CHAPitre 03 : L'espace d'état.

Représentation des systèmes dans l'espace d'état:

La représentation des système dans l'espace d'état est l'une des théories récentes de l'informatique cette théorie est developpée par les puissantes moyennes de calcul "ordinateur".

Cas des systèmes linéaires:

$$\dot{x}(t) = A(t)\, x(t) + B(t) . u(t)$$
$$y(t) = C(t)\, x(t) + D(t) . u(t).$$

si le système est variant dans le temps (A, B, c et D variant)

Si A, B, C et D sont invariant:

$$\boxed{\begin{aligned} \dot{x}(t) &= A\, x(t) + B\, u(t) \\ y(t) &= C\, x(t) + D . u(t) \end{aligned}}$$ système linéaire invariant.

x : vecteur d'état $n \times 1$

y : vecteur de sortie ou observé $p \times 1$; $n > p$.

$u(t)$: Vecteur de commande ou d'entrée $m \times 1$

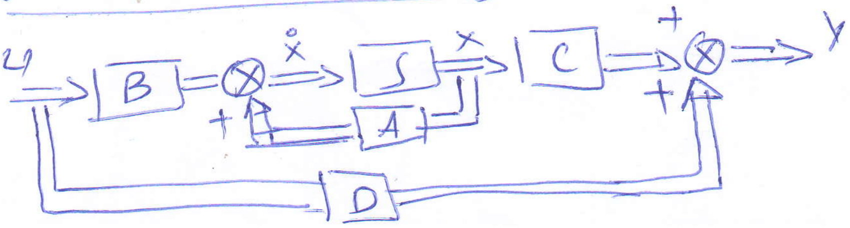
A : matrice d'état $(n \times m)$

B : " de commande d'état $(n \times m)$

C : " de sortie $(p \times n)$

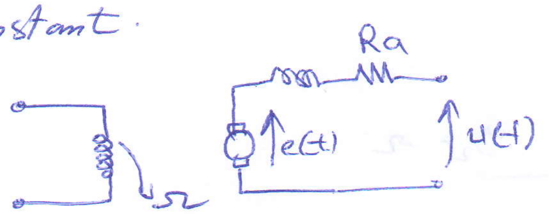
D : " de transfert $(p \times m)$

schéma de simulation général (schéma bloc)



Exercice d'application:

Màcc à excitation indépendante commandé par l'induit et à flux constant.



$$\begin{cases} u_a(t) = R_a\, i_a(t) + L_a \dfrac{di_a(t)}{dt} + e(t) \\ C_e - C_r = J \dfrac{d\Omega}{dt} + f\Omega. \\ C_e = K.\, i_a(t) \\ e(t) = K.\, \Omega(t) \end{cases}$$

* Donner la représentation d'état de la Màc.c avec les variables d'état $\begin{bmatrix} i_a \\ \Omega \end{bmatrix}$ et vecteur de commande $\begin{bmatrix} u_a \\ C_r \end{bmatrix}$

$$\frac{di_a(t)}{dt} = \frac{1}{L_a} u_a(t) - \frac{R_a}{L_a} i_a(t) - \frac{K}{L_a} \Omega(t).$$

$$\frac{d\Omega(t)}{dt} = \frac{K}{J} i_a(t) - \frac{1}{J} C_r - \frac{f}{J} \Omega(t).$$

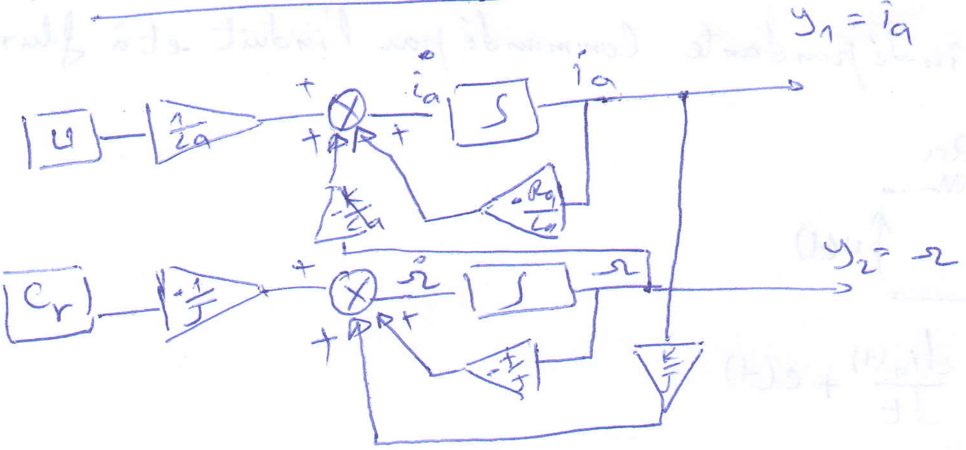
$$\begin{bmatrix} \dot{i}_a(t) \\ \dot{\Omega}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{R_a}{L_a} & -\frac{K}{L_a} \\ \frac{K}{J} & -\frac{f}{J} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_a \\ \Omega \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{L_a} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{J} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_a \\ C_r \end{bmatrix}$$

L'équation de sortie: $y_1(t) = i_a(t)$

$y_2(t) = \Omega(t).$

$$\begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_a \\ \Omega \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_a \\ C_r \end{bmatrix}$$

Schéma de simulation:

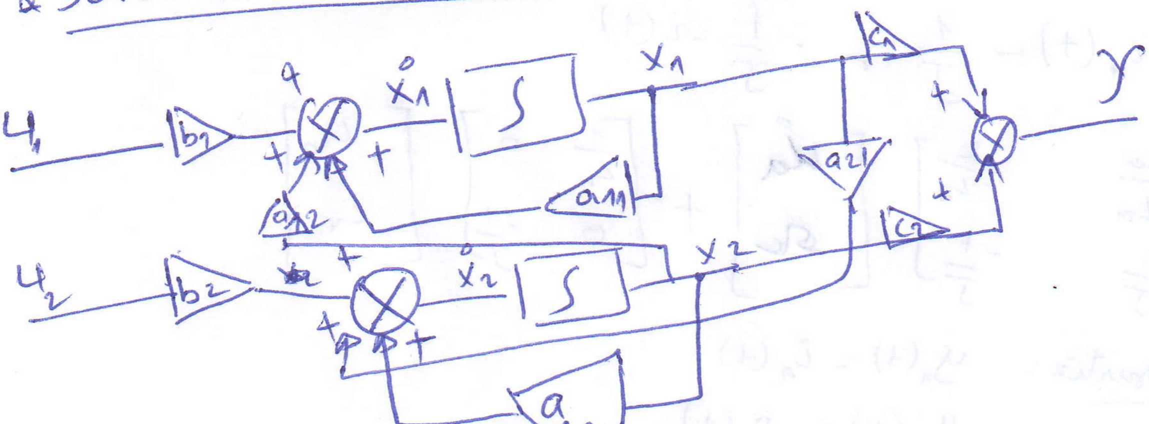


* Exemple de simulation détaillé :

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1 & 0 \\ 0 & b_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$$

$$y = \begin{bmatrix} c_1 & c_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + 0\, u .$$

* schéma de simulation :



Représentation d'état par les formes canonique:

En général un système linéaire est représenté par :

$$a_n \frac{d^n y}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}} + \dots a_0 y = b_m \frac{d^m u}{dt^m} + b_{m-1} \frac{d^{m-1} u}{dt^{m-1}} + \dots + b_0 u$$

avec $n \geq m$.

1/ $1^{ère}$ forme canonique (de compagne):

On pose : $a_n = 1$ et $n = m$.

$$y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_0 y = b_m u^{(m)} + b_{m-1} u^{(m-1)} + \dots + b_0 u$$

$$y^{(n)} = -a_{n-1} y^{(n-1)} - \dots - a_0 y + b_m u^{(m)} + b_{m-1} u^{(m-1)} + \dots + b_0 u .$$

$$= b_n u^n + \left(b_{n-1} u^{(n-1)} - a_{n-1} y^{(n-1)} \right) + \dots (b_0 u - a_0 y)$$

$$\iiint^{(n)} y^{(n)} = y \quad ; \quad \iiint^{n} u^n = u .$$

L'intégration n fois donne :

$$y = b_n u + \overbrace{\int (b_{n-1} u - a_{n-1} y)\, dt + \overbrace{\iint (b_{n-2} u - a_{n-2} y)\, dt^2 + \dots \underbrace{\iiint_{n\,fois} (b_0 u - a_0 y)\, dt^n}_{x_n}}^{x_2}}^{x_1}$$

Le choix des variables d'état x_n est le résultat des intégrations.

$$x_1 = \int \left[[b_{n-1} u - a_{n-1} y]\, dt + x_2 \right] dt .$$

$$\dot{x}_1 = b_{n-1} u - a_{n-1} y + x_2 .$$

$$\dot{x}_2 = b_{n-2} u - a_{n-2} y + x_3 .$$

$$\vdots$$

$$\dot{x}_n = b_0 u - a_0 y .$$

$$y = b_n u + x_1$$

$$\dot{x}_1 = b_{n-1}u - a_{n-1}(b_n u + x_1) + x_2$$

$$= -a_{n-1}x_1 + x_2 + (b_{n-1} - a_{n-1}b_n)u$$

$$\dot{x}_2 = -a_{n-2}x_1 + x_3 + (b_{n-2} - a_{n-2}b_n)u$$

$$\vdots$$

$$\dot{x}_n = -a_0 x_1 + (b_0 - b_n a_0)u$$

Sous forme matricielle :

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \vdots \\ \dot{x}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -a_{n-1} & 1 & \cdots & 0 \\ -a_{n-2} & 0 & 1 \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -a_1 & & & \\ -a_0 & 0 & 0 \cdots & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{n-1} - a_{n-1}b_n \\ b_{n-2} - a_{n-2}b_n \\ \vdots \\ b_0 - a_0 b_n \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + b_n u$$

Remarque : Si $n > m \Rightarrow [D] = 0$.

Exemple d'application :

soit un processus d'entrée $u(t)$ et de sortie $y(t)$ répondant à l'équation différentielle suivante :

$$y'' + 5y' + 6y = u' + u$$

1) Donner la 1ère forme canonique et son schéma de simulation

Solution :

On a : $n = 2$; $m = 1$

$n > m$ donc $[D] = 0$

$$y'' = u' + u - 5y' - 6y.$$

$$\iint y''\,dt^2 = \iint (u' + u - 5y' - 6y)\,dt^2.$$

$$y = \iint (-5y' + u')\,dt^2 + \iint (-6y + u)\,dt^2.$$

$$= \int \overbrace{\left[(-5y + u) \cancel{dt} + \underbrace{\int (-6y + u)\,dt}_{x_2} \right] dt}^{x_1}.$$

$$y = x_1.$$

$$x_1 = \int \left[-5y + u + x_2 \right] dt$$

$$x_2 = \int (-6y + u)\,dt.$$

donc :

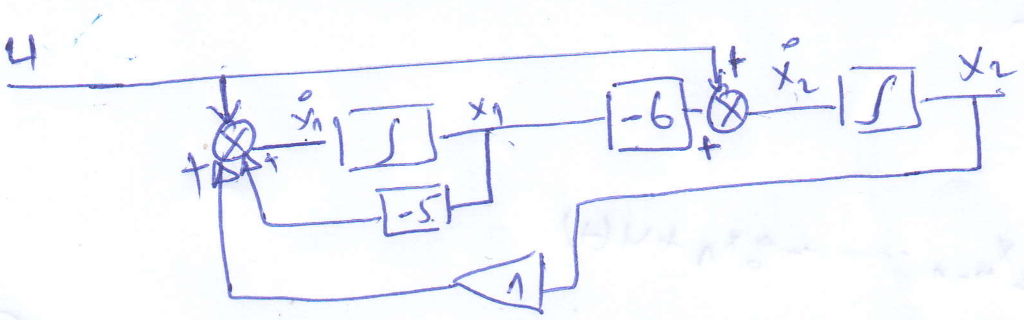
$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -5y + u + x_2 \\ \dot{x}_2 = -6y + u \end{cases} \quad \text{et avec } y = x_1.$$

Sous forme matricielle

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 & 1 \\ -6 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix} u$$

Schéma de simulation :



2// $2^{ème}$ forme canonique "Méthode de variable de phase"

$n = m$; $a_n = 1$

Soit : $y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + a_{n-2} y^{(n-2)} + \dots + a_0 y = b_n u^{(n)} + b_{n-1} u^{(n-1)} + \dots + b_0 u$

On définit une variable intermédiaire "q" tel que :

$$\begin{cases} y(t) = b_n q^{(n)} + b_{n-1} q^{(n-1)} + \dots + b_0 q \quad \text{--- (1)} \\ u(t) = q^{(n)} + a_{n-1} q^{(n-1)} + \dots + a_0 q \quad \text{--- (2)} \end{cases}$$

de l'equt (2) $\Rightarrow q^{(n)} = u(t) - a_{n-1} q^{(n-1)} - \dots - a_0 q$ --- (3)

Choix des variables d'état : q et ses dérivées successive.

$$\begin{matrix} x_1 = q \\ x_2 = \dot q \\ \vdots \\ x_n = q^{n-1} \end{matrix} \Rightarrow \begin{cases} \dot x_1 = \dot q = x_2 \\ \dot x_2 = \ddot q = x_3 \\ \vdots \\ \dot x_{n-1} = q^{(n-1)} = x_n \\ \dot x_n = q^{(n)} \end{cases}$$

L'équation de sortie :

$y(t) = b_n \left(u(t) - a_{n-1} q^{(n-1)} - \dots - a_0 q\right) + b_{n-1} q^{(n-1)} \dots + b_0 q$

$= b_n \left[u(t) - a_{n-1} x_n - \dots - a_0 x_1\right] + b_{n-1} x_n + \dots + b_0 x_1$

$= b_n u(t) + (b_{n-1} - b_n a_{n-1}) x_n + \dots + (a_0 b_n + b_0) x_1$

L'équation d'état

$\dot x_1(t) = x_2$

$\dot x_2(t) = x_3$

$\vdots$

$\dot x_n = -a_{n-1} x_n - a_{n-2} x_{n-1} - \dots - a_0 x_1 + u(t)$

Sous forme matricielle

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \vdots \\ \dot{x}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_0 & -a_1 & \cdots & -a_{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} u$$

$$y = \left[(b_0 - b_n a_0) \cdots (b_{n-1} - b_n a_{n-1}) \right] \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + [b_n]\, u$$

Exemple d'application :

$y'' + 5y' + 6y = u' + u$

- Donner la 2ème forme canonique et son schéma de simulation.

$u(t) = q'' + 5q' + 6q$ --- ①

$y(t) = q' + q$ --- ②

de ① $\Rightarrow q'' = u(t) - 5q' - 6q$

choix de variable d'état :

$x_1 = q \Rightarrow \boxed{\dot{x}_1 = \dot{q} = x_2}$

$x_2 = \dot{q} \Rightarrow \dot{x}_2 = \ddot{q} = u - 5q' - 6q$

$\boxed{\dot{x}_2 = u - 5x_2 - 6x_1}$

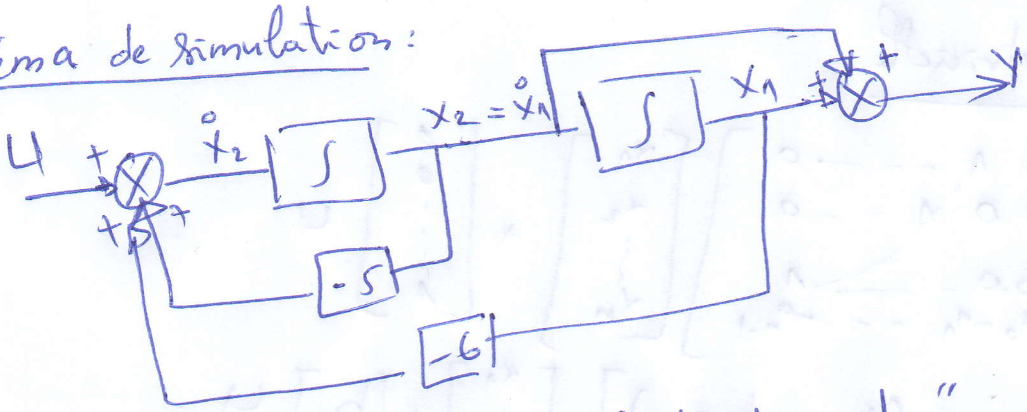
et $y(t) = x_2 + x_1$

sous forme matricielle

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -6 & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

Schéma de simulation :



3// $3^{ème}$ Forme canonique "Méthode de Jordon"

Soit la fonction de transfert : $\frac{Y(P)}{U(P)} = \frac{b_n P^n + b_{n-1} P^{n-1} + \dots + b_0}{P^n + a_{n-1} b^{n-1} + \dots + a_0}$

$a_n = 1$

* Cas des valeurs propres distinctes :

$$\frac{Y(P)}{U(P)} = \frac{b_n P^n + b_{n-1} P^{n-1} + \dots + b_0}{(P-\lambda_1)(P-\lambda_2) + \dots (P-\lambda_n)}$$

Par décomposition :

$$\frac{Y(P)}{U(P)} = \frac{\beta_1}{P-\lambda_1} + \frac{\beta_2}{P-\lambda_2} + \dots + \frac{\beta_n}{P-\lambda_n}$$

$$Y(P) = \sum \left(\frac{\beta_i}{P-\lambda_i}\right) U(P)$$

Choix des variables d'état :

$$x_i(P) = \frac{U(P)}{P-\lambda_i}$$

$$P\, x_i(P) - x_i(P)\lambda_i = U(P) \xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}}$$

$$\Rightarrow \boxed{\dot{x}_i = x_i(t)\lambda_i + U(t)}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \dot{x}_1 = \lambda_1 x_1 + U \\ \dot{x}_2 = \lambda_2 x_2 + U \\ \vdots \\ \dot{x}_n = \lambda_n x_n + U \end{cases}$$

L'équation de sortie :

$$y(p) = \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \dots + \beta_n x_n(p).$$

$$\boxed{y(t) = \beta_1 x_1(t) + \dots + \beta_n x_n(t)}$$

Sous Forme matricielle

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \vdots \\ \dot{x}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \lambda_2 & \\ 0 & & \lambda_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} u(t)$$

$$y = \begin{bmatrix} \beta_1 & \beta_2 & \dots & \beta_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + b_n u(t)$$

Exemple d'application :

Soit un système regit par l'équation différentielle suivante :

$$y'' + 5y' + 6y = u' + u.$$

* 1ère étape : Fct de transfert.

$$p^2 y(p) + 5p\,y(p) + 6y(p) = p\,u(p) + u(p)$$

$$F(p) = \frac{y(p)}{u(p)} = \frac{p+1}{p^2+5p+6} = \frac{p+1}{(p+2)(p+3)}$$

$$p_1 = \lambda_1 = -2$$

$$p_2 = \lambda_2 = -3$$

* 2ème étape : décomposition de F(p)

$$F(p) = \frac{p+1}{(p+2)(p+3)} = \frac{\beta_1}{p+2} + \frac{\beta_2}{p+3}$$

$$\beta_1 = (p+2)\,F(p)\Big|_{p=-2} = -1 \quad ; \quad \beta_2 = (p+3)\,F(p)\Big|_{p=-3} = 2.$$

$$F(p) = \frac{-1}{p+2} + \frac{2}{p+3}$$

par application directe :

$$\dot{x}_1 = \lambda_1 x_1 + u$$

$$\boxed{\dot{x}_1 = -2x_1 + u}$$

$$\dot{x}_2 = \lambda_2 x_2 + u$$

$$\boxed{\dot{x}_2 = -3x_2 + u}$$

$$y = \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2$$

$$\boxed{y = -x_1 + 2x_2}$$

schéma de simulation :