CHAP III : CONDUCTION BIDIMENTIONNELLE EN REGIME PERMANENT

Dans le cas où la diffusion de la chaleur ne s'effectue pas selon une direction unique, dans ce cas là, il y a quelques méthodes de résolution peuvent être appliquées, parmi ces méthodes :

III.1 Méthode du coefficient de forme

Dans les systèmes bidimensionnels ou tridimensionnels où n'interviennent que deux températures limites T1 et T2, on montre que le flux de chaleur peut se mettre sous la forme

$\Phi = \lambda . F . (T1 - T2)$

Avec :
F : Coefficient de forme (m)
λ Conductivité thermique du milieu séparant les surfaces S
T1 : Température de la surface S1
T2 : Température de la surface S2

Le coefficient de forme F ne **dépend que de la forme**, des dimensions et de la position relative des deux surfaces S1 et S2.

III.2 Méthodes numériques

Dans ce cas là on prend comme exemple l'équation de Laplace bidimensionnelle en différences finies :

$$\Delta T = 0 \quad \rightarrow \quad \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = 0 \qquad \text{(III.1)}$$

Pour résoudre l'équation de Laplace numériquement. en discrétisant le domaine considéré espace ou plan , (figure II.1).

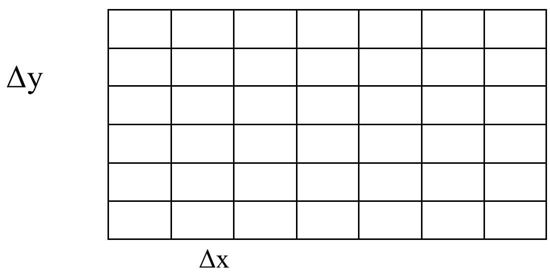

Figure III.1 : Représentation du maillage rectangulaire

Rappelle
Série de Taylor

Soit une fonction f(x) dérivable au voisinage d'un point x=xo , Dx= x-xo, cette fonction peut etre approchée par une fonction polynomiale écrite sous la forme:

$$f(x+Dx) = f(x) + \frac{Dx}{1!} f^{'}(x) + \frac{Dx^2}{2!} f^{''}(x) + \frac{Dx^3}{3!} f^{'''}(x) + ... \qquad \text{(III.2)}$$

$$f(x-Dx)=f(x)-\frac{Dx}{1!}f^{'}(x)+\frac{Dx^2}{2!}f^{''}(x)-\frac{Dx^3}{3!}f^{'''}(x)+...\qquad\text{(III.3)}$$

Utilisant les équations (III.2) et (III.3); les dérivées partielles de la température T(x,y) peuvent s'exprimer selon les développements en série de Taylor sous la forme :

$$\frac{\partial T}{\partial x}=\frac{T(x+\Delta x,y)-T(x,y)}{\Delta x}+\mathrm{O}(\Delta \mathrm{x})\qquad\text{(III.4)}$$

où O(Δx) est erreur de troncation

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}=\frac{T(x+\Delta x,y)-2T(x,y)+T(x-\Delta x,y)}{\Delta x^2}+\mathrm{O}(\Delta \mathrm{x}^2)\qquad\text{(III.5)}$$

et de même par rapport à y ;

$$\frac{\partial T}{\partial y}=\frac{T(x,y+\Delta y)-T(x,y)}{\Delta y}+\mathrm{O}(\Delta \mathrm{y})\qquad\text{(III.6)}$$

$$\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}=\frac{T(x,y+\Delta y)-2T(x,y)+T(x,y-\Delta y)}{\Delta y^2}+\mathrm{O}(\Delta \mathrm{y}^2)\qquad\text{(III.7)}$$

L'équation de Laplace en bidimensionnelle s'écrit alors (*erreur négligeable*):

$$\frac{T(x+\Delta x,y)-2T(x,y)+T(x-\Delta x,y)}{\Delta x^2}+\frac{T(x,y+\Delta y)-2T(x,y)+T(x,y-\Delta y)}{\Delta y^2}=0\qquad\text{(III.8)}$$

Si l'on choisit Δx = Δy= **h** , l'eq. (II.6) devienne :

$$\frac{T(x+\Delta x,y)+T(x-\Delta x,y)-4T(x,y)+T(x,y+\Delta y)+T(x,y-\Delta y)}{h^2}=0\qquad\text{(III.9)}$$

Le schéma numérique

les dérivées secondes des équations (III.3) et (III.5) s'écrivent en un point **(i ,j)** dans le domaine numérique comme il est indiqué dans la figure (III.2) par :

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}=\frac{T(i+1,j)-2T(i,j)+T(i-1,j)}{\Delta x^2}$$

$$\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}=\frac{T(i,j+1)-2T(i,j)+T(i,j-1)}{\Delta y^2}$$

L'équation (III.7) devient :

$$\frac{T(i+1,j)+T(i-1,j)-4T(i,j)+T(i,j+1)+T(i,j-1)}{h^2}=0\qquad\text{(III.10)}$$

T(i,j)= [T(i+1,j)+T(i-1,j)+T(i,j+1)+T(i,j-1)]/4 (III.11)

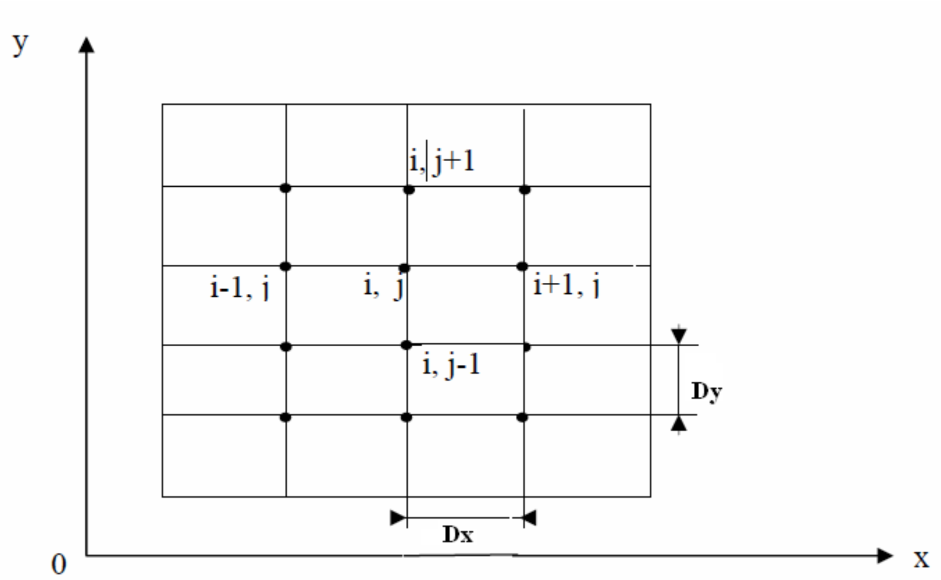

Figure III.2 : Représentation du maillage rectangulaire numérique

La résolution de l'équation (III.9) s'effectue par les méthodes itératives de Gauss-Siedel (par exemple). On effectue des itérations successives.

Les conditions aux limites imposant sur un bord une température de surface s'expriment simplement en fixant la valeur de la température T(i,j) à la valeur imposée pour tout couple (i,j) représentant un point de ce bord.

- Critère de convergence:

On peut arrêter le calcul si la condition de convergence suivante est vérifiée :

$\left|T^{k}(i,j)-T^{k-1}(i,j)\right| \le \varepsilon$ où k est le nombre d'itération

CHAP 4 : TRANSFERT DE CHALEUR PAR CONDUCTION EN REGIME VARIABLE

IV.1 Conduction unidirectionnelle en régime variable sans changement d'état

IV.1.1 Milieu à température uniforme

On va étudier le transfert de chaleur vers un milieu supposé **à température uniforme**. Soit par exemple le refroidissement d'une bille métallique qui consiste à immerger une bille initialement à la température **To** dans un bain à température **Tf** maintenue constante. Si l'on suppose que la température à l'intérieur de la bille est uniforme, ce qui sera d'autant plus vrai que sa dimension est petite et sa conductivité thermique élevée, on peut écrire le bilan thermique de cette bille entre deux instants **t** et **t + dt ,** on utilise l'équation générale de la conduction écrit en chapitre II, alors :

$$\rho c_p V \frac{dT}{dt} = -hs(T - T_f) \qquad \text{(IV.1)}$$

tel que:

h est le coefficient d'échange thermique par convection du fluide

S est la surface d'échange (surface de la bille) et **V** est son volume

On intègre l'équation (IV.1) on obtient:

$$\frac{T-T_f}{T_o-T_f} = e^{-\frac{hs}{\rho C_p.V}t} \qquad \text{(IV.2)}$$

On remarque que le terme $\frac{\rho C_p.V}{hs}$ est homogène à un temps, on l'appellera τ la constante de temps du système, on remplace dans (IV.2) , on a:

$$\frac{T - T_f}{T_o - T_f} = e^{-\frac{t}{\tau}} \qquad \text{(IV.3)}$$

Application:

Une bille d'Aluminium sphérique de 1 cm de rayon est initialement à une température de 70 C°, on immerge cette bille dans un bain d'eau de température de20 C°.

1) déterminer la température en fonction de temps
2) tracer la courbe T=f(t)
3) au bout combien de temps que la différence de température ($T-T_f$) atteint 0.5 C° ?

Cp_{Al}=900 J/Kg.K , Density= 2700 Kg/m^3 ,h= 10 w/m^2
Réponse; h.s/ Cp.ρ.V= $1.23x10^{-3}$, t= 804s= 13.41 min