

Chapitre 5

Les polynômes orthogonaux

Les polynômes orthogonaux sont très importants en physique. Ce sont les solutions d'équations qui surviennent très souvent lorsqu'un problème possède une symétrie sphérique. Les polynômes orthogonaux sont profondément liés à la mécanique quantique et ils sont présents dans de nombreuses applications, telles que la théorie électromagnétique, l'hydrodynamique et la conduction thermique. En ingénierie, les polynômes orthogonaux apparaissent dans de nombreuses applications, par exemple dans la théorie des lignes de transmission, la théorie des circuits électriques, la physique des réacteurs nucléaires ainsi que la sismologie.

5.1 Polynômes de Legendre

Adrien-Marie Legendre a introduit, en 1784, les polynômes de Legendre, tout en étudiant l'attraction des sphéroïdes et des ellipsoïdes. Ces polynômes sont les solutions d'une équation différentielle ordinaire appelée équation différentielle de Legendre. Cette équation est fréquemment rencontrée en physique et en ingénierie. En particulier, cela se produit lors de la résolution de l'équation de Laplace en coordonnées sphériques. L'équation de Legendre est donnée par

$$(1 - x^2) \frac{d^2 y}{dx^2} - 2x \frac{dy}{dx} + l(l + 1)y = 0 \quad (5.1)$$

dans le cas générale $l \in \mathbb{R}$. L'équation (5.1) est solvable par la méthode de Frobenius (qui a été utilisée pour résoudre les équations de Bessel). Les solutions ont la forme de séries entières et elles sont convergentes uniquement dans le domaine $-1 < x < 1$. Dans le cas où $l \in \mathbb{N}$, il est possible d'obtenir des solutions qui sont régulières aux points $x \pm 1$, et pour lesquelles la série s'arrête au terme de degré l . Dans le dernier cas, la solution de l'Eq. (5.1) est appelée polynôme de Legendre. Elle est donnée par

$$P_l(x) = \sum_{r=0}^{\lfloor l/2 \rfloor} (-1)^r \frac{(2l - 2r)!}{2^l r! (l - r)! (l - 2r)!} x^{l-2r} \quad -1 \leq x \leq 1 \quad (5.2)$$

Notons que la solution (5.2) est convergente seulement dans le domaine $[-1, 1]$. Les points $x \pm 1$ sont des points singuliers réguliers de l'équation différentielle (5.1).

Démonstration

Avant de chercher la solution de l'Eq. (5.1), cherchons d'abord le domaine de convergence. Pour cela, on utilise le théorème suivant; si on a une équation différentielle de la forme

$$x^2 \frac{d^2 y}{dx^2} - xq(x) \frac{dy}{dx} + p(x)y = 0 \quad (5.3)$$

et si $q(x)$ et $p(x)$ peuvent être développées sous les formes

$$q(x) = \sum_{n=0}^{\infty} q_n x^n, \\ p(x) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n x^n$$

donc, le domaine de convergence de la solution de l'Eq. (5.3) est la même que le domaine de convergence de $q(x)$ et $p(x)$.

Pour déterminer les fonction $p(x)$ et $q(x)$, on écrit l'Eq. (5.1) sous la forme

$$x^2 \frac{d^2 y}{dx^2} - x \frac{2x^2}{1-x^2} \frac{dy}{dx} + \frac{l(l+1)x^2}{1-x^2} y = 0$$

En comparant avec l'Eq. (5.3), on déduit que

$$q(x) = \frac{2x^2}{1-x^2}, \\ p(x) = \frac{l(l+1)x^2}{1-x^2}$$

Le développement en série entière des fonctions $q(x)$ et $p(x)$ est

$$q(x) = 2x^2 \sum_{m=0}^{\infty} x^{2m}, \\ p(x) = l(l+1)x^2 \sum_{m=0}^{\infty} x^{2m}$$

donc les fonctions $q(x)$ et $p(x)$ sont convergentes seulement dans l'intervalle $-1 < x < 1$. Pour résoudre l'Eq. (5.1), on utilise la méthode de Frobenius qui consiste à chercher des solutions sous forme de séries entières

$$y(x, s) = \sum_{r=0}^{\infty} a_r x^{r+s}$$

Si on insère y , sa dérivée y' et la dérivée seconde y'' dans l'Eq. (5.1), on trouve trois équations indiciales

$$\begin{aligned} a_0 s(s-1) &= 0, \\ a_1 s(s+1) &= 0, \\ a_{n+2}(s+n+2)(s+n+1) - a_n \{(s+n)(s+n+1) - l(l+1)\} &= 0 \quad n \geq 0 \end{aligned}$$

Pour a_0 et a_1 arbitraires et différents de 0, les équations indiciales admettent comme solutions

$$s = 0, \quad s = 1$$

et

$$\begin{aligned} a_{n+2} &= a_n \frac{n(n+1) - l(l+1)}{(n+1)(n+2)} \\ &= a_n \frac{(n-l)(l+n+1)}{(n+1)(n+2)} \end{aligned}$$

Pour déduire la forme du terme général a_n en fonction de a_0 (ou a_1) et n , on considère quelques cas particuliers

$$\begin{aligned} a_2 &= -a_0 l(l+1) \\ a_3 &= a_1 \frac{(1-l)(l+2)}{2.3} \\ a_4 &= -a_2 \frac{(l-2)(l+3)}{3.4} \\ &= a_0 \frac{l(l-2)(l+1)(l+3)}{1.2.3.4} \\ a_5 &= -a_3 \frac{(l-3)(l+4)}{4.5} \\ &= a_1 \frac{(l-1)(l-3)(l+2)(l+4)}{1.2.3.4.5} \end{aligned}$$

A partir des équations précédentes on peut déduire le terme général qui est donné par

$$\begin{aligned} a_{2n} &= \frac{(-1)^n a_0}{(2n)!} l(l-2)(l-4) \dots (l-2n+2)(l+1)(l+3) \dots (l+2n-1) \\ a_{2n+1} &= \frac{(-1)^n a_1}{(2n+1)!} (l-1)(l-3) \dots (l-2n+1)(l+2)(l+4) \dots (l+2n) \end{aligned}$$

Donc, la solution générale peut être écrite sous la forme

$$\begin{aligned} y(x, 0) &= a_0 \left\{ 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{l(l-2)(l-4) \dots (l-2n+2)(l+1)(l+3) \dots (l+2n-1)}{(2n)!} x^{2n} \right\} \\ &\quad + a_1 \left\{ x + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(l-1)(l-3) \dots (l-2n+1)(l+2)(l+4) \dots (l+2n)}{(2n+1)!} x^{2n+1} \right\} \\ &= a_0 y_1(x) + a_1 y_2(x) \end{aligned}$$

Nous soulignons que cette solution est valable dans l'intervalle $-1 < x < 1$. Afin d'étendre la solution aux points $x = -1$ and $x = 1$, nous utilisons l'observation suivante: si l est pair, i.e., $l = 2n$, on a

$$\begin{aligned} a_2 \neq 0, a_4 \neq 0, \dots, a_{2n} \neq 0, \\ a_{2n+2} = a_{2n+4} = \dots = 0 \end{aligned}$$

et si l est impair, i.e., $l = 2n + 1$

$$\begin{aligned} a_3 \neq 0, a_5 \neq 0, \dots, a_{2n+1} \neq 0, \\ a_{2n+3} = a_{2n+5} = \dots = 0 \end{aligned}$$

Donc pour $l = 2n$, le polynôme $y_2(x)$ est nul et $y_1(x)$ devient fini pour tout x à l'intérieur de l'intervalle $[-1, 1]$ et on a l'inverse pour $l = 2n + 1$ où le polynôme $y_1(x)$ est nul tandis que le polynôme $y_2(x)$ devient fini pour tout x à l'intérieur de l'intervalle $[-1, 1]$. La solution de l'équation de Legendre dans l'intervalle $[-1, 1]$ est donc donnée soit par $y_1(x)$ (dans le cas où l est pair) ou par $y_2(x)$ (si l est impair). $y(x)$ peut être écrit sous la forme générale

$$\begin{aligned} y(x) &= a_l x^l + a_{l-2} x^{l-2} + a_{l-4} x^{l-4} + \dots + \begin{cases} a_0 & \text{si } l \text{ est pair} \\ a_1 & \text{si } l \text{ est impair} \end{cases} \\ &= \sum_{r=0}^{\lfloor l/2 \rfloor} a_{l-2r} x^{l-2r} \end{aligned} \quad (5.4)$$

$\lfloor l/2 \rfloor$ est la fonction de plafond ("ceiling function") et elle définie par

$$\left\lfloor \frac{l}{2} \right\rfloor = \begin{cases} \frac{l}{2} & \text{si } l \text{ est pair} \\ \frac{l-1}{2} & \text{si } l \text{ est impair} \end{cases}$$

a_{l-2r} peut être déduit de la forme générale de a_n . On a

$$a_n = -a_{n+2} \frac{(n+2)(n+1)}{(l-n)(l+n+1)}$$

En remplaçant n par $l-2$ dans l'équation précédente, on trouve

$$a_{l-2} = -a_l \frac{l(l-1)}{2(2l-1)}$$

pour $n = l-4$ on obtient

$$\begin{aligned} a_{l-4} &= a_{l-2} \frac{(l-2)(l-3)}{4(2l-3)} \\ &= a_l \frac{(l-1)(l-2)(l-3)}{2.4(2l-1)(2l-3)} \end{aligned}$$

A partir des équations de a_{l-2} et a_{l-4} , on peut déduire la forme générale

$$a_{l-2r} = (-1)^r \frac{l(l-1)(l-2) \dots (l-2r+1)}{2.4 \dots (2r)(2l-1)(2l-3) \dots (2l-2r+1)}$$

En remplaçant a_{l-2r} dans l'Eq. (5.4), on obtient

$$y(x) = a_l \sum_{r=0}^{[l/2]} (-1)^r \frac{l(l-1)(l-2) \dots (l-2r+1)}{2.4 \dots (2r)(2l-1)(2l-3) \dots (2l-2r+1)} x^{l-2r}$$

On peut simplifier l'expression de $y(x)$ en écrivant autrement le numérateur et le dénominateur

$$\begin{aligned} l(l-1) \dots (l-2r+1) &= l(l-1) \dots (l-2r+1) \frac{(l-2r)!}{(l-2r)!} \\ &= \frac{l!}{(l-2r)!}, \end{aligned}$$

$$2.4.6 \dots 2r = (2.1)(2.2)(2.3) \dots (2.r) = 2^r r!$$

et

$$\begin{aligned} (2l-1)(2l-3) \dots (2l-2r+1) &= \frac{2l(2l-1)(2l-2)(2l-3) \dots (2l-2r+1)(2l-2r)!}{2l(2l-2) \dots (2l-2r+2)(2l-2r)!} \\ &= \frac{(2l)!}{2^r l(l-1) \dots (l-r+1)(2l-2r)!} \\ &= \frac{(2l)!(l-r)!}{2^r l!(2l-2r)!} \end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned} y(x) &= a_l \sum_{r=0}^{[l/2]} (-1)^r \frac{l!}{(l-2r)!} \frac{1}{2^r r!} \frac{2^r l!(2l-2r)!}{(2l)!(l-r)!} x^{l-2r} \\ &= a_l \sum_{r=0}^{[l/2]} (-1)^r \frac{(l!)^2 (2l-2r)!}{r!(l-2r)!(2l)!} x^{l-2r} \end{aligned}$$

Choisissant a_l d'être

$$a_l = \frac{(2l)!}{2^l (l!)^2}$$

On obtient le résultat final pour la solution de l'équation de Legendre Eq. (5.1)

$$P_l(x) = \sum_{r=0}^{[l/2]} (-1)^r \frac{(2l-2r)!}{2^l r!(l-r)!(l-2r)!} x^{l-2r} \quad -1 \leq x \leq 1$$

Les cinq premiers polynômes sont

$$P_0(x) = 1$$

$$P_1(x) = x$$

$$P_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2 - 1)$$

$$P_3(x) = \frac{1}{2}(5x^3 - 3x)$$

$$P_4(x) = \frac{1}{8}(35x^4 - 30x^2 + 3)$$

et ils sont représentés dans la Fig. (5.1).

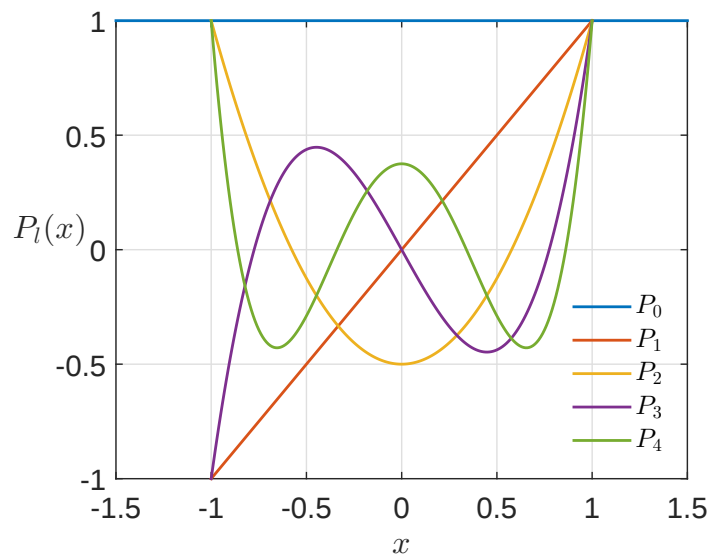


Figure 5.1: Polynômes de Legendre pour $n = 0, 1, 2, 3, 4$.

5.1.1 Fonction génératrice

$$\frac{1}{\sqrt{1 - 2tx + t^2}} = \sum_{l=0}^{\infty} t^l P_l(x) \quad \text{if } |t| < 1, |x| \leq 1 \quad (5.5)$$

Démonstration

On a

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{\sqrt{1-2tx+t^2}} &= [1-t(2x-t)]^{-\frac{1}{2}} \\
 &= 1 + \left(-\frac{1}{2}\right)[-t(2x-t)] + \frac{(-1/2)(-3/2)}{2!}[-t(2x-t)]^2 \\
 &\quad + \dots + \frac{(-1/2)(-3/2)\dots(-(2r-1)/2)}{r!}[-t(2x-t)]^r + \dots \\
 &= \sum_{r=0}^{\infty} \frac{1.3.5\dots(2r-1)}{2^r r!} (-1)^r t^r (2x-t)^r \\
 &= \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(2r)!}{2^{2r}(r!)^2} t^r (2x-t)^r
 \end{aligned}$$

D'après la formule du binôme de Newton, on a

$$(2x-t)^r = \sum_{s=0}^r \frac{r!}{s!(r-s)!} (2x)^{r-s} (-t)^s$$

En remplaçant dans l'équation précédente, on trouve

$$\frac{1}{\sqrt{1-2tx+t^2}} = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(2r)!}{2^{2r}(r!)^2} \sum_{s=0}^r (-1)^s \frac{r!}{s!(r-s)!} (2x)^{r-s} t^{r+s}$$

Si on pose $n = r + s$, on a n qui varie entre 0 et ∞ , et puisque s varie entre 0 et r , donc r varie entre $[n/2]$ et n , alors

$$\frac{1}{\sqrt{1-2tx+t^2}} = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{r=[n/2]}^n t^n (-1)^{n-r} \frac{(2r)!}{2^n r!(n-r)!(2r-n)!} x^{2r-n}$$

En faisant le changement de variable $l = n - r$, on obtient finalement

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{\sqrt{1-2tx+t^2}} &= \sum_{n=0}^{\infty} t^n \sum_{l=[n/2]}^0 (-1)^l \frac{(2n-2l)!}{2^n l!(n-l)!(n-2l)!} x^{n-2l} \\
 &= \sum_{n=0}^{\infty} t^n P_n(x)
 \end{aligned}$$

5.1.2 Formule de Rodrigues

$$P_l(x) = \frac{1}{2^l l!} \frac{d^l}{dx^l} (x^2 - 1)^l \quad (5.6)$$

Démonstration

D'après la formule du binôme de Newton, on a

$$(x^2 - 1)^l = \sum_{r=0}^l \frac{l!}{r!(l-r)!} (-1)^r x^{2(l-r)} \quad (5.7)$$

donc

$$\frac{1}{2^l l!} \frac{d^l}{dx^l} (x^2 - 1)^l = \frac{1}{2^l l!} \sum_{r=0}^l \frac{l!}{r!(l-r)!} (-1)^r \frac{d^l}{dx^l} x^{2(l-r)}$$

mais

$$\frac{d^l}{dx^l} x^{2(l-r)} = 0 \quad \text{si } 2(l-r) < l, \text{ i.e., si } r > l/2$$

On peut donc remplacer $\sum_{r=0}^l$ par $\sum_{r=0}^{[l/2]}$.

Si $r \leq l/2$, on a

$$\begin{aligned} \frac{d^l}{dx^l} x^{2(l-r)} &= \{2(l-r)\} \{2(l-r)-1\} \{2(l-r)-2\} \dots \{2(l-r)-l+1\} x^{2(l-r)-l} \\ &= \frac{(2l-2r)!}{(l-2r)!} x^{l-2r} \end{aligned}$$

et on obtient alors

$$\begin{aligned} \frac{1}{2^l l!} \frac{d^l}{dx^l} (x^2 - 1)^l &= \sum_{r=0}^{[l/2]} (-1)^r \frac{(2l-2r)!}{2^l r!(l-r)!(l-2r)!} x^{l-2r} \\ &= P_l(x) \end{aligned}$$

5.1.3 Représentation intégrale de Laplace

$$P_l(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \left(x + \sqrt{x^2 - 1} \cos \theta \right)^l d\theta \quad (5.8)$$

Démonstration

Considérons la relation (qui peut être prouvé en utilisant le changement de variable $t = \tan \theta$)

$$\int_0^\pi \frac{d\theta}{1 + \lambda \cos \theta} = \frac{\pi}{\sqrt{1 - \lambda^2}} \quad (5.9)$$

Posons $\lambda = -u\sqrt{x^2-1}/(1-ux)$, En développant les deux côtés de l'Eq. (5.9) en puissance de u , on obtient

$$\begin{aligned}\frac{1}{1+\lambda\cos\theta} &= \frac{1}{1+\frac{u\sqrt{x^2-1}}{1-ux}\cos\theta} \\ &= (1-ux)\left[1-u\left(x+\sqrt{x^2-1}\cos\theta\right)\right]^{-1} \\ &= (1-ux)\sum_{l=0}^{\infty}u^l\left(x+\sqrt{x^2-1}\cos\theta\right)^l\end{aligned}$$

où on a utilisé le théorème de binôme de Newton $(1-a)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} a^n$.

$$\begin{aligned}\frac{1}{\sqrt{1-\lambda^2}} &= \frac{1}{\sqrt{1-\frac{u^2(x^2-1)}{(1-ux)^2}}} \\ &= \frac{1-ux}{\sqrt{(1-ux)^2-u^2(x^2-1)}} \\ &= \frac{1-ux}{\sqrt{1-2ux+u^2}}\end{aligned}$$

Substitution dans l'Eq. (5.9) donne

$$\int_0^\pi \sum_{l=0}^{\infty} u^l \left(x + \sqrt{x^2-1}\cos\theta\right)^l d\theta = \frac{\pi}{\sqrt{1-2ux+u^2}}$$

On insère la formule de fonction génératrice (5.9) dans l'équation précédente, on obtient

$$\sum_{l=0}^{\infty} u^l \int_0^\pi \left(x + \sqrt{x^2-1}\cos\theta\right)^l d\theta = \pi \sum_{l=0}^{\infty} u^l P_l(x)$$

Par identification des coefficients de u^l on obtient

$$\pi P_l(x) = \int_0^\pi \left(x + \sqrt{x^2-1}\cos\theta\right)^l d\theta$$

5.1.4 Propriétés des polynômes de Legendre

$$\begin{aligned}(a) \quad &P_l(1) = 1, \\ (b) \quad &P_l(-1) = (-1)^l, \\ (c) \quad &P'_l(1) = \frac{1}{2}l(l+1), \\ (d) \quad &P'_l(-1) = (-1)^{l-1}\frac{1}{2}l(l+1), \\ (e) \quad &P_{2l}(0) = (-1)^l \frac{2l}{2^{2l}(l!)^2}, \\ (f) \quad &P_{2l+1}(0) = 0\end{aligned}\tag{5.10}$$

Démonstration

(a) On met $x = 1$ dans l'Eq. (5.5), on obtient

$$\frac{1}{1-t} = \sum_{l=0}^{\infty} t^l P_l(1)$$

Le développement en série de $1/(1-t)$ donne

$$\frac{1}{1-t} = \sum_{l=0}^{\infty} t^l$$

En identifiant les deux expressions précédentes, il en résulte que $P_l(1) = 1, \forall l$.

(b) la preuve est exactement similaire à (a) avec $x = -1$.

(c) En posant $x = 1$ dans l'équation de Legendre (5.1), on obtient

$$-2P'_l(1) + l(l+1)P_l(1) = 0$$

et puisque $P_l(1) = 1$, il en résulte que $P'_l(1) = l(l+1)/2$.

(d) Même preuve que (c) en posant ici $x = -1$.

Pour montrer (e) et (f), on pose $x = 0$ dans l'Eq. (5.6). En faisant le développement en série, on trouve

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{1+t^2}} &= \sum_{l=0}^{\infty} t^l P_l(0) \\ &= \sum_{l=0}^{\infty} (-1)^l \frac{(2l)!}{2^{2l}(l!)^2} t^{2l} \end{aligned}$$

En identifiant les coefficients de la même puissance de t , on obtient

$$\begin{aligned} P_{2l}(0) &= (-1)^l \frac{(2l)!}{2^{2l}(l!)^2} \\ P_{2l+1}(0) &= 0 \end{aligned}$$

5.1.5 Relation d'orthogonalité

$$\int_{-1}^1 P_l(x) P_m(x) dx = \begin{cases} 0 & \text{si } l \neq m \\ \frac{2}{2l+1} & \text{si } l = m \end{cases} \quad (5.11)$$

Démonstration

$P_l(x)$ et $P_m(x)$ satisfont l'équation de Legendre qui peut être écrite sous la forme

$$\frac{d}{dx} \left\{ (1-x^2) \frac{dP_l}{dx} \right\} + l(l+1)P_l = 0 \quad (5.12)$$

$$\frac{d}{dx} \left\{ (1-x^2) \frac{dP_m}{dx} \right\} + m(m+1)P_m = 0 \quad (5.13)$$

En multipliant (5.12) par $P_m(x)$ et (5.13) par $P_l(x)$ et en faisant la soustraction des deux équations et en intégrant par rapport à x de -1 à 1 , on trouve

$$\int_{-1}^1 \left[P_m \frac{d}{dx} \left\{ (1-x^2) \frac{dP_l}{dx} \right\} - P_l \frac{d}{dx} \left\{ (1-x^2) \frac{dP_m}{dx} \right\} \right] dx + \{l(l+1) - m(m+1)\} \int_{-1}^1 P_l P_m dx = 0$$

Maintenant, en remplaçant les deux termes de la première intégrale par

$$\begin{aligned} P_m \frac{d}{dx} \left\{ (1-x^2) \frac{dP_l}{dx} \right\} &= \frac{d}{dx} \left\{ P_m (1-x^2) \frac{dP_l}{dx} \right\} - \frac{dP_m}{dx} (1-x^2) \frac{dP_l}{dx} \\ P_l \frac{d}{dx} \left\{ (1-x^2) \frac{dP_m}{dx} \right\} &= \frac{d}{dx} \left\{ P_l (1-x^2) \frac{dP_m}{dx} \right\} - \frac{dP_l}{dx} (1-x^2) \frac{dP_m}{dx} \end{aligned}$$

on obtient

$$\left[P_m (1-x^2) \frac{dP_l}{dx} - P_l (1-x^2) \frac{dP_m}{dx} \right]_{-1}^1 + (l-m)(l+m+1) \int_{-1}^1 P_l P_m dx = 0$$

ce qui montre que si $l \neq m$, on devrait avoir

$$\int_{-1}^1 P_l(x) P_m(x) dx = 0$$

Pour montrer que $\int_{-1}^1 (P_l)^2 dx = 2/(2l+1)$, on utilise la fonction génératrice Eq. (5.6),

$$\begin{aligned} \frac{1}{1-2tx+t^2} &= \left[\sum_{l=0}^{\infty} t^l P_l(x) \right]^2 \\ &= \sum_{l=0}^{\infty} t^l P_l(x) \sum_{m=0}^{\infty} t^m P_m(x) \end{aligned}$$

En intégrant les deux côtés par rapport à x , on obtient

$$\begin{aligned} \sum_{l,m=0}^{\infty} t^{l+m} \int_{-1}^1 P_l(x) P_m(x) dx &= \left[-\frac{1}{2t} \ln(1+t^2-2t) \right]_{-1}^1 \\ &= \frac{1}{t} [\ln(1+t) - \ln(1-t)] \\ &= 2 \sum_{l=0}^{\infty} \frac{t^{2l}}{2l+1} \end{aligned}$$

La dernière ligne résulte du développement en série de $\ln(1+t)$ et $\ln(1-t)$. En identifiant les coefficients de même puissance de t , il en résulte que si $l \neq m$

$$\int_{-1}^1 [P_l(x)]^2 dx = \frac{2}{2l+1}$$

5.1.6 Séries de Legendre

Si $f(x)$ est un polynôme de degré n , alors il peut être écrit sous la forme

$$f(x) = \sum_{r=0}^n c_r P_r(x) \quad (5.14)$$

avec les coefficients c_r donnés par

$$c_r = \left(r + \frac{1}{2}\right) \int_{-1}^1 f(x) P_r(x) dx \quad (5.15)$$

Démonstration

Si $f(x)$ est un polynôme de degré n , on peut écrire

$$f(x) = b_n x^n + b_{n-1} x^{n-1} + \dots + b_1 x + b_0$$

D'après l'Eq. (5.4), le polynôme de Legendre s'écrit sous la forme

$$P_n(x) = a_n x^n + a_{n-2} x^{n-2} + \dots$$

Si on multiplie la dernière expression par b_n/a_n et en le soustrayant de $f(x)$, on trouve que la différence est un polynôme de degré $(n-1)$

$$f(x) - c_n P_n(x) = g_{n-1}(x)$$

où $c_n = b_n/a_n$ et $g_{n-1}(x)$ est un polynôme de degré $n-1$. En faisant la même chose pour $g_{n-1}(x)$, on peut démontrer facilement que $g_{n-1}(x)$ peut s'écrire sous la forme

$$g_{n-1}(x) = c_{n-1} P_{n-1}(x) + g_{n-2}(x)$$

donc

$$f(x) = c_n P_n(x) + c_{n-1} P_{n-1}(x) + g_{n-2}(x)$$

On fait la même chose pour $g_{n-2}(x)$, $g_{n-3}(x)$ et ainsi de suite, on obtient le résultat désiré

$$\begin{aligned} f(x) &= c_n P_n(x) + c_{n-1} P_{n-1}(x) + c_{n-2} P_{n-2}(x) + \dots + c_0 P_0(x) \\ &= \sum_{r=0}^n c_r P_r(x) \end{aligned}$$

Les coefficients c_n peuvent être calculer de la manière suivante

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 f(x) P_l(x) dx &= \sum_{r=0}^n \int_{-1}^1 c_r P_r(x) P_l(x) dx \\ &= \frac{2c_l}{2l+1} \end{aligned}$$

donc

$$c_l = \left(l + \frac{1}{2}\right) \int_{-1}^1 f(x) P_l(x) dx$$

Si $f(x)$ est un polynôme de degré inférieur à l , alors

$$\int_{-1}^1 f(x) P_l(x) dx = 0$$

Si $f(x)$ est de degré n tel que $n < l$, d'après la relation d'orthogonalité on a

$$\begin{aligned} c_l &= \left(n + \frac{1}{2}\right) \int_{-1}^1 f(x) P_l(x) dx \\ &= \left(n + \frac{1}{2}\right) \sum_{r=0}^n \int_{-1}^1 P_r(x) P_l(x) dx \\ &= 0 \end{aligned}$$

car r est toujours inférieur à l ($r < l$).

5.1.7 Relations de récurrence

$$\begin{aligned} (a) \quad xP_l(x) &= \frac{l+1}{2l+1} P_{l+1}(x) + \frac{l}{2l+1} P_{l-1}(x) \\ (b) \quad P'_l(x) &= \sum_{r=0}^{[\frac{1}{2}(l+1)]} (2l-4r-1) P_{l-2r-1}(x) \\ (c) \quad P'_{l+1}(x) - P'_{l-1}(x) &= (2l+1) P_l(x) \\ (d) \quad xP'_l(x) - P'_{l-1}(x) &= l P_l(x) \\ (e) \quad P'_l(x) - xP'_{l-1}(x) &= l P_{l-1}(x) \end{aligned} \tag{5.16}$$

Démonstration:

(a) $P_l(x)$ est un polynôme d'ordre l , donc $xP_l(x)$ est un polynôme d'ordre $l+1$.

D'après (5.14), on a

$$xP_l(x) = c_{l+1} P_{l+1}(x) + c_{l-1} P_{l-1}(x) + \dots + \begin{cases} c_1 P_1(x) & \text{si } l \text{ est pair} \\ c_0 P_0(x) & \text{si } l \text{ est impair} \end{cases}$$

où les coefficients c_r sont donnés par

$$\begin{aligned} c_r &= \left(r + \frac{1}{2}\right) \int_{-1}^1 x P_l(x) P_r(x) dx \\ &= \left(r + \frac{1}{2}\right) \int_{-1}^1 P_l(x) \{x P_r(x)\} dx \end{aligned}$$

$xP_r(x)$ est un polynôme d'ordre $r + 1$, donc $c_r = 0$ si $r + 1 < l$, i.e. si $r < l - 1$. alors

$$xP_l(x) = c_{l+1}P_{l+1}(x) + c_{l-1}P_{l-1}(x) \quad (5.17)$$

Pour calculer c_{l+1} et c_{l-1} , on pose $x = 1$ dans l'expression (5.17) et dans sa dérivée, on obtient

$$\begin{aligned} P_l(1) &= c_{l+1}P_{l+1}(1) + c_{l-1}P_{l-1}(1) \\ P_l(1) + P'_l(1) &= c_{l+1}P'_{l+1}(1) + c_{l-1}P'_{l-1}(1) \end{aligned}$$

En utilisant les propriétés (5.10)(a) et (c), on obtient les équations suivantes

$$\begin{aligned} 1 &= c_{l+1} + c_{l-1} \\ 1 + \frac{1}{2}l(l+1) &= c_{l+1} \left[\frac{1}{2}(l+1)(l+2) \right] + c_{l-1} \left[\frac{1}{2}(l-1)l \right] \end{aligned}$$

qui admettent comme solutions

$$c_{l+1} = \frac{l+1}{2l+1}, \quad c_{l-1} = \frac{l}{2l+1}$$

On obtient finalement

$$xP_l(x) = \frac{l+1}{2l+1}P_{l+1}(x) + \frac{l}{2l+1}P_{l-1}(x)$$

(b) $P'_l(x)$ est un polynôme de degré $l-1$, donc on peut l'écrire en série de Legendre

$$\begin{aligned} P'_l(x) &= c_{l-1}P_{l-1}(x) + c_{l-3}P_{l-3}(x) + \dots + c_{l-2r+1}P_{l-2r+1}(x) \\ &\quad + \dots + \begin{cases} c_1P_1(x) & \text{si } l \text{ est pair} \\ c_0P_0(x) & \text{si } l \text{ est impair} \end{cases} \end{aligned}$$

avec

$$c_n = \left(n + \frac{1}{2} \right) \int_{-1}^1 P'_l(x)P_n(x)dx$$

En intégrant par parties, on trouve

$$c_n = \left(n + \frac{1}{2} \right) \left\{ [P_l(x)P_n(x)]_{-1}^1 - \int_{-1}^1 P_l(x)P'_n(x)dx \right\}$$

et puisque $P'_n(x)$ est un polynôme de degré $n-1 < l$, donc l'intégrale dans l'équation précédente est nulle. En utilisant les propriétés (5.10)(a) et (b) des polynômes de Legendre on obtient

$$c_n = \left(n + \frac{1}{2} \right) [1 - (-1)^{n+l}]$$

n prends les valeurs $l-1, l-3, l-5, \dots$, donc $n+l$ prends les valeurs $2l-1, 2l-3, 2l-5, \dots$. Puisque toutes les valeurs sont impaires, $(-1)^{s+l} = -1$, donc

$$c_n = 2n + 1$$

et

$$c_{l-2r-1} = 2l - 4r - 1$$

Il en résulte que

$$\begin{aligned} P'_l(x) &= (2l-1)P_{l-1}(x) + (2l-5)P_{l-3}(x) + \dots + (2l-4r-1)P_{2l-4r-1}(x) \\ &\quad + \dots + \begin{cases} 3P_1(x) & \text{si } l \text{ est pair} \\ P_0(x) & \text{si } l \text{ est impair} \end{cases} \\ &= \sum_{r=0}^{[\frac{1}{2}(l-1)]} (2l-4r-1)P_{2l-4r-1}(x) \end{aligned}$$

(c) On applique la relation (b) pour $P'_{l+1}(x)$ et $P'_{l-1}(x)$, on obtient

$$\begin{aligned} P'_{l+1}(x) &= (2l+1)P_l(x) + (2l-3)P_{l-2}(x) + (2l-7)P_{l-4}(x) + \dots \\ P'_{l-1}(x) &= (2l-3)P_{l-2}(x) + (2l-7)P_{l-4}(x) + \dots \end{aligned}$$

la soustraction des deux expressions donne

$$P'_{l+1}(x) - P'_{l-1}(x) = (2l+1)P_l(x)$$

(d) En multipliant (a) par $2l+1$ et dérivant par rapport à x , on obtient

$$(l+1)P'_{l+1}(x) - (2l+1)\{P_l(x) + xP'_l(x)\} + lP'_{l-1}(x) = 0$$

On remplace $P'_{l+1}(x)$ par $(2l+1)P_l(x) - P'_{l-1}(x)$ (Eq. (5.16)(c)), et on réarrange les termes de l'équation on trouve que

$$xP'_l(x) - P'_{l-1}(x) = lP_l(x)$$

(e) En multipliant (c) par x et en substituant le résultat pour $(2l+1)xP'_l(x)$ dans (5.16)(d), on obtient

$$(l+1)P_{l+1}(x) + lP_{l-1}(x) = xP'_{l+1}(x) - xP'_{l-1}(x) \quad (5.18)$$

Si on écrit (d) avec l remplacé par $l+1$, on obtient

$$xP'_{l+1}(x) - P'_l(x) = (l+1)P_{l+1}(x)$$

Maintenant, en substituant $(l+1)P_{l+1}(x)$ dans l'Eq. (5.18) et en réarrangeant les termes, on obtient le résultat désiré

$$P'_l(x) - xP'_{l-1}(x) = lP_{l-1}(x)$$

5.2 Polynôme associé de Legendre

L'équation associée de Legendre est donnée par

$$(1-x^2)\frac{d^2y}{dx^2} - 2x\frac{dy}{dx} + \left[l(l+1) - \frac{m^2}{1-x^2}\right]y = 0 \quad (5.19)$$

L'Eq. (5.19) admet une solution régulière uniquement dans l'intervalle $[-1, 1]$ avec $0 \leq m \leq l$. Pour $m = 0$, l'Eq. (5.19) se réduit à l'équation de Legendre. La solution de cette équation noté $P_l^m(x)$ est donnée par

$$P_l^m(x) = (1-x^2)^{m/2} \frac{d^m}{dx^m} P_l(x) \quad (5.20)$$

La solution (5.20) est appelée polynôme associé de Legendre. Pour des valeurs négatives de m , on utilise

$$P_l^{-m}(x) = (-1)^m \frac{(l-m)!}{(l+m)!} P_l^m(x) \quad (5.21)$$

où encore $0 \leq m \leq l$.

Démonstration

Pour montrer que (5.20) est une solution de l'Eq. (5.19), on doit montrer que

$$(1-x^2)\frac{d^2}{dx^2} P_l^m(x) - 2x\frac{d}{dx} P_l^m(x) + \left[l(l+1) - \frac{m^2}{1-x^2}\right] P_l^m(x) = 0$$

Puisque $P_l(x)$ est une solution de l'équation de Legendre, on a

$$(1-x^2)\frac{d^2}{dx^2} P_l(x) - 2x\frac{d}{dx} P_l(x) + l(l+1)P_l(x) = 0$$

En dérivant l'équation précédente m fois par rapport à x , elle devient

$$\frac{d^m}{dx^m} \left[(1-x^2)\frac{d^2}{dx^2} P_l(x) \right] - 2\frac{d^m}{dx^m} \left[x\frac{d}{dx} P_l(x) \right] + l(l+1)\frac{d^m}{dx^m} P_l(x) = 0$$

En utilisant la règle de Leibniz pour le m -ième dérivées

$$\frac{d^m}{dx^m} \{fg\} = \sum_{n=0}^m \frac{m!}{n!(m-n)!} \frac{d^n f}{dx^n} \frac{d^{m-n} g}{dx^{m-n}}$$

l'équation précédente devient

$$\begin{aligned} (1-x^2)\frac{d^{m+2}}{dx^{m+2}} P_l(x) + m\frac{d}{dx} (1-x^2)\frac{d^{m+1}}{dx^{m+1}} P_l(x) + \frac{m(m-1)}{2}\frac{d^2}{dx^2} (1-x^2)\frac{d^m}{dx^m} P_l(x) \\ - 2\left[x\frac{d^{m+1}}{dx^{m+1}} P_l(x) + m\frac{d}{dx} x\frac{d^m}{dx^m} P_l(x) \right] + l(l+1)\frac{d^m}{dx^m} P_l(x) = 0 \end{aligned}$$

En regroupant les coefficients de $d^{m+2}P_l/dx^{m+2}$, $d^{m+1}P_l/dx^{m+1}$ et $d^m P_l/dx^m$, on obtient

$$(1-x^2) \frac{d^{m+2}}{dx^{m+2}} P_l(x) - 2x(m+1) \frac{d^{m+1}}{dx^{m+1}} P_l(x) \quad (5.22)$$

$$+ [l(l+1) - m(m+1) - 2m] \frac{d^m}{dx^m} P_l(x) = 0 \quad (5.23)$$

qui devient, on dénote $y_l^m(x) = d^m P_l(x)/dx^m$

$$(1-x^2) \frac{d^2}{dx^2} y_l^m(x) - 2x(m+1) \frac{d}{dx} y_l^m(x) + [l(l+1) - m(m+1) - 2m] y_l^m(x) = 0$$

Si on remplace maintenant

$$P_l^m(x) = (1-x^2)^{m/2} y_l^m(x)$$

dans l'équation précédente, on obtient

$$(1-x^2) \frac{d^2}{dx^2} \left[(1-x^2)^{-m/2} P_l^m(x) \right] - 2(m+1)x \frac{d}{dx} \left[(1-x^2)^{-m/2} P_l^m(x) \right] \\ + [l(l+1) - m(m+1)] (1-x^2)^{-m/2} P_l^m(x) = 0 \quad (5.24)$$

mais

$$\frac{d}{dx} \left[(1-x^2)^{-m/2} P_l^m(x) \right] = \frac{dP_l^m(x)}{dx} (1-x^2)^{-m/2} + mx(1-x^2)^{-(m/2)-1} P_l^m(x)$$

et

$$\frac{d^2}{dx^2} \left[(1-x^2)^{-m/2} P_l^m(x) \right] = \\ \frac{d^2 P_l^m(x)}{dx^2} (1-x^2)^{-m/2} + mx(1-x^2)^{-(m/2)-1} \frac{dP_l^m(x)}{dx} + mx(1-x^2)^{-(m/2)-1} P_l^m(x)$$

donc, l'Eq. (5.24) devient

$$(1-x^2)^{-(m/2)+1} \frac{d^2 P_l^m(x)}{dx^2} + 2mx(1-x^2)^{-m/2} \frac{dP_l^m(x)}{dx} + m(1-x^2)^{-m/2} P_l^m(x) \\ + m(m+2)(1-x^2)^{-(m/2)-1} x^2 P_l^m(x) \\ - 2(m+1)x \left[(1-x^2)^{-m/2} \frac{dP_l^m(x)}{dx} + mx(1-x^2)^{-(m/2)-1} P_l^m(x) \right] \\ + [l(l+1) - m(m+1)] (1-x^2)^{-m/2} P_l^m(x) = 0$$

On annule le facteur commun $(1 - x^2)^{-m/2}$, on obtient

$$\begin{aligned} (1 - x^2) \frac{d^2 P_l^m(x)}{dx^2} + [2mx - 2(m+1)x] \frac{dP_l^m(x)}{dx} \\ + \left[m + \frac{m(m+1)}{1-x^2} - \frac{2(m+1)mx^2}{1-x^2} + l(l+1) - m(m+1) \right] P_l^m(x) = 0 \end{aligned}$$

qui peut être simplifié à

$$(1 - x^2) \frac{d^2 P_l^m(x)}{dx^2} - 2x \frac{dP_l^m(x)}{dx} + \left[l(l+1) - \frac{m^2}{1-x^2} \right] P_l^m(x) = 0$$

qui est l'équation désiré.

Les polynômes associé de Legendre $P_l^m(x)$ pour $l = 5$ et $0 < m < l$ sont représentés dans la Fig. (5.2). Les premiers polynômes associés de Legendre, y compris ceux

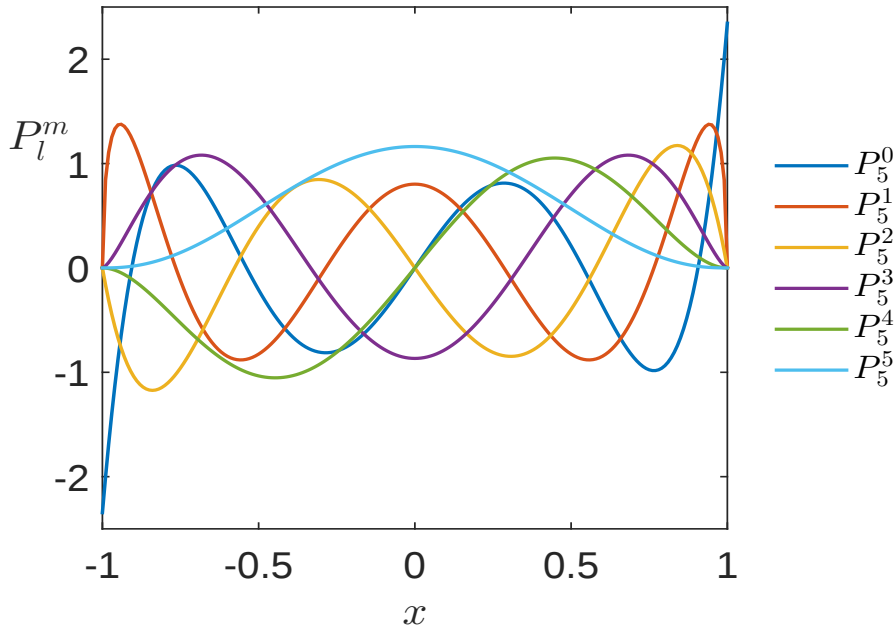


Figure 5.2: Polynômes associés de Legendre $P_l^m(x)$ pour $l = 5$ et $0 < m < l$.

des valeurs négatives de m , sont les suivants

$$P_0^0(x) = 1$$

$$P_1^1(x) = -\sqrt{1-x^2}$$

$$P_1^0(x) = x$$

$$P_1^{-1} = -\frac{1}{2}P_1^1(x) = \frac{1}{2}\sqrt{1-x^2}$$

$$P_2^2(x) = 3(1-x^2)$$

$$P_2^1(x) = -3x\sqrt{1-x^2}$$

$$P_2^0(x) = \frac{1}{2}(3x^2 - 1)$$

$$P_2^{-1}(x) = -\frac{1}{6}P_2^1(x) = \frac{1}{2}x\sqrt{1-x^2}$$

$$P_2^{-2}(x) = \frac{1}{24}P_2^2(x) = \frac{1}{8}(1-x^2)$$

$$P_3^3(x) = -15(1-x^2)^{3/2}$$

$$P_3^2(x) = 15x(1-x^2)$$

$$P_3^1(x) = -\frac{3}{2}(5x^2 - 1)\sqrt{1-x^2}$$

$$P_3^0(x) = \frac{1}{2}(5x^3 - 3x)$$

$$P_3^{-1}(x) = -\frac{1}{12}P_3^1(x) = -\frac{1}{8}(5x^2 - 1)\sqrt{1-x^2}$$

$$P_3^{-2}(x) = \frac{1}{120}P_3^2(x) = \frac{1}{8}x(1-x^2)$$

$$P_3^{-3}(x) = -\frac{1}{720}P_3^3(x) = \frac{1}{48}(1-x^2)^{3/2}$$

$$P_4^4(x) = 105(1-x^2)^2$$

$$P_4^3(x) = -105x(1-x^2)^{3/2}$$

$$P_4^2(x) = \frac{15}{2}(7x^2 - 1)(1-x^2)$$

$$P_4^1(x) = -\frac{5}{2}(7x^3 - 3x)\sqrt{1-x^2}$$

$$P_4^0(x) = \frac{1}{8}(35x^4 - 30x^2 + 3)$$

$$P_4^{-1}(x) = -\frac{1}{20}P_4^1(x) = \frac{1}{8}(7x^3 - 3x)\sqrt{1-x^2}$$

$$P_4^{-2}(x) = \frac{1}{360}P_4^2(x) = \frac{1}{48}(7x^2 - 1)(1-x^2)$$

$$P_4^{-3}(x) = -\frac{1}{5040}P_4^3(x) = \frac{x}{48}(1-x^2)^{3/2}$$

$$P_4^{-4}(x) = \frac{1}{40320}P_4^4(x) = \frac{1}{384}(1-x^2)^2$$

5.2.1 Relation d'orthogonalité

$$\int_{-1}^1 P_l^m(x) P_{l'}^m(x) dx = \frac{2(l+m)!}{(2l+1)(l-m)!} \delta_{l,l'} \quad (5.25)$$

Démonstration

Pour démontrer que si $l \neq l'$, l'intégral donne 0, nous suivons les mêmes étapes que celle pour la relation d'orthogonalité de polynôme de Legendre Eq. (5.11). $P_l^m(x)$ et $P_{l'}^m(x)$ satisfy l'équation de Legendre associée qui peut être écrite sous la form

$$\frac{d}{dx} \left\{ (1-x^2) \frac{dP_l^m}{dx} \right\} + \left[l(l+1) - \frac{m^2}{1-x^2} \right] P_l^m = 0 \quad (5.26)$$

$$\frac{d}{dx} \left\{ (1-x^2) \frac{dP_{l'}^m}{dx} \right\} + \left[l'(l'+1) - \frac{m^2}{1-x^2} \right] P_{l'}^m = 0 \quad (5.27)$$

En multipliant Eq. (5.26) par $P_{l'}^m(x)$ et l'Eq. (5.27) par $P_l^m(x)$, en faisant la subtraction des deux équations et intégrant par rapport à x de -1 à 1 , on trouve

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 \left[P_{l'}^m \frac{d}{dx} \left\{ (1-x^2) \frac{dP_l^m}{dx} \right\} - P_l^m \frac{d}{dx} \left\{ (1-x^2) \frac{dP_{l'}^m}{dx} \right\} \right] dx \\ + \{l(l+1) - l'(l'+1)\} \int_{-1}^1 P_l^m P_{l'}^m dx = 0 \end{aligned}$$

En remplaçant les deux termes du première intégrale par

$$\begin{aligned} P_{l'}^m \frac{d}{dx} \left\{ (1-x^2) \frac{dP_l^m}{dx} \right\} &= \frac{d}{dx} \left\{ P_{l'}^m (1-x^2) \frac{dP_l^m}{dx} \right\} - \frac{dP_{l'}^m}{dx} (1-x^2) \frac{dP_l^m}{dx} \\ P_l^m \frac{d}{dx} \left\{ (1-x^2) \frac{dP_{l'}^m}{dx} \right\} &= \frac{d}{dx} \left\{ P_l^m (1-x^2) \frac{dP_{l'}^m}{dx} \right\} - \frac{dP_l^m}{dx} (1-x^2) \frac{dP_{l'}^m}{dx} \end{aligned}$$

il s'ensuit

$$\left[P_{l'}^m (1-x^2) \frac{dP_l^m}{dx} - P_l^m (1-x^2) \frac{dP_{l'}^m}{dx} \right]_{-1}^1 + (l-l')(l+l'+1) \int_{-1}^1 P_l^m P_{l'}^m dx = 0$$

donc

$$(l-l')(l+l'+1) \int_{-1}^1 P_l^m(x) P_{l'}^m(x) dx = 0$$

ce qui montre que si $l \neq l'$, on devrait avoir

$$\int_{-1}^1 P_l^m(x) P_{l'}^m(x) dx = 0$$

Montrons maintenant que si $l = l'$, on a

$$\int_{-1}^1 [P_l^m(x)]^2 dx = \frac{2(l+m)!}{(2l+1)(l-m)!}$$

Supposons tout d'abord que $m > 0$. D'après l'Eq. (5.20), on a

$$\begin{aligned}
 \int_{-1}^1 [P_l^m(x)]^2 dx &= \int_{-1}^1 (1-x^2)^m \left[\frac{d^m}{dx^m} P_l(x) \right] \left[\frac{d^m}{dx^m} P_l(x) \right] dx \\
 &= \left[\left(\frac{d^{m-1}}{dx^{m-1}} P_l(x) \right) \left((1-x^2)^m \frac{d^m}{dx^m} P_l(x) \right) \right]_{-1}^1 \\
 &\quad - \int_{-1}^1 \left[\frac{d^{m-1}}{dx^{m-1}} P_l(x) \right] \frac{d}{dx} \left[(1-x^2)^m \frac{d^m}{dx^m} P_l(x) \right] dx \\
 &= - \int_{-1}^1 \left[\frac{d^{m-1}}{dx^{m-1}} P_l(x) \right] \frac{d}{dx} \left[(1-x^2)^m \frac{d^m}{dx^m} P_l(x) \right] dx \quad (5.28)
 \end{aligned}$$

où nous avons intégré par parties. A partir de l'Eq. (5.22) avec m est remplacé par $m-1$, on a

$$(1-x^2) \frac{d^{m+1}}{dx^{m+1}} P_l(x) - 2xm \frac{d^m}{dx^m} P_l(x) + [l(l+1) - m(m-1)] \frac{d^{m-1}}{dx^{m-1}} P_l(x) = 0$$

En multipliant par $(1-x^2)^{m-1}$, l'équation devient

$$\begin{aligned}
 (1-x^2)^m \frac{d^{m+1}}{dx^{m+1}} P_l(x) - 2xm (1-x^2)^{m-1} \frac{d^m}{dx^m} P_l(x) \\
 + [l(l+1) - m(m-1)] (1-x^2)^{m-1} \frac{d^{m-1}}{dx^{m-1}} P_l(x) = 0
 \end{aligned}$$

qui peut être écrit comme

$$\frac{d}{dx} \left[(1-x^2)^m \frac{d^m}{dx^m} P_l(x) \right] = -(l+m)(l-m+1) (1-x^2)^{m-1} \frac{d^{m-1}}{dx^{m-1}} P_l(x)$$

On insère ce résultat dans l'Eq. (5.28), on obtient

$$\begin{aligned}
 \int_{-1}^1 [P_l^m(x)]^2 dx &= \int_{-1}^1 \left[\frac{d^{m-1}}{dx^{m-1}} P_l(x) \right] (l+m)(l-m+1) (1-x^2)^{m-1} \left[\frac{d^{m-1}}{dx^{m-1}} P_l(x) \right] dx \\
 &= (l+m)(l-m+1) \int_{-1}^1 (1-x^2)^{m-1} \left[\frac{d^{m-1}}{dx^{m-1}} P_l(x) \right]^2 dx \\
 &= (l+m)(l-m+1) \int_{-1}^1 [P_l^{m-1}(x)]^2 dx
 \end{aligned}$$

Dans la dernière ligne, nous avons utilisé la définition de polynôme de Legendre associé Eq. (5.20). En appliquant à nouveau ce résultat, on trouve

$$\begin{aligned}
 \int_{-1}^1 [P_l^m(x)]^2 dx &= (l+m)(l-m+1)(l+m-1)(l-m+2) \int_{-1}^1 [P_l^{m-2}(x)]^2 dx \\
 &= (l+m)(l+m-1)(l-m+1)(l-m+2) \int_{-1}^1 [P_l^{m-2}(x)]^2 dx
 \end{aligned}$$

En répétant le processus m fois, on trouve

$$\begin{aligned}
 & \int_{-1}^1 [P_l^m(x)]^2 dx \\
 &= (l+m)(l+m-1) \dots (l+1)(l-m+1)(l-m+2) \dots l \int_{-1}^1 [P_l^0(x)]^2 dx \\
 &= (l+m)(l+m-1) \dots (l+1)l(l-1) \dots (l-m+2)(l-m+1) \frac{2}{2l+1} \\
 &= \frac{(l+m)!}{(l-m)!} \frac{2}{2l+1}
 \end{aligned}$$

qui est le résultat désiré. Supposons maintenant que $m < 0$, i.e., $m = -n$ avec $n > 0$, donc

$$\begin{aligned}
 \int_{-1}^1 [P_l^m(x)]^2 dx &= \int_{-1}^1 [P_l^{-n}(x)]^2 dx \\
 &= \int_{-1}^1 \left[(-1)^n P \frac{(l-n)!}{(l+n)!} P_l^n(x) \right]^2 dx \\
 &= \left[P \frac{(l-n)!}{(l+n)!} \right]^2 \int_{-1}^1 [P_l^n(x)]^2 dx \\
 &= \left[P \frac{(l-n)!}{(l+n)!} \right]^2 \frac{(l+n)!}{(l-n)!} \frac{2}{2l+1} \\
 &= \frac{(l-n)!}{(l+n)!} \frac{2}{2l+1} \\
 &= \frac{(l+m)!}{(l-m)!} \frac{2}{2l+1}
 \end{aligned}$$

5.3 Harmoniques sphériques

On appelle harmoniques sphériques, les solutions de l'équation de type

$$\frac{1}{\sin \theta} \left(\frac{\partial}{\partial \theta} \sin \theta \frac{\partial \Psi}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \phi^2} + l(l+1)\Psi = 0 \quad (5.29)$$

Les harmoniques sphériques sont particulièrement utiles pour les problèmes qui ont une symétrie de rotation, car elles sont les vecteurs propres de certains opérateurs liés aux rotations. En physique, elles sont souvent utilisées en acoustique, en cristallographie, en mécanique quantique, en cosmologie, etc. Cette équation peut être résolue par la méthode de séparation des variables, i.e., on cherche les solutions sous la forme $\Psi(\theta, \phi) = \Theta(\theta)\Phi(\phi)$. En remplaçant dans l'Eq. (5.29), cela nous donne

$$\frac{\Phi}{\sin \theta} \left\{ \frac{d}{d\theta} \left(\sin \theta \frac{d\Theta}{d\theta} \right) \right\} + \frac{\Theta}{\sin^2 \theta} \frac{d^2 \Phi}{d\phi^2} + l(l+1)\Theta\Phi = 0$$

En devisant par $\Theta(\theta)\Phi(\phi)$ et multipliant par $\sin^2 \theta$, on trouve (après réarrangement)

$$\frac{\sin \theta}{\Theta} \frac{d}{d\theta} \left(\sin \theta \frac{d\Theta}{d\theta} \right) + l(l+1) \sin^2 \theta = -\frac{1}{\Phi} \frac{d^2 \Phi}{d\phi^2}$$

On remarque que le côté gauche contient toute et seulement la dépendance en θ , tandis que le côté droit contient toute et seulement la dépendance en ϕ . Les deux côtés doivent donc être égaux à une constante. Nous choisissons de noter cette constante m^2 , on a

$$\frac{\sin \theta}{\Theta} \frac{d}{d\theta} \left(\sin \theta \frac{d\Theta}{d\theta} \right) + l(l+1) \sin^2 \theta = m^2 \quad (5.30)$$

$$-\frac{1}{\Phi} \frac{d^2 \Phi}{d\phi^2} = m^2 \quad (5.31)$$

La solution de l'Eq. (5.31) est donnée par

$$\Phi(\phi) = Ae^{im\phi} + Be^{-im\phi}$$

Pour que la solution soit continue, il faut que $\Phi(2\pi) = \Phi(0)$, cela impose que m soit un entier positif, négatif ou nul. Eq. (5.30) peut être écrite sous la forme

$$\frac{1}{\sin \theta} \frac{d}{d\theta} \left(\sin \theta \frac{d\Theta}{d\theta} \right) + \left\{ l(l+1) - \frac{m^2}{\sin^2 \theta} \right\} \Theta = 0$$

En faisant le changement de variable $\cos \theta = x$, on trouve

$$\frac{d}{dx} \left\{ (1-x^2) \frac{d\Theta}{dx} \right\} + \left\{ l(l+1) - \frac{m^2}{1-x^2} \right\} \Theta = 0$$

qui est l'équation associée de Legendre. Il n'y aura de solutions finies aux points $\theta = 0$ et π ($x = +1$ et $x = -1$) que si l est un entier. Donc cette équation a pour solutions les polynômes de Legendre associés définis par

$$\Theta(\theta) = P_l^m(x) = P_l^m(\cos \theta)$$

avec $-l < m < l$. Donc, la solution générale de l'Eq. (5.29) est donnée par

$$\Psi(\theta, \phi) = \left(Ae^{im\phi} + Be^{-im\phi} \right) P_l^m(\cos \theta)$$

En utilisant la formule (5.21) pour $P_l^{-m}(x)$, on aura

$$\Psi(\theta, \phi) = A_1 e^{im\phi} P_l^m(\cos \theta) + A_2 e^{-im\phi} P_l^{-m}(\cos \theta)$$

où

$$A_1 = A$$

$$A_2 = (-1)^m \frac{(l+m)!}{(l-m)!} B$$

Posons

$$y_l^m(\theta, \phi) = e^{im\phi} P_l^m(\cos \theta)$$

Ψ devient

$$\Psi(\theta, \phi) = A_1 y_l^m(\theta, \phi) + A_2 y_l^{-m}(\theta, \phi)$$

qui est la solution de l'Eq. (5.29) pour toute valeur de m . Puisque l'Eq. (5.29) est homogène, la solution générale est donnée par

$$\Psi(\theta, \phi) = \sum_{m=0}^l \{A_1^{(m)} y_l^m(\theta, \phi) + A_2^{(m)} y_l^{-m}(\theta, \phi)\} \quad (5.32)$$

Dans de nombreuses applications en physique et en ingénierie, il est plus pratique de définir la solution de l'Eq. (5.29) comme un multiple des y_l^m qui s'appellent les harmoniques sphériques notée Y_l^m et définis par

$$\begin{aligned} Y_l^m(\theta, \phi) &= (-1)^m \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sqrt{\frac{(2l+1)(l-m)!}{2(l+m)!}} y_l^m(\theta, \phi) \\ &= (-1)^m \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sqrt{\frac{(2l+1)(l-m)!}{2(l+m)!}} e^{im\phi} P_l^m(\cos \theta) \end{aligned} \quad (5.33)$$

Les expressions explicites pour $Y_0^0, Y_1^0, Y_1^{\pm 1}, Y_2^0, Y_2^{\pm 1}, Y_2^{\pm 2}$ sont données ci-dessous

$$\begin{aligned} Y_0^0 &= \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \\ Y_1^0 &= \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \cos \theta, & Y_1^{\pm 1} &= \sqrt{\frac{3}{8\pi}} \sin \theta e^{\pm i\phi} \\ Y_2^0 &= \sqrt{\frac{15}{16\pi}} (3 \cos^2 \theta - 1), & Y_2^{\pm 1} &= \sqrt{\frac{15}{8\pi}} \cos \theta \sin \theta e^{\pm i\phi} \\ Y_2^{\pm 2} &= \sqrt{\frac{15}{32\pi}} \sin^2 \theta e^{\pm 2i\phi} \end{aligned}$$

Elles sont présentées dans la figure Fig. (5.3).

5.3.1 Relation d'orthogonalité

$$\int_0^{2\pi} d\phi \int_0^\pi d\theta \sin \theta \{Y_l^m(\theta, \phi)\}^* Y_{l'}^{m'}(\theta, \phi) = \delta_{ll'} \delta_{mm'} \quad (5.34)$$

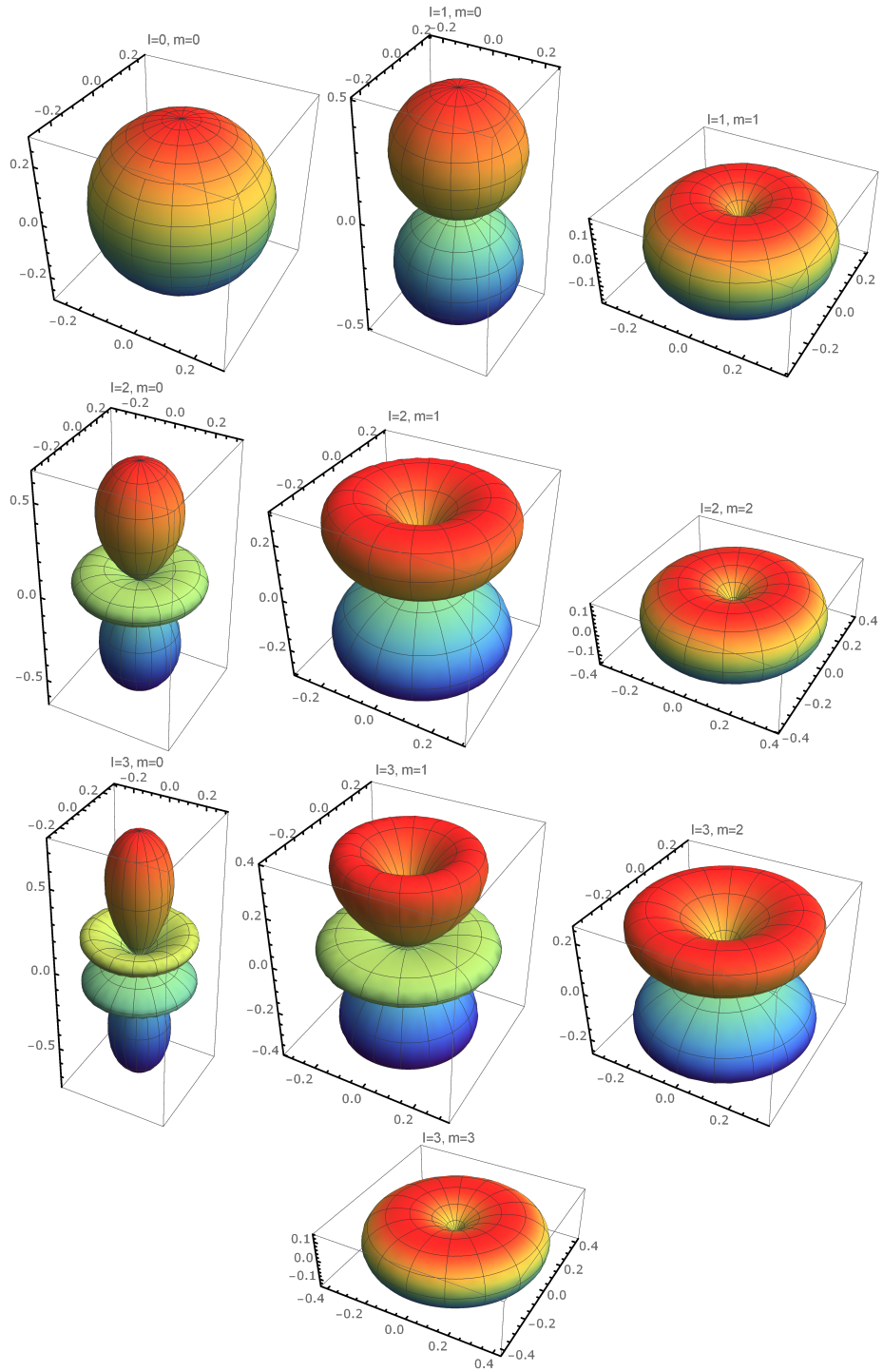


Figure 5.3: Harmoniques sphériques $Y_l^m(\theta, \phi)$ pour $l = 0, 1, 2$ et $0 \leq m \leq l$.

Démonstration

On a

$$\begin{aligned}
& \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^\pi d\theta \sin \theta \{Y_l^m(\theta, \phi)\}^* Y_{l'}^{m'}(\theta, \phi) \\
&= (-1)^{m+m'} \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{(2l+1)(2l'+1)(l-m)!(l'-m')!}{4(l+m)!(l'+m')!}} \\
&\times \int_0^{2\pi} e^{i(m-m')\phi} d\phi \int_0^\pi P_l^m(\cos \theta) P_{l'}^{m'}(\cos \theta) \sin \theta d\theta \\
&= (-1)^{m+m'} \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{(2l+1)(2l'+1)(l-m)!(l'-m')!}{4(l+m)!(l'+m')!}} \\
&\times 2\pi \delta_{mm'} \int_{-1}^1 P_l^m(x) P_{l'}^{m'}(x) dx
\end{aligned}$$

dans la dernière ligne, nous avons fait le changement de variable $x = \cos \theta$. Si on utilise l'Eq. (5.25), on obtient

$$\begin{aligned}
& \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^\pi d\theta \sin \theta \{Y_l^m(\theta, \phi)\}^* Y_{l'}^{m'}(\theta, \phi) \\
&= (-1)^{2m} \sqrt{\frac{(2l+1)(2l'+1)(l-m)!(l'-m)!}{4(l+m)!(l'+m)!}} \delta_{mm'} \int_{-1}^1 P_l^m(x) P_{l'}^m(x) dx \\
&= \sqrt{\frac{(2l+1)(2l'+1)(l-m)!(l'-m)!}{4(l+m)!(l'+m)!}} \delta_{mm'} \frac{2(l+m)!}{(2l+1)(l-m)!} \delta_{ll'} \\
&= \delta_{mm'} \delta_{ll'}
\end{aligned}$$

5.3.2 Propriétés

$$\{Y_l^m(\theta, \phi)\}^* = (-1)^m Y_l^{-m}(\theta, \phi) \quad (5.35)$$

Démonstration

En utilisant l'expression (5.33), on a

$$\{Y_l^m(\theta, \phi)\}^* = (-1)^m \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sqrt{\frac{(2l+1)(l-m)!}{2(l+m)!}} e^{-im\phi} P_l^m(\cos \theta)$$

En remplaçant $P_l^m(x)$ par $P_l^{-m}(x)$ (Eq. (5.21)), on obtient

$$\begin{aligned} \{Y_l^m(\theta, \phi)\}^* &= (-1)^m \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sqrt{\frac{(2l+1)(l-m)!}{2(l+m)!}} e^{-im\phi} (-1)^m \frac{(l+m)!}{(l-m)!} P_l^{-m}(\cos \theta) \\ &= (-1)^m (-1)^m \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sqrt{\frac{(2l+1)(l+m)!}{2(l-m)!}} e^{-im\phi} \\ &= (-1)^m Y_l^{-m}(\theta, \phi) \end{aligned}$$

5.4 Polynômes d'Hermite

Les polynômes d'Hermite ont été définis par Laplace en 1810 bien que sous une forme difficilement reconnaissable, et ont été étudiés en détail par Chebyshev en 1859. Les travaux de Chebyshev ont été oubliés et ils ont été nommés plus tard en l'honneur de Charles Hermite qui écrivait sur les polynômes en 1864 et les décrivait comme nouveaux. Par conséquent, ils n'étaient pas nouveaux, bien que plus tard dans des papiers de 1865, Hermite fut le premier à définir les polynômes multidimensionnels. Les polynômes d'Hermite sont les solution de l'équation d'Hermite qui est donnée par

$$\frac{d^2y}{dx^2} - 2x \frac{dy}{dx} + 2ny = 0 \quad (5.36)$$

En utilisant la méthode de Frobenius décrite en détail au Chap. (2), on trouve comme solutions

$$H_n(x) = \sum_{r=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} (-1)^r \frac{n!}{2^r r! (n-2r)!} x^{n-2r} \quad (5.37)$$

qui sont les polynômes d'Hermite.

Quelques expressions explicites pour $H_n(x)$ pour $n = 0, 1, 2, 3, 4$ sont données ci-dessous

$$\begin{aligned} H_0(x) &= 1 \\ H_1(x) &= 2x \\ H_2(x) &= 4x^2 - 2 \\ H_3(x) &= 8x^3 - 12x \\ H_4(x) &= 16x^4 - 48x^2 + 12 \end{aligned}$$

et elles sont représentées sur la Fig. (5.4).

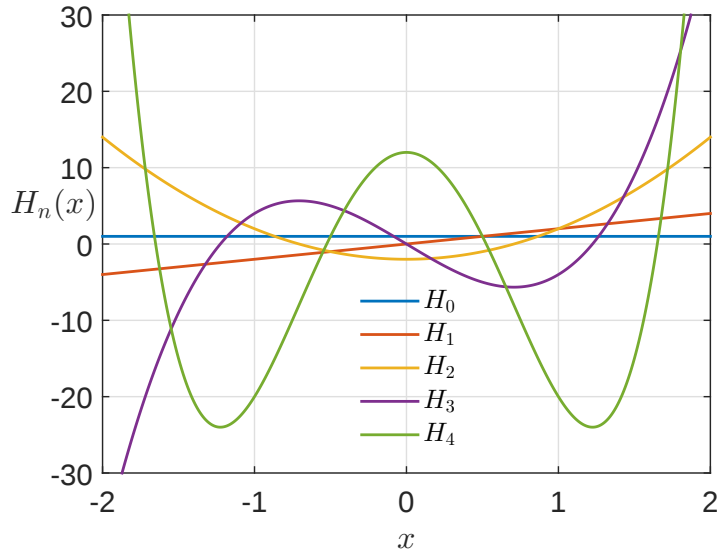


Figure 5.4: Polynômes d'Hermite pour $n = 0, 1, 2, 3, 4$.

5.4.1 Fonction génératrice

$$e^{2tx-t^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} H_n(x) \quad (5.38)$$

Démonstration

$$\begin{aligned} e^{2tx-t^2} &= e^{2tx} e^{-t^2} \\ &= \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(2tx)^r}{r!} \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(-t^2)^s}{s!} \\ &= \sum_{r,s=0}^{\infty} (-1)^s \frac{2^r x^r}{r! s!} t^{r+2s} \end{aligned}$$

On prend $n = r + 2s$, i.e. $r = n - 2s$, et puisque $r = n - 2s \geq 0$ alors $s \leq n/2$ et par suite

$$\begin{aligned} y &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{s=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} (-1)^s \frac{2^{n-2s} x^{n-2s}}{(n-2s)! s!} t^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} H_n(x) \end{aligned}$$

5.4.2 Relation d'orthogonalité

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} H_n(x) H_m(x) dx = 2^n n! \sqrt{\pi} \delta_{nm} \quad (5.39)$$

Démonstration

On a

$$e^{-t^2+2tx} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} H_n(x)$$

$$e^{-s^2+2sx} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{s^m}{m!} H_m(x)$$

donc

$$\sum_{n,m=0}^{\infty} \frac{t^{n+m}}{n!m!} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} H_n(x) H_m(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2+2tx} e^{-s^2+2sx} dx \quad (5.40)$$

mais

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2+2tx} e^{-s^2+2sx} dx &= e^{-t^2-s^2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2+2(s+t)x} dx \\ &= e^{-t^2-s^2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x-(s+t))^2+(s+t)^2} dx \\ &= e^{2st} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x-(s+t))^2} dx \end{aligned}$$

En faisant le changement de variable $u = x - (s + t)$, on obtient

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2+2tx} e^{-s^2+2sx} dx &= e^{2st} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-u^2} du \\ &= e^{2st} \sqrt{\pi} \\ &= \sqrt{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n s^n t^n}{n!} \end{aligned}$$

En identifiant les coefficients de t^n du côté gauche de l'expression (5.40) avec ceux du côté droit de la dernière expression, on déduit que

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} H_n(x) H_m(x) dx = \begin{cases} 0 & \text{si } n \neq m \\ \sqrt{\pi} 2^n n! & \text{si } n = m \end{cases} \quad (5.41)$$

5.4.3 Relations de récurrence

$$\begin{aligned} (a) \quad & H'_n(x) = 2nH_{n-1}(x) \quad (n \geq 1); \quad H'_0(x) = 0, \\ (b) \quad & H_{n+1}(x) = 2xH_n(x) - 2nH_{n-1}(x) \quad (n \geq 1); \quad H_1(x) = 2xH_0(x) \end{aligned} \quad (5.42)$$

Démonstration

(a) Si on dérive les deux côtés de l'expression de la fonction génératrice (5.38) par rapport à x , on obtient

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} H'_n(x) &= 2te^{2tx-t^2} \\ &= 2t \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} H_n(x) \\ &= 2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^{n+1}}{n!} H'_n(x) \\ &= 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^n}{(n-1)!} H'_{n-1}(x) \end{aligned}$$

En comparant les coefficients de t^n des deux côtés, on trouve pour $n = 0$

$$H'_0(x) = 0$$

et pour $n \geq 1$

$$\frac{H'_n(x)}{n!} = \frac{2H_{n-1}(x)}{(n-1)!}$$

qui peut être simplifier à

$$H'_n(x) = 2nH_{n-1}(x)$$

(b) Dérivons les deux côtés de l'Eq. (5.38) par rapport à t , on obtient

$$(2x - 2t)e^{2tx-t^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{nt^{n-1}}{n!} H_n(x)$$

pour $n = 0$, le terme de côté droite est nul, donc la somme commence pour $n = 1$,

$$(2x - 2t) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} H_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{nt^{n-1}}{n!} H_n(x)$$

En développant le terme du côté gauche, on trouve

$$2x \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} H_n(x) - 2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^{n+1}}{n!} H_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{nt^{n-1}}{n!} H_n(x)$$

qui peut être simplifier à

$$2x \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} H_n(x) - 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^n}{(n-1)!} H_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^n}{n!} H_{n+1}(x)$$

En comparant les coefficients de t^n pour $n \geq 1$, on obtient

$$\frac{2x}{n!} H_n(x) - \frac{2}{(n-1)!} H_{n-1}(x) = \frac{1}{n!} H_{n+1}(x)$$

En multipliant par $n!$, on trouve

$$2xH_n(x) - 2nH_{n-1}(x) = H_{n+1}(x)$$

et pour $n = 0$ on obtient

$$2xH_0(x) = H_1(x)$$

5.5 Polynôme de Laguerre

L'équation de Laguerre est donnée par

$$x \frac{d^2 y}{dx^2} + (1-x) \frac{dy}{dx} + ny = 0 \quad (5.43)$$

On applique la même méthode de Frobenius du Chap. (2), c'est à dire, on cherche une solution sous la forme

$$y(x, s) = \sum_{r=0}^{\infty} a_r x^{r+s}$$

on obtient les équations indiciales suivantes

$$a_0 s^2 = 0$$

$$a_1 (s+1)^2 = 0$$

$$a_r (s+r-n) - a_{r+1} (s+r+1)^2 = 0, \quad r \geq 2$$

Les deux premières équations admettent une double racine $s = 0$. La dernière équation donne une relation de récurrence pour les coefficients a_r pour $r \geq 2$

$$a_{r+1} = a_r \frac{s+r-n}{(s+r+1)^2}$$

En remplaçant $s = 0$ on obtient

$$a_{r+1} = a_r \frac{r-n}{(r+1)^2}$$

avec cette forme de coefficients a_r , on remarque que la série infinie $y(x, 0)$ qui en résulte se comporte comme une exponentielle pour x très grand, donc la série diverge. Pour éviter ce problème, la série devrait être tronquée: on prend $a_r = 0$ si $r > n$ i.e., pour $r = n + 1, n + 2, \dots$. Ceci est possible si n est un entier positif. On réécrit a_r sous la forme

$$a_{r+1} = -a_r \frac{n-r}{(r+1)^2}$$

la solution devient

$$\begin{aligned} y &= a_0 \left\{ 1 - \frac{n}{1^2}x + \frac{n(n-1)}{(2!)^2}x^2 + \dots + (-1)^r \frac{n(n-1)\dots(n-r+1)}{(r!)^2}x^r + \dots \right\} \\ &= a_0 \sum_{r=0}^n (-1)^r \frac{n(n-1)\dots(n-r+1)}{(r!)^2} x^r \\ &= a_0 \sum_{r=0}^n (-1)^r \frac{n!}{(n-r)!(r!)^2} x^r \end{aligned}$$

En choisissant $a_0 = 1$, on obtient la solution finale de l'Eq. (5.30) notée $L_n(x)$ et qui s'appelle le polynôme de Laguerre

$$L_n(x) = \sum_{r=0}^n (-1)^r \frac{n!}{(n-r)!(r!)^2} x^r \quad (5.44)$$

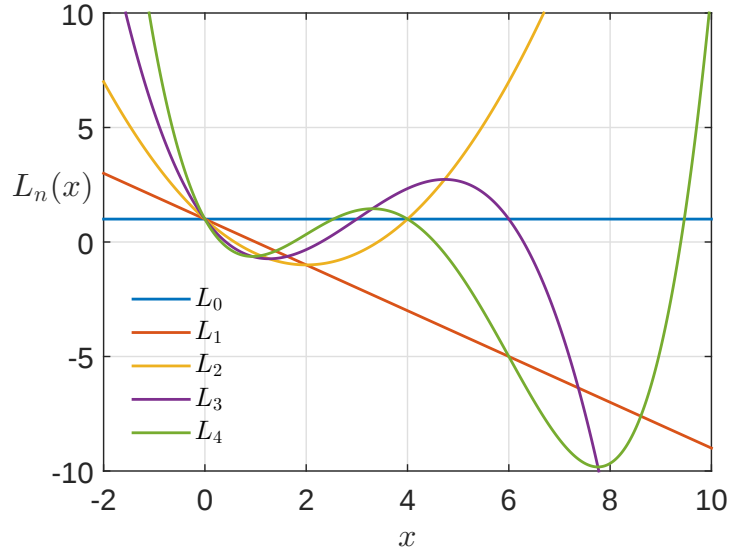
Quelques expressions explicites pour $L_n(x)$ pour $n = 0, 1, 2, 3, 4$ sont données ci-dessous

$$\begin{aligned} L_0(x) &= 1 \\ L_1(x) &= -x + 1 \\ L_2(x) &= \frac{1}{2}(x^2 - 4x + 2) \\ L_3(x) &= \frac{1}{3!}(-x^3 + 9x^2 - 18x + 6) \\ L_4(x) &= \frac{1}{4!}(x^4 - 16x^3 + 72x^2 - 96x + 24) \end{aligned}$$

et elles sont représentées dans la Fig. (5.5).

5.5.1 Fonction génératrice

$$\frac{1}{1-t} \exp\{-xt/(1-t)\} = \sum_{n=0}^{\infty} t^n L_n(x) \quad (5.45)$$

Figure 5.5: Polynômes de Laguerre pour $n = 0, 1, 2, 3, 4$.*Démonstration*

On a

$$\begin{aligned} \frac{1}{1-t} \exp \{-xt/(1-t)\} &= \frac{1}{1-t} \sum_{r=0}^{\infty} \frac{1}{r!} \left(-\frac{xt}{1-t}\right)^r \\ &= \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-1)^r}{r!} \frac{x^r t^r}{(1-t)^{r+1}} \end{aligned}$$

Le développement en série de $1/(1-t)^2$ donne

$$\frac{1}{(1-t)^{r+1}} \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(r+s)!}{r!s!} t^s$$

donc

$$\frac{1}{1-t} \exp \{-xt/(1-t)\} = \sum_{r,s=0}^{\infty} (-1)^r \frac{(r+s)!}{(r!)^2 s!} x^r t^{r+s}$$

Posons $n = r + s$, on obtient

$$\begin{aligned} \frac{1}{1-t} \exp \{-xt/(1-t)\} &= \sum_{n=0}^{\infty} t^n \sum_{r=0}^n (-1)^r \frac{n!}{(r!)^2 (n-r)!} x^r \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} t^n L_n(x) \end{aligned}$$

5.5.2 Relation d'orthogonalité

$$\int_0^\infty e^{-x} L_n(x) L_m(x) dx = \delta_{nm} \quad (5.46)$$

Démonstration:

A partir de la fonction génératrice, on a

$$\begin{aligned} \frac{1}{1-t} \exp\{-xt/(1-t)\} &= \sum_{n=0}^{\infty} t^n L_n(x) \\ \frac{1}{1-s} \exp\{-xs/(1-s)\} &= \sum_{m=0}^{\infty} s^m L_m(x) \end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned} \sum_{n,m=0}^{\infty} t^n s^m \int_0^\infty e^{-x} L_n(x) L_m(x) dx &= \frac{1}{1-t} \frac{1}{1-s} \int_0^\infty e^{-x} e^{-xt/(1-t)} e^{-xs/(1-s)} dx \\ &= \frac{1}{1-t} \frac{1}{1-s} \left[-\frac{1}{1 + [t/(1-t)] + [s/(1-s)]} \right. \\ &\quad \times \exp\left\{-x \left(1 + \frac{t}{1-t} + \frac{s}{1-s}\right)\right\} \Big]_0^\infty \\ &= \frac{1}{1-st} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} s^n t^n \end{aligned}$$

En comparant les coefficients de t^{n+m} des deux côtés, on trouve que

$$\int_0^\infty e^{-x} L_n(x) L_m(x) dx = \delta_{nm}$$

5.5.3 Relations de récurrence

$$\begin{aligned} (a) \quad (n+1)L_{n+1}(x) &= (2n+1-x)L_n(x) - nL_{n-1}(x) \\ (b) \quad xL'_n(x) &= nL_n(x) - nL_{n-1}(x) \\ (c) \quad L'_n(x) &= -\sum_{r=0}^{n-1} L_r(x) \end{aligned} \quad (5.47)$$

Démonstration

En dérivant les deux côtés de l'expression (5.45) par rapport à t , on obtient

$$\sum_{n=0}^{\infty} n t^{n-1} L_n(x) = \frac{1}{(1-t)^2} e^{-xt/(1-t)} - \frac{x}{(1-t)^2} \frac{1}{1-t} e^{-xt/(1-t)}$$

En remplaçant les deux termes du côté droit par la fonction génératrice (5.45), on obtient

$$\sum_{n=0}^{\infty} nt^{n-1}L_n(x) = \frac{1}{(1-t)} \sum_{n=0}^{\infty} t^n L_n(x) - \frac{x}{(1-t)^2} \sum_{n=0}^{\infty} t^n L_n(x)$$

En multipliant par $(1-t)^2$, il en résulte que

$$(1-t)^2 \sum_{n=0}^{\infty} nt^{n-1}L_n(x) = (1-t) \sum_{n=0}^{\infty} t^n L_n(x) - \sum_{n=0}^{\infty} t^n L_n(x)$$

qui peut être simplifier á

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} nt^{n-1}L_n(x) - 2 \sum_{n=0}^{\infty} nt^n L_n(x) + \sum_{n=0}^{\infty} nt^{n+1}L_n(x) = \\ \sum_{n=0}^{\infty} t^n L_n(x) - \sum_{n=0}^{\infty} t^{n+1}L_n(x) - x \sum_{n=0}^{\infty} t^n L_n(x) \end{aligned}$$

En faisant glisser les indices de $n-1$ et $n+1$ à n pour que t a une puissance n dans tous les termes, on obtient

$$\begin{aligned} \sum_{n=-1}^{\infty} (n+1)t^n L_{n+1}(x) - 2 \sum_{n=0}^{\infty} nt^n L_n(x) + \sum_{n=1}^{\infty} (n-1)t^n L_n(x) = \\ \sum_{n=0}^{\infty} t^n L_n(x) - \sum_{n=1}^{\infty} t^n L_{n-1}(x) - x \sum_{n=0}^{\infty} t^n L_n(x) \end{aligned}$$

En identifiant les coefficients de t^n , on obtient la relation désiré

$$(n+1)L_{n+1}(x) = (2n+1-x)L_n(x) - nL_{n-1}(x)$$

(b) Dérivons maintenant l'équation de la fonction génératrice (5.45) par rapport à x , nous trouvons

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} t^n L'_n(x) &= -\frac{t}{1-t} \frac{1}{1-t} e^{-xt/(1-t)} \\ &= -\frac{t}{1-t} \sum_{n=0}^{\infty} t^n L_n(x) \end{aligned} \tag{5.48}$$

En multipliant par $(1-t)$, on trouve

$$\sum_{n=0}^{\infty} t^n L'_n(x) - \sum_{n=0}^{\infty} t^{n+1} L'_n(x) = - \sum_{n=0}^{\infty} t^{n+1} L_n(x)$$

qui peut être écrite sous la forme

$$\sum_{n=0}^{\infty} t^n L'_n(x) - \sum_{n=1}^{\infty} t^n L'_{n-1}(x) = -t \sum_{n=1}^{\infty} t^n L_{n-1}(x)$$

Par identification des coefficients de t^n des deux côtés pour $n \geq 1$, on trouve

$$L'_n(x) - L'_{n-1}(x) = -L_{n-1}(x) \quad (n \geq 1)$$

cette équation peut être écrite de deux manières différentes (pour n et $n + 1$)

$$\begin{aligned} L'_{n-1}(x) &= L'_n(x) + L_{n-1}(x) \\ L'_{n+1}(x) &= L'_n(x) - L_n(x) \end{aligned}$$

La dérivée de la formule (a) par rapport à x s'écrit

$$(n+1)L'_{n+1}(x) = (2n+1-x)L'_n(x) - L_n(x) - nL'_{n-1}(x)$$

En remplaçant l'expressions de $L'_{n-1}(x)$ et $L'_{n+1}(x)$, on trouve après simplifications

$$xL'_n(x) = nL_n(x) - nL_{n-1}(x)$$

(c) En développant $1/(1-t)$ en série entière et en remplaçant dans (5.48), on obtient

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} t^n L'_n(x) &= -t \sum_{r=0}^{\infty} \sum_{s=0}^{\infty} t^s L_s(x) \\ &= - \sum_{r,s=0}^{\infty} t^{r+s+1} L_s(x) \end{aligned}$$

Posons $n = r + s + 1$, i.e. $r = n - s - 1$, et comme $r \geq 0$ on a $n - s - 1 \geq 0$, cela implique que $s \leq n - 1$, donc il en résulte que

$$\sum_{n=0}^{\infty} t^n L'_n(x) = - \sum_{n=0}^{\infty} t^n \sum_{s=0}^{n-1} L_s(x)$$

Par identification des coefficients de t^n des deux côtés, on obtient

$$L'_n(x) = - \sum_{s=0}^{n-1} L_s(x)$$

5.6 Polyôme de Laguerre associé

L'équation de Laguerre associée est donnée par

$$x \frac{d^2 y}{dx^2} + (k+1-x) \frac{dy}{dx} + ny = 0 \quad (5.49)$$

la solution de cette équation est donnée par

$$y_n^k(x) = \frac{d^k}{dx^k} L_{n+k}(x)$$

cette solution multipliée par la constante $(-1)^k$ est appelée polynôme associé de Laguerre noté $L_n^k(x)$

$$L_n^k(x) = (-1)^k \frac{d^k}{dx^k} L_{n+k}(x) \quad (5.50)$$

et il est donné explicitement par

$$L_n^k(x) = \sum_{r=0}^n (-1)^k \frac{(n+k)!}{(n-r)!(k+r)!} x^r \quad (5.51)$$

5.6.1 Fonction génératrice

$$\frac{e^{-xt/(1-t)}}{(1-t)^{k+1}} = \sum_{n=0}^{\infty} t^n L_n^k(x) \quad (5.52)$$

Démonstration

On dérive l'équation de la fonction génératrice du polynôme de Laguerre (Eq. (5.45)) k fois par rapport à x , on trouve

$$\frac{1}{1-t} \frac{d^k}{dx^k} e^{-xt/(1-t)} = \frac{d^k}{dx^k} \sum_{n=k}^{\infty} L_n(x) t^n$$

la somme du côté droit commence par $n = k$ parce que $L_n(x)$ est un polynôme de degré n et la dérivée d'ordre k de $L_n(x)$ donne 0 si $n < k$. La dérivée d'ordre k de l'exponentielle donne

$$\left(-\frac{t}{1-t}\right)^k \frac{1}{1-t} e^{-xt/(1-t)} = \frac{d^k}{dx^k} \sum_{n=0}^{\infty} L_{n+k}(x) t^{n+k}$$

si on insère l'expression (5.45) de la fonction génératrice dans l'équation précédente on obtient

$$(-1)^k \frac{t^k}{(1-t)^{k+1}} e^{-xt/(1-t)} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^k L_n^k(x) t^{n+k}$$

Après simplifications on trouve le résultat désiré

$$\frac{1}{(1-t)^{k+1}} e^{-xt/(1-t)} = \sum_{n=0}^{\infty} t^n L_n^k(x)$$

5.6.2 Relation d'orthogonalité

$$\int_0^\infty e^{-x} x^k L_n^k(x) L_m^k(x) dx = \frac{(n+k)!}{n!} \delta_{nm} \quad (5.53)$$

Démonstration

D'après la formule (5.52), on a

$$\begin{aligned} \frac{1}{(1-t)^{k+1}} e^{-xt/(1-t)} &= \sum_{n=0}^{\infty} t^n L_n^k(x) \\ \frac{1}{(1-s)^{k+1}} e^{-xs/(1-s)} &= \sum_{m=0}^{\infty} s^m L_m^k(x) \end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned} \sum_{n,m=0}^{\infty} t^{n+m} \int_0^\infty e^{-x} x^k L_n^k(x) L_m^k(x) dx &= \frac{1}{(1-t)^{k+1}} \frac{1}{(1-s)^{k+1}} \\ &\times \int_0^\infty e^{-x} x^k e^{-xt/(1-t)} e^{-xs/(1-s)} dx \end{aligned} \quad (5.54)$$

l'intégrale peut être calculer en posant: $\{-1 - t/(1-t) - s/(1-s)\}x = -ax = u$ où $a = \{-1 - t/(1-t) - s/(1-s)\}$, i.e. $dx = -du/a$, on obtient

$$\begin{aligned} \int_0^\infty x^k \exp\left\{-x - \frac{xt}{(1-t)} - \frac{xs}{(1-s)}\right\} dx &= \int_0^\infty \left(\frac{u}{a}\right)^k e^{-u} \frac{du}{a} \\ &= \frac{1}{a^{k+1}} \int_0^\infty u^k e^{-u} du \\ &= \frac{1}{a^{k+1}} \Gamma(k+1) \\ &= \frac{k!(1-t)^{k+1}(1-s)^{k+1}}{(1-st)^{k+1}} \end{aligned}$$

En remplaçant le résultat obtenu de l'intégrale dans l'expression (5.54), on trouve

$$\sum_{n,m=0}^{\infty} t^{n+m} \int_0^\infty e^{-x} x^k L_n^k(x) L_m^k(x) dx = \frac{k!}{(1-st)^{k+1}}$$

Le développement en série de $1/(1-st)^{k+1}$ donne

$$\frac{1}{(1-st)^{k+1}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+k)!}{k!} \frac{s^n t^n}{n!}$$

donc, on obtient finalement

$$\sum_{n,m=0}^{\infty} t^{n+m} \int_0^\infty e^{-x} x^k L_n^k(x) L_m^k(x) dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+k)!}{n!} s^n t^n$$

En identifiant les coefficients de $s^m t^n$ des deux côtés, on trouve

$$\int_0^\infty e^{-x} x^k L_n^k(x) L_m^k(x) dx = \frac{(n+k)!}{n!} \delta_{nm}$$

5.6.3 Relations de récurrence

$$\begin{aligned} (a) \quad & L_{n-1}^k(x) + L_n^{k-1}(x) = L_n^k(x) \\ (b) \quad & (n+1)L_{n+1}^k(x) = (2n+k+1-x)L_n^k(x) - (n+k)L_{n-1}^k(x) \\ (c) \quad & xL_n^{k'}(x) = nL_n^k(x) - (n+k)L_{n-1}^k(x) \\ (d) \quad & L_n^{k'}(x) = -\sum_{r=0}^{n-1} L_r^k(x) \\ (e) \quad & L_n^{k'}(x) = -L_{n-1}^{k+1}(x) \\ (f) \quad & L_n^{k+1}(x) = \sum_{r=0}^n L_r^k(x) \end{aligned} \tag{5.55}$$

Démonstration

(a) On a

$$\begin{aligned} L_{n-1}^k(x) + L_n^{k-1}(x) &= \sum_{r=0}^{n-1} \frac{(-1)^r (n-1+k)!}{(n-1-r)!(k+r)!r!} x^r + \sum_{r=0}^n \frac{(-1)^r (n+k-1)!}{(n-r)!(k-1+r)!r!} x^r \\ &= \sum_{r=0}^{n-1} \frac{(-1)^r (n-1+k)!}{(n-1-r)!(k+r)!r!} x^r + \sum_{r=0}^{n-1} \frac{(-1)^r (n+k-1)!}{(n-r)!(k-r+1)!r!} x^r + \frac{(-1)^n (n-1+k)!}{(n-n)!(k-1+n)!n!} x^n \\ &= \sum_{r=0}^{n-1} (-1)^r \frac{(n+k-1)!}{(n-r-1)!(k+r-1)!r!} \left\{ \frac{1}{k+r} + \frac{1}{n-r} \right\} x^r + (-1)^n \frac{x^n}{n!} \\ &= \sum_{r=0}^{n-1} (-1)^r \frac{(n+k-1)!}{(n-r-1)!(k+r-1)!r!} \frac{n+k}{(k+r)(n-r)} x^r + (-1)^n \frac{x^n}{n!} \\ &= \sum_{r=0}^{n-1} (-1)^r \frac{(n+k)!}{(n-r)!(k+r)!r!} + (-1)^n \frac{x^n}{n!} \\ &= \sum_{r=0}^n (-1)^r \frac{(n+k)!}{(n-r)!(k+r)!r!} \\ &= L_n^k(x) \end{aligned}$$

(b) Dérivons k fois l'expression (5.47)(a) avec n remplacé par $n+k$. On trouve

$$\begin{aligned} (n+k+1) \frac{d^k}{dx^k} L_{n+k+1}(x) &= (2n+2k+1) \frac{d^k}{dx^k} L_{n+k}(x) - \frac{d^k}{dx^k} \{xL_{n+k}(x)\} \\ &\quad - (n+k) \frac{d^k}{dx^k} L_{n+k-1}(x) \end{aligned}$$

En utilisant la formule de dérivation de Leibniz, on a

$$\frac{d^k}{dx^k} \{fg\} = \sum_{n=0}^k \frac{k!}{n!(n-k)!} \frac{d^n f}{dx^n} \frac{d^{n-k} g}{dx^{n-k}} \quad (5.56)$$

alors

$$\begin{aligned} \frac{d^k}{dx^k} \{xL_{n+k}(x)\} &= \sum_{r=0}^k \frac{k!}{r!(k-r)!} \frac{d^r}{dx^r} (x) \frac{d^{k-r}}{dx^{k-r}} L_{n+k}(x) \\ &= x \frac{d^k}{dx^k} L_{n+k}(x) + k \frac{d^{k-1}}{dx^{k-1}} L_{n+k}(x) \end{aligned}$$

donc on obtient

$$\begin{aligned} (n+k+1) \frac{d^k}{dx^k} L_{n+k+1}(x) &= (2n+2k+1) \frac{d^k}{dx^k} L_{n+k}(x) - x \frac{d^k}{dx^k} L_{n+k}(x) - k \frac{d^{k-1}}{dx^{k-1}} L_{n+k}(x) \\ &\quad - (n+k) \frac{d^k}{dx^k} L_{n+k-1}(x) \end{aligned}$$

En utilisant la définition du polynôme de Laguerre associé (5.51), l'équation précédente devient

$$\begin{aligned} (n+k+1)(-1)^k L_{n+1}^k(x) &= (2n+2k+1)(-1)^k L_n^k(x) - x(-1)^k L_{n+k}^k(x) - k(-1)^k L_n^k(x) \\ &\quad - (n+k)(-1)^k L_{n-1}^k(x) \end{aligned}$$

et si on prend en considération la relation (5.55)(a) avec n remplacé par $n+1$, on arrive au résultat désiré

$$(n+1)L_{n+1}^k(x) = (2n+k+1-x)L_n^k(x) - (n+k)L_{n-1}^k(x)$$

(c) En dérivant k fois l'expression (5.55)(b) par rapport à x , on obtient

$$\frac{d^k}{dx^k} \{xL'_{n+k}(x)\} = (n+k) \frac{d^k}{dx^k} L_{n+k}(x) - (n+k) \frac{d^k}{dx^k} L_{n+k-1}(x)$$

En utilisant la règle de Leibniz Eq. (5.56), on trouve

$$x \frac{d^k}{dx^k} L'_{n+k}(x) + k \frac{d^k}{dx^k} L_{n+k}(x) = (n+k) \frac{d^k}{dx^k} L_{n+k}(x) - (n+k) \frac{d^k}{dx^k} L_{n+k-1}(x)$$

à partir de la définition du polynôme de Laguerre associé, on obtient (après simplifications)

$$xL_n^{k'}(x) = nL_n^k(x) - (n+k)L_{n-1}^k(x)$$

(d) Dérivons k fois l'expression (5.55)(c) par rapport à x . Il en résulte

$$\frac{d^k}{dx^k} L'_{n+k}(x) = - \sum_{r=0}^{n+k-1} \frac{d^k}{dx^k} L_r(x)$$

ou $d^k L'_{n+k}(x)/dx^k = (-1)^k L_n^{k'}(x)$. Comme $L_r(x)$ est un polynôme de degré r , la dérivée d'ordre k de $L_r(x)$ vaut 0 si $k > r$ donc

$$(-1)^k L_n^{k'}(x) = - \sum_{r=0}^{n+k-1} \frac{d^k}{dx^k} L_r(x)$$

En faisant le changement de variable $s = r - k$, on trouve

$$L_n^{k'}(x) = - \sum_{r=0}^{n-1} L_r^k(x)$$

(e) Par définition du polynôme de Laguerre associé, on a

$$\begin{aligned} L_n^{k'}(x) &= \frac{d}{dx} \sum_{r=0}^n (-1)^r \frac{(n+k)!}{(n-r)!(k+r)!r!} x^r \\ &= \sum_{r=1}^n (-1)^r \frac{(n+k)!}{(n-r)!(k+r)!(r-1)!} x^{r-1} \\ &= \sum_{s=0}^n (-1)^{s+1} \frac{(n+k)!}{(n-s-1)!(k+s+1)!s!} x^s \\ &= - \sum_{s=0}^n (-1)^{s+1} \frac{(n-1+k+1)!}{(n-s-1)!(k+s+1)!s!} x^s \\ &= -L_{n-1}^{k+1}(x) \end{aligned}$$

(f) En comparant les résultats précédents (d) et (e), on a

$$- \sum_{r=0}^{n-1} L_r^k(x) = -L_{n-1}^{k+1}(x)$$

En remplaçant n par $n+1$, on trouve

$$L_n^{k+1}(x) = - \sum_{r=0}^n L_r^k(x)$$

5.7 Polynôme de Chebyshev

L'équation de Chebyshev est donnée par

$$(1-x^2) \frac{d^2 y}{dx^2} - x \frac{dy}{dx} + n^2 y = 0 \quad (5.57)$$

Les deux solutions indépendantes de cette équation sont appelées polynômes de Chebyshev de première espèce (noté $T_n(x)$) et de deuxième espèce (noté $U_n(x)$) et

sont définis par

$$T_n(x) = \cos(n \cos^{-1} x) \quad (5.58)$$

$$U_n(x) = \sin(n \cos^{-1} x) \quad (5.59)$$

où n est un entier non-négatif. Les polynômes de Chebyshev peuvent être écrits sous les formes

$$T_n(x) = \frac{1}{2} \left\{ \left[x + i \sqrt{1-x^2} \right]^n + \left[x - i \sqrt{1-x^2} \right]^n \right\} \quad (5.60)$$

$$U_n(x) = -\frac{i}{2} \left\{ \left[x + i \sqrt{1-x^2} \right]^n - \left[x - i \sqrt{1-x^2} \right]^n \right\} \quad (5.61)$$

Démonstration

En faisant le changement de variable $x = \cos \theta$ dans l'expression (5.58), on obtient

$$\begin{aligned} T_n(x) &= \cos(n \cos^{-1} \cos \theta) \\ &= \cos(n\theta) \\ &= \frac{1}{2} \{ e^{in\theta} + e^{-in\theta} \} \\ &= \frac{1}{2} \{ (e^{i\theta})^n + (e^{-i\theta})^n \} \\ &= \frac{1}{2} \{ [\cos \theta + i \sin \theta]^n + [\cos \theta - i \sin \theta]^n \} \\ &= \frac{1}{2} \left\{ \left[x + i \sqrt{1-x^2} \right]^n + \left[x - i \sqrt{1-x^2} \right]^n \right\} \end{aligned}$$

La preuve de la deuxième relation (5.59) pour $U_n(x)$ est similaire à celle de $T_n(x)$.

5.7.1 Représentations en séries

$$T_n(x) = \sum_{r=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} (-1)^r \frac{n!}{(2r)!(n-2r)!} (1-x^2)^r x^{n-2r} \quad (5.62)$$

$$U_n(x) = \sum_{r=0}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} (-1)^r \frac{n!}{(2r+1)!(n-2r-1)!} (1-x^2)^{r+\frac{1}{2}} x^{n-2r-1} \quad (5.63)$$

Démonstration

En utilisant la formule du binôme de Newton pour les deux termes de la formule (5.60), on obtient

$$\begin{aligned} T_n(x) &= \frac{1}{2} \left\{ \left[x + i \sqrt{1-x^2} \right]^n + \left[x - i \sqrt{1-x^2} \right]^n \right\} \\ &= \frac{1}{2} \left\{ \sum_{r=0}^n \frac{n!}{r!(n-r)!} x^{n-r} \left[i \sqrt{1-x^2} \right]^r + \sum_{r=0}^n \frac{n!}{r!(n-r)!} x^{n-r} \left[-i \sqrt{1-x^2} \right]^r \right\} \\ &= \frac{1}{2} \sum_{r=0}^n \frac{n!}{r!(n-r)!} x^{n-r} (1-x^2)^{r/2} i^r (1 + (-1)^r) \end{aligned}$$

si r est impair, on a $1 + (-1)^r = 0$ et si r est pair, on a $1 + (-1)^r = 2$, posant $r = 2s$, on obtient

$$T_n(x) = \frac{1}{2} \sum_{s=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \frac{n!}{2!(n-2s)!} x^{n-2s} (1-x^2)^s 2(-1)^s$$

La preuve de la deuxième expression (5.63) est similaire à celle de (5.62).

Quelques expressions explicites pour $T_n(x)$ et $U_n(x)$ (calculées à partir des formules (5.62) et (5.63)) sont données ci-dessous

$$\begin{aligned} T_0(x) &= 1, \\ T_1(x) &= x, \\ T_2(x) &= 2x^2 - 1, \\ T_3(x) &= 4x^3 - 3x, \\ T_4(x) &= 8x^4 - 8x^2 + 1, \\ T_5(x) &= 16x^5 - 20x^3 + 5x. \end{aligned}$$

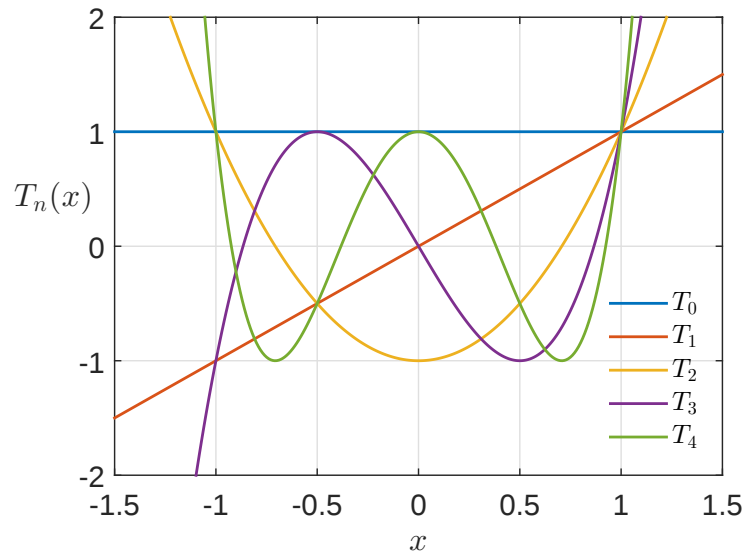


Figure 5.6: Polynômes de Chebyshev de première espèce pour $n = 0, 1, 2, 3, 4$.

$$\begin{aligned}
U_0(x) &= 0, \\
U_1(x) &= \sqrt{1-x^2}, \\
U_2(x) &= \sqrt{1-x^2}2x, \\
U_3(x) &= \sqrt{1-x^2}(4x^2-1), \\
U_4(x) &= \sqrt{1-x^2}(8x^3-4x), \\
U_5(x) &= \sqrt{1-x^2}(16x^4-12x^2+1).
\end{aligned}$$

Elles sont représentées sur les figures Fig. (5.6) et (5.7) respectivement.

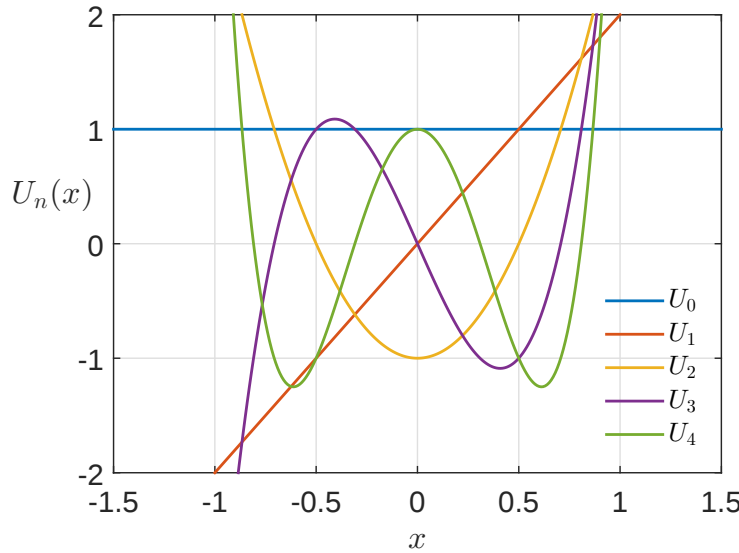


Figure 5.7: Polynômes de Chebyshev de deuxième espèce pour $n = 0, 1, 2, 3, 4$.

5.7.2 Fonctions génératrices

Les fonctions génératrices des polynômes de Chebyshev sont données par

$$\frac{1-t^2}{1-2tx+t^2} = T_0(x) + 2 \sum_{n=1}^{\infty} t^n T_n(x) \quad (5.64)$$

$$\frac{\sqrt{1-t^2}}{1-2tx+t^2} = \sum_{n=0}^{\infty} t^n U_{n+1}(x) \quad (5.65)$$

Démonstration

Pour démontrer (5.64), on fait le changement de variable $x = \cos \theta = (e^{i\theta} + e^{-i\theta})/2$.

On trouve

$$\begin{aligned}
 \frac{1-t^2}{1-2tx+t^2} &= \frac{1-t^2}{1-(e^{i\theta}+e^{-i\theta})t+t^2} \\
 &= \frac{1-t^2}{(1-e^{i\theta}t)(1-e^{-i\theta}t)} \\
 &= (1-t^2) \sum_{r=0}^{\infty} (te^{i\theta})^r \sum_{s=0}^{\infty} (te^{-i\theta})^s \\
 &= (1-t^2) \sum_{r,s=0}^{\infty} e^{i(r-s)\theta} t^{r+s} \\
 &= \sum_{r,s=0}^{\infty} e^{i(r-s)\theta} t^{r+s} - \sum_{r,s=0}^{\infty} e^{i(r-s)\theta} t^{r+s+2}
 \end{aligned}$$

En posant $n = r + s$, on obtient le coefficient de t^0 , i.e. pour $n = 0$, en considérant $r = 0$ et $s = 0$. Donc le coefficient est donnée par

$$e^{i(0-0)\theta} = 1 = T_0(x)$$

On obtient le coefficient de t^1 pour $n = 1$ en prenant soit $r = 1$ et $s = 0$ où inversement, donc

$$\begin{aligned}
 e^{i\theta} + e^{-i\theta} &= 2 \cos \theta \\
 &= 2x \\
 &= 2T_1(x)
 \end{aligned}$$

pour $n \geq 2$, le coefficient de t^n est obtenue soit en posant $n = s + r$ (i.e., $s = n - r$) dans la première somme ou bien en posant $n = r + s + 2$ (i.e., $s = n - r - 2$) dans la deuxième somme, donc le coefficient de t^n est donné par

$$\begin{aligned}
 \sum_{r=0}^n e^{i(r-(n-r))\theta} - \sum_{r=0}^{n-2} e^{i(r-(n-r-2))\theta} &= e^{-in\theta} \sum_{r=0}^n e^{i2r\theta} - e^{-i(n-2)\theta} \sum_{r=0}^{n-2} e^{i2r\theta} \\
 &= e^{-in\theta} \frac{1 - (e^{i2\theta})^{n+1}}{1 - e^{i2\theta}} - e^{-i(n-2)\theta} \frac{1 - (e^{i2\theta})^{n-1}}{1 - e^{i2\theta}} \\
 &= \frac{e^{-in\theta} - e^{i(n+2)\theta} - e^{-i(n-2)\theta} + e^{in\theta}}{1 - e^{i2\theta}} \\
 &= \frac{e^{-in\theta} [1 - e^{i2\theta}] + e^{in\theta} [1 - e^{i2\theta}]}{1 - e^{i2\theta}} \\
 &= e^{in\theta} + e^{-in\theta} \\
 &= 2 \cos(n\theta) \\
 &= 2T_n(x)
 \end{aligned}$$

On obtient finalement

$$\begin{aligned}\frac{1-t^2}{1-2tx+t^2} &= T_0(x) + 2tT_1(x) + 2\sum_{n=2}^{\infty} t^n T_n(x) \\ &= T_0(x) + 2\sum_{n=1}^{\infty} t^n T_n(x)\end{aligned}$$

On peut utiliser exactement la même preuve pour démontrer l'expression (Eq. (5.65)) pour $U_n(x)$.

5.7.3 Relations d'orthogonalité

$$\int_{-1}^1 \frac{T_n(x)T_m(x)}{\sqrt{1-x^2}} dx = \begin{cases} 0 & m \neq n \\ \pi/2 & m = n \neq 0 \\ \pi & m = n = 0 \end{cases} \quad (5.66)$$

$$\int_{-1}^1 \frac{U_n(x)U_m(x)}{\sqrt{1-x^2}} dx = \begin{cases} 0 & m \neq n \\ \pi/2 & m = n \neq 0 \\ 0 & m = n = 0 \end{cases} \quad (5.67)$$

Démonstration

Si on pose $x = \cos \theta$, on a

$$\begin{aligned}\int_{-1}^1 \frac{T_n(x)T_m(x)}{\sqrt{1-x^2}} dx &= \int_{\pi}^0 \frac{T_n(\cos \theta)T_m(\cos \theta)}{\sqrt{1-\cos^2 \theta}} (-\sin \theta d\theta) \\ &= \int_0^{\pi} \cos(n\theta) \cos(m\theta) d\theta \\ &= \int_0^{\pi} \frac{1}{2} \{ \cos(n+m)\theta + \cos(n-m)\theta \} d\theta \\ &= \frac{1}{2} \left[-\frac{1}{n+m} \sin(n+m)\theta - \frac{1}{n-m} \sin(n-m)\theta \right]_0^{\pi} \\ &= 0 \quad \text{si } n-m \neq 0\end{aligned}$$

l'intégrale est égale à 0 pour $n \neq m$ car $n+m$ et $n-m$ sont des nombres entiers et donc le $\sin$ est toujours nul. Par contre si $n = m$, on a (à partir de la deuxième ligne du raisonnement précédent)

$$\begin{aligned}\int_{-1}^1 \frac{T_n(x)T_m(x)}{\sqrt{1-x^2}} dx &= \int_0^{\pi} \cos^2(n\theta) d\theta \\ &= \int_0^{\pi} \frac{1}{2} (1 + \cos(2n\theta)) d\theta \\ &= \frac{1}{2} \left[\theta - \frac{1}{2n} \sin(2n\theta) \right]_0^{\pi} \\ &= \frac{\pi}{2} \quad \text{si } n \neq 0\end{aligned}$$

si $n = m = 0$, on a

$$\int_{-1}^1 \frac{T_0(x)T_0(x)}{\sqrt{1-x^2}} dx = \int_0^\pi d\theta = \pi$$

On peut suivre les même étapes pour démontrer la deuxième relation d'orthogonalité (pour $U_n(x)$).

5.7.4 Relations de récurrence

$$(a) \quad T_{n+1}(x) - 2xT_n(x) + T_{n-1}(x) = 0 \quad (5.68)$$

$$(b) \quad (1-x^2)T'_n(x) = -n x T_n(x) + n T_{n-1}(x)$$

$$(c) \quad U_{n+1}(x) - 2xU_n(x) + U_{n-1}(x) = 0$$

$$(d) \quad (1-x^2)U'_n(x) = -n x U_n(x) + n U_{n-1}(x)$$

Démonstration

(a) Si on remplace x par $\cos \theta$ dans l'expression (5.68)(a), on obtient

$$\begin{aligned} \cos((n+1)\theta) - 2\cos(\theta)\cos(n\theta) + \cos((n-1)\theta) &= \cos(n\theta)\cos\theta - \sin(n\theta)\sin\theta \\ &\quad - 2\cos(\theta)\cos(n\theta) + \cos(n\theta)\cos\theta + \sin(n\theta)\sin\theta \\ &= 0 \end{aligned}$$

(b) Si on remplace maintenant x par $\cos \theta$ dans l'Eq. (5.68)(b), on obtient

$$(1 - \cos^2 \theta) \frac{d}{d(\cos \theta)} \cos(n\theta) = -n \cos(\theta) \cos(n\theta) + n \cos(n-1)\theta$$

le côté gauche donne

$$\begin{aligned} (1 - \cos^2 \theta) \frac{d}{d(\cos \theta)} \cos(n\theta) &= \sin^2 \theta \left(-\frac{1}{\sin \theta} \frac{d}{d\theta} \cos(n\theta) \right) \\ &= -\sin \theta (-n \sin(n\theta)) \\ &= n \sin(\theta) \sin(n\theta) \end{aligned}$$

et le côté droit donne

$$\begin{aligned} -n \cos(\theta) \cos(n\theta) + n \cos(n-1)\theta &= -n \cos(\theta) \cos(n\theta) + n(\cos(n\theta)\cos\theta + \sin(n\theta)\sin\theta) \\ &= n \sin(\theta) \sin(n\theta) \end{aligned}$$

Les deux côtes sont éguax, la propriété est ainsi démontré.

La preuve des deux relations de récurrence pour $U_n(x)$ sont similaires à celles de $T_n(x)$.

5.8 Exercices

Exercice 1 :

1. Montrer que

$$\int_{-1}^1 \frac{P_n(t)}{\sqrt{1+x^2-2xt}} dt = \frac{2x^n}{2n+1}$$

2. En utilisant la formule de Rodrigues, montrer que

$$P'_{n+1}(x) = P'_{n-1}(x) + (2n+1)P_n(x)$$

3. Utiliser l'identité

$$\int_{-1}^1 f(x) \frac{d^n}{dx^n} (x^2-1)^n dx = (-1)^n \int_{-1}^1 (x^2-1)^n \frac{d^n}{dx^n} f(x)$$

pour développer la fonction $f(x) = \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$ sous la forme série de polynômes de Legendre pour $-1 < x < 1$.

Solution

1. Soit $\phi(t) = (1+x^2-2xt)^{-1/2}$ la fonction génératrice de $P_l^m(x)$

$$\phi(t) = \sum_{l=0}^{\infty} x^l P_l^m(t)$$

donc

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 \frac{P_n(t)}{\sqrt{1+x^2-2xt}} dt &= \int_{-1}^1 P_n(t) \phi(t) dt \\ &= \sum_{l=0}^{\infty} x^l \int_{-1}^1 P_n(t) P_l(t) dt \\ &= \sum_{l=0}^{\infty} x^l \frac{2\delta_{nl}}{2n+1} \\ &= \frac{2x^n}{2n+1} \end{aligned}$$

2. D'après la formule de Rodrigues on a

$$\begin{aligned}
 P'_{n+1}(x) &= \frac{1}{2^{n+1}(n+1)!} \frac{d^{n+2}}{dx^{n+2}} [(x^2-1)^{n+1}] \\
 &= \frac{2(n+1)}{2^{n+1}(n+1)!} \frac{d^{n+1}}{dx^{n+1}} [x(x^2-1)^n] \\
 &= \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} [(x^2-1)^n + 2nx^2(x^2-1)^{n-1}] \\
 &= \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} [(x^2-1)^n + 2n(x^2-1+1)(x^2-1)^{n-1}] \\
 &= \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} [(x^2-1)^n + 2n(x^2-1)(x^2-1)^{n-1} + 2n(x^2-1)^{n-1}] \\
 &= \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} [(x^2-1)^n + 2n(x^2-1)^n + 2n(x^2-1)^{n-1}] \\
 &= \frac{2n+1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} [(x^2-1)^n] + \frac{2n}{2^n n!} \frac{d}{dx} \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} [(x^2-1)^{n-1}] \\
 &= (2n+1)P_n(x) + P'_{n-1}(x)
 \end{aligned}$$

3. Puisque la fonction $f(x)$ est impair, l'indice n devrait être impair. On a

$$\begin{aligned}
 c_n &= \frac{2n+1}{2} \int_{-1}^1 f(x) P_n(x) dx \\
 &= \frac{2n+1}{2} \frac{1}{2^n n!} \int_{-1}^1 f(x) \frac{d^n}{dx^n} (x^2-1)^n dx \\
 &= (-1)^n \frac{2n+1}{2} \frac{1}{2^n n!} \int_{-1}^1 (x^2-1)^n \frac{d^n}{dx^n} \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) dx
 \end{aligned}$$

Dans la dernière ligne nous avons utilisé l'identité donnée. En plus on a

$$\frac{d^n}{dx^n} [\ln(1+x) - \ln(1-x)] = \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{(1+x)!} + \frac{(n-1)!}{(1-x)^n}$$

et

$$\begin{aligned}
 (x^2-1)^n &= (x+1)^n(x-1)^n \\
 &= -(1+x)^n(1-x)^n \quad \text{si } n \text{ est impair}
 \end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned}
 c_n &= \frac{(2n+1)(n-1)!}{2^{n+1}n!} \int_{-1}^1 [(-1)^{n-1}(1-x)^n + (1+x)^n] dx \\
 &= \frac{2n+1}{2^{n+1}n} \left\{ \left[-\frac{(1-x)^{n+1}}{n+1} \right]_{-1}^1 + \left[\frac{(1+x)^{n+1}}{n+1} \right]_{-1}^1 \right\} \\
 &= \frac{2n+1}{2^{n+1}n} \left(\frac{2^{n+1}}{n+1} + \frac{2^{n+1}}{n+1} \right) \\
 &= \frac{2(2n+1)}{n(n+1)}
 \end{aligned}$$

Exercice 2 : Montrer que

1. $\sqrt{1-x^2}T_n(x) = U^{n+1}(x) - xU_n(x)$
2. $T_{n+m}(x) + T_{n-m}(x) = 2T_n(x)T_m(x)$

Solutions

1. Posons $x = \cos \theta$ et en utilisant les définitions Eq. (5.58) et (5.59) on obtient

$$T_n(\cos \theta) = \cos(n\theta)$$

$$U_n(\cos \theta) = \sin(n\theta)$$

Donc, nous devons montrer

$$\sin \theta \cos(n\theta) = \sin((n+1)\theta) - \cos \theta \sin(n\theta)$$

Mais

$$\begin{aligned}\sin((n+1)\theta) - \cos \theta \sin(n\theta) &= \sin(n\theta) \cos \theta + \cos(n\theta) \sin \theta - \cos \theta \sin(n\theta) \\ &= \cos(n\theta) \sin \theta\end{aligned}$$

ce qui prouve le résultat.

1. Posons $x = \cos \theta$ on a

$$T_{n+m}(\cos \theta) = \cos((n+m)\theta)$$

$$T_{n-m}(\cos \theta) = \cos((n-m)\theta)$$

Donc

$$\begin{aligned}T_{n+m}(\cos \theta) + T_{n-m}(\cos \theta) &= \cos(n\theta) \cos(m\theta) - \sin(n\theta) \sin(m\theta) \\ &\quad + \cos(n\theta) \cos(m\theta) + \sin(n\theta) \sin(m\theta) \\ &= 2 \cos(n\theta) \cos(m\theta) \\ &= 2T_n(x)T_m(x)\end{aligned}$$

Exercice 3 : Pour une fonction continue, on peut écrire $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n H_n(x)$.
Montrer que

$$c_n = \frac{1}{2^n \sqrt{\pi} n!} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) H_n(x) e^{-x^2} dx$$

Solution

On a

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} f(x) H_n(x) dx &= \sum_{r=0}^{\infty} c_r \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} H_r(x) H_n(x) dx \\ &= \sum_{r=0}^{\infty} c_r 2^n n! \sqrt{\pi} \delta_{rn} \\ &= c_n 2^n n! \sqrt{\pi}\end{aligned}$$

Donc

$$c_n = \frac{1}{2^n \sqrt{\pi} n!} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) H_n(x) e^{-x^2} dx$$

Exercice 4 : Soit $\psi_n(x)$ tel que

$$\psi_n(x) = \frac{1}{\sqrt{2^n \sqrt{\pi} n!}} e^{-x^2/2} H_n(x)$$

Montrer que les opérateurs $\frac{1}{\sqrt{2}} \left(x + \frac{d}{dx} \right)$ et $\frac{1}{\sqrt{2}} \left(x - \frac{d}{dx} \right)$ sont respectivement des opérateurs d'annihilation et de creation pour $\psi_n(x)$

Solution

On a

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{2}} \left(x + \frac{d}{dx} \right) \psi_n(x) &= \frac{1}{\sqrt{2^{n+1} \sqrt{\pi} n!}} \left(x + \frac{d}{dx} \right) e^{-x^2/2} H_n(x) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2^{n+1} \sqrt{\pi} n!}} \left(x e^{-x^2/2} H_n(x) - x e^{-x^2/2} H_n(x) + e^{-x^2/2} H'_n(x) \right) \end{aligned}$$

Mais d'après l'Eq. (5.40)(a) on a $H'_n(x) = 2n H_{n-1}(x)$, donc

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{2}} \left(x + \frac{d}{dx} \right) \psi_n(x) &= \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{2^{n+1} \sqrt{\pi} (n-1)!}} e^{-x^2/2} 2n H_{n-1}(x) \\ &= \sqrt{n} \psi_{n-1}(x) \end{aligned}$$

Pour $\frac{1}{\sqrt{2}} \left(x - \frac{d}{dx} \right)$ on a

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{2}} \left(x - \frac{d}{dx} \right) \psi_n(x) &= \frac{1}{\sqrt{2^{n+1} \sqrt{\pi} n!}} \left(x - \frac{d}{dx} \right) e^{-x^2/2} H_n(x) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2^{n+1} \sqrt{\pi} n!}} \left(x e^{-x^2/2} H_n(x) + x e^{-x^2/2} H_n(x) - e^{-x^2/2} H'_n(x) \right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2^{n+1} \sqrt{\pi} n!}} \left(2x e^{-x^2/2} H_n(x) - e^{-x^2/2} 2n H_{n-1}(x) \right) \end{aligned}$$

Mais d'après l'Eq. (5.40)(b) il en résulte que

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{2}} \left(x - \frac{d}{dx} \right) \psi_n(x) &= \frac{1}{\sqrt{2^{n+1} \sqrt{\pi} n!}} e^{-x^2/2} H_{n+1}(x) \\ &= \sqrt{n+1} \psi_{n+1}(x) \end{aligned}$$

Exercice 5 : Prouver en utilisant la règle de Leibniz, la représentation de Rodrigues pour les polynômes de Laguerre associés

$$L_n^k(x) = \frac{1}{n!} x^{-k} e^x \frac{d^n}{dx^n} (e^{-x} x^{n+k})$$

Solution

En utilisant le règle de Leibniz

$$\frac{d^n}{dx^n}(uv) = \sum_{r=0}^n \frac{n!}{r!(n-r)!} \frac{d^{n-r}u}{dx^{n-r}} \frac{d^r v}{dx^r}$$

on a

$$\frac{1}{n!} x^{-k} e^x \frac{d^n}{dx^n} (x^{n+k} e^{-x}) = \frac{1}{n!} x^{-k} e^x \sum_{r=0}^n \frac{n!}{r!(n-r)!} \frac{d^{n-r} x^{n+k}}{dx^{n-r}} \frac{d^r e^{-x}}{dx^r}$$

Mais

$$\begin{aligned} \frac{d^p}{dx^p} x^q &= q(q-1) \dots (q-p+1) x^{q-p} \\ &= \frac{q!}{(q-p)!} x^{q-p} \end{aligned}$$

donc on a

$$\begin{aligned} \frac{1}{n!} x^{-k} e^x \frac{d^n}{dx^n} (x^{n+k} e^{-x}) &= \frac{1}{n!} x^{-k} e^x \sum_{r=0}^n \frac{n!}{r!(n-r)!} \frac{(n+k)!}{(k+r)!} x^{k+r} (-1)^r e^{-x} \\ &= \sum_{r=0}^n (-1)^r \frac{(n+k)!}{r!(n-r)!(k+r)!} x^r \\ &= L_n^k(x) \end{aligned}$$
