant le processus de résolution. En supposant que les états initiaux soient donnés par $x_0 = [-0.2, -0.7]$, les solutions de l'ODE peuvent être complétées par les instructions MATLAB suivantes :

```
>> f=@(t,x,mu)[x(2);-mu*(x(1)^2-1)*x(2)-x(1)];
h_opt=odeset;x0=[-0.2;-0.7];t_final=20;
mu=1;[t1,y1]=ode45(f,[0,t_final],x0,h_opt,mu);
mu=2;[t2,y2]=ode45(f,[0,t_final],x0,h_opt,mu);
plot(t1,y1,t2,y2,'--'),
figure;plot(y1(:,1),y1(:,2),y2(:,1),y2(:,2),'--')
```

Si la valeur de μ est modifiée, par exemple, $\mu = 1000$, et que le t_{final} est définie égal à 3000, les solutions de l'équation de Van der Pol peuvent être essayées avec les commandes suivantes :

```
h_opt=odeset;x0=[2;0];t_final=3000;
mu=1000;[t1,y1]=ode45(f,[0,t_final],x0,h_opt,mu);
```

Le temps d'attente sera long (et cela vaut la peine d'utiliser `Ctrl-C` pour terminer la solution), les messages d'erreur suivants

```
"??? Error using == > vertcat"
```

s'affichera.

En fait, étant donné que le pas variable est utilisé, pour satisfaire la tolérance d'erreur requise, le pas peut être sélectionné extrêmement petite, de sorte que la mémoire peut ne pas être suffisante. Cette ODE est une équation rigide et doit être résolue avec d'autres algorithmes.

Mode glissant conventionnel :

Cette partie concerne le développement des méthodes conventionnelles de commande par mode glissant. La section décrit les travaux visant à définir la notion de solution d'équations différentielles à seconds membres discontinus et le concept de "commande équivalente" comme moyen de décrire la dynamique d'ordre réduit pendant qu'un mouvement de glissement a lieu. L'objectif principal de ce TP est le développement de techniques de conception de mode glissant pour les systèmes linéaires incertains-en particulier les systèmes qui peuvent être considérés comme principalement linéaires dans une caractéristique, ou les systèmes non linéaires qui peuvent être bien modélisés (au moins localement) par un système linéaire. Pour de tels systèmes, des surfaces de glissement formées à partir de combinaisons linéaires d'états sont considérées.

Considérons un système d'espace d'état :

$$\dot{x} = f(x, u, d), \quad (1)$$

où $x \in \mathbb{R}^n$ est un vecteur qui représente l'état et $u \in \mathbb{R}^m$ est l'entrée de commande. On suppose que $f(\cdot)$ est dérivable par rapport à x et absolument continue par rapport au temps. La quantité $d \in \mathbb{R}^q$ représente les perturbations/incertitudes externes bornées au sein du système. Considérons une surface dans l'espace d'état donné par :

$$\mathcal{S} = \{x : \sigma(x) = 0\} \quad (2)$$

Une définition formelle d'un mode de glissement idéal va maintenant être donnée.

Définition : On dit qu'un mode de glissement idéal a lieu sur l'équation (2) si les états $x(t)$ évoluent avec le temps tel que $\sigma(x(t_r)) = 0$ pour un certain $t_r \in \mathbb{R}^+$ fini et $\sigma(x(t)) = 0$ pour tout $t > t_r$.

Concept de la commande équivalente :

Une façon d'entreprendre cette analyse est la méthode dite de commande équivalente attribuée à Utkin. Cela définit la commande équivalente comme l'action de contrôle nécessaire pour maintenir un mouvement de glissement idéal sur \mathcal{S} .

L'idée est d'exploiter le fait que dans les modes de glissement conventionnels à la fois $\dot{\sigma} = \sigma = 0$. La contrainte sur la dérivée de σ peut être écrite comme :

$$\dot{\sigma} = \frac{\partial \sigma}{\partial x} \frac{dx}{dt} = \frac{\partial \sigma}{\partial x} f(x, u, d) = 0$$

Cela représente une équation algébrique en x , u et d , et par définition, le signal de commande équivalente $u_{eq}(t)$, qui est la fonction de commande continue requise pour maintenir le glissement, est la solution de :

$$\frac{\partial \sigma}{\partial x} f(x, u_{eq}, d) = 0 \quad (3)$$

Par exemple, considérons le système affine

$$\dot{x} = f(x) + g(x)u + d \quad (4)$$

La structure particulière qui a été imposée ici assure que pour un x donné l'entrée de commande apparaît linéairement.

Par conséquent, l'Éq (3) se simplifie en :

$$\frac{\partial \sigma}{\partial x} f(x) + \frac{\partial \sigma}{\partial x} g(x)u_{eq} + \frac{\partial \sigma}{\partial x} d = 0 \quad (5)$$

et donc, à condition que $\frac{\partial \sigma}{\partial x} g(x)$ ne soit pas singulier, à partir de l'Éq (5)

$$u_{eq} = -\left(\frac{\partial \sigma}{\partial x} g(x)\right)^{-1} \frac{\partial \sigma}{\partial x} f(x) - \left(\frac{\partial \sigma}{\partial x} g(x)\right)^{-1} \frac{\partial \sigma}{\partial x} d \quad (6)$$

La réponse en boucle fermée est donnée en substituant l'expression dans l'équation (6) dans l'équation (4) pour donner :

$$\dot{x} = \left(I - g(x)\left(\frac{\partial \sigma}{\partial x} g(x)\right)^{-1} \frac{\partial \sigma}{\partial x}\right) f(x) + \left(I - g(x)\left(\frac{\partial \sigma}{\partial x} g(x)\right)^{-1} \frac{\partial \sigma}{\partial x}\right) d \quad (7)$$

Exemple 3 :

Considérons le système linéaire multi-entrée multi-sortie (MIMO) suivant :

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_1 + x_2 + x_3 + u_2 \\ \dot{x}_2 &= x_2 + 3x_3 + u_1 - u_2 \\ \dot{x}_3 &= x_1 + x_3 - u_1 \end{aligned}$$

et les surfaces de sortie correspondantes :

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= -x_1 + 10x_3 \\ \sigma_2 &= x_2 + x_3 \end{aligned}$$

En appliquant le concept de la commande équivalente, nous devons trouver la dynamique des modes de glissement à l'intersection des surfaces de sortie σ_1 et σ_2 , c'est-à-dire,

$$\begin{aligned} \dot{\sigma}_1 &= 9x_1 - x_2 + 9x_3 - 10u_1 + u_2 \\ \dot{\sigma}_2 &= x_1 + x_2 + 4x_3 - u_2 \end{aligned}$$

À partir des conditions d'invariance $\dot{\sigma}_1 = 0$, $\sigma_1 = 0$ et $\dot{\sigma}_2 = 0$, $\sigma_2 = 0$ nous obtenons :

$$\begin{aligned} u_{1eq} &= -x_1 - 2x_2 - 4x_3 \\ u_{2eq} &= x_1 + 1.3x_3 \end{aligned}$$

et la dynamique réduite du système d'origine est donnée par :

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= 10x_3 \\ \dot{x}_2 &= -x_3 \\ \dot{x}_3 &= -0.3x_3 \end{aligned}$$

Travail demandé :

Considérons le système à structure variable suivant :

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -x_1 + 2x_2 + u\end{aligned}$$

où $u = -4x_1 \text{sign}(\sigma(x_1, x_2))$, $\sigma(x_1, x_2) = x_1(0.5x_1 + x_2)$.

1. Dessiner les portraits de plan de phase de deux sous-systèmes linéaires qui constituent le système de structure variable donné ;
2. Dessiner un portrait de plan de phase du système de structure variable ;
3. Dessiner le signal de commande u ;
4. Dessiner les variable d'état du système ;
5. Que peut-on conclure sur la stabilité du système ?

Exercice :

(a) Pour le modèle de système dynamique,

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} u, \quad (8)$$

Construire la surface de commutation :

$$\sigma(\mathbf{x}) = s\mathbf{x} = 0,$$

tel que le système en mode glissant le long de la surface a son pôle égal à -2 .

(b) Considérons le modèle suivant d'un système dynamique :

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & -2 & 2 \\ -1 & -2 & 3 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} u, \quad (9)$$

Concevoir une surface de commutation $\sigma(\mathbf{x}) = s\mathbf{x} = 0$ telle que le système qui lui est restreint ait des pôles à $-4, -5$.

(c) Étant donné le modèle de système dynamique suivant,

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & -2 & 2 \\ -1 & -2 & 3 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} u, \quad (10)$$

avec la surface de commutation $\sigma(\mathbf{x}) = s\mathbf{x} = [8 \ 8 \ -15] \mathbf{x} = 0$.

Déterminer les équations d'ordre réduit qui décrivent le comportement du système en mode glissant.