Espace de Besov defini par des normes continues.

1. Opérateurs de différences

Pour tout $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{C}$, on a

$$\Delta_h f(x) := f(x+h) - f(x) \quad , \quad x, h \in \mathbb{R}^n,$$

on pose $\quad \Delta_h^1 := \Delta_h \quad$ et $\quad \Delta_h^{m+1} = \Delta_h^1 \circ \Delta_h^m \quad , m = 1, 2, \ldots$

Il vient alors :

$$\Delta_h^2 f(x) = f(x+2h) - 2 f(x+h) + f(x)$$
$$= C_2^0 f(x+2h) - 2 C_h^1 f(x+h) + C_2^2 f(x)$$

$$\Delta_h^3 f(x) = f(x+3h) - 3 f(x+2h) + 3 f(x+h) - f(x)$$
$$= C_3^0 f(x+3h) - C_3^1 f(x+2h) + C_3^2 f(x+h) - C_3^3 f(x)$$

$$\vdots$$

$$\Delta_h^m f(x) = \sum_{k=0}^{m} (-1)^k C_m^k f(x+(m-k)h)$$

Proposition 1
si $\Delta_h^m f = 0$ alors f est un polynôme de degré $< m$.

<u>Preuve</u> Il suffit de vérifier pour $n = 1$ et f est de classe C^m.

. Pour $m = 1$ on écrit $\Delta_h f(0) = 0$ alors on a $f(h) = -f(0)$, $\forall h \in \mathbb{R}$ d'où $f = c$.

. Pour $m = 2$, par dérivation par rapport à h on a

$$f'(x+2h) - f'(x+h) = 0 ;$$

on pose $x = -h$ on a $f' = c$ d'où f est un polynôme de degré 1.

. Pour $m = 3$, dérivons $\Delta_h^3 f(x) = 0$ par rapport à h :

$$f'(x+3h) - 2f'(x+2h) + f'(x+h) = 0. \quad \ldots (1)$$

Dans (1) posons $x = h$ et dérivons par rapport à h.

$$f''(2h) - f''(h) = 0. \quad \ldots (2)$$

Dérivons à nouveau (1) par rapport à h :

$$3f''(x+3h) - 4f''(x+2h) + f''(x+h) = 0 \quad \ldots (3)$$

posons $x = -h$ dans (3), alors on a

$$3f''(2h) - 4f''(h) + f''(0) = 0 ,$$

d'après (2) on a alors

$$-f''(h) + f''(0) = 0 \quad \text{i.e } f''(h) = f''(0)$$

d'où $f'' = c$ et on a f est un polynôme de degré

on peut continuer comme ça et on utilise la récurrence

Scanné avec CamScanner

<u>Proposition 2</u>: Si $f \in S(\mathbb{R})$ alors

$$\mathcal{F}(\Delta_h^m f)(\xi) = \left(e^{ih\xi} - 1\right)^m \hat{f}(\xi), \quad \forall m \in \mathbb{N}.$$

<u>Preuve</u>.

$$\mathcal{F}(\Delta_h^1 f)(x) = \int_{\mathbb{R}} e^{-ix\xi} f(x+h)\,dx - \int_{\mathbb{R}} e^{-ixh} f(x)\,dx$$

$$= \int e^{-i(y-h)\xi} f(y)\,dy - \hat{f}(\xi)$$

$$= \left(e^{ih\xi} - 1\right) \hat{f}(\xi).$$

De même pour $\Delta_h^2 f$, en effet

$$\mathcal{F}(\Delta_h^2 f)(\xi) = C_2^0 \int e^{-ix\xi} f(x+2h)\,dx - 2C_2^1 \int e^{-ix\xi} f(x+h)\,dx + C_2^2 \hat{f}(\xi)$$

$$= \left(C_2^0 e^{i2h\xi} - 2C_2^1 e^{ih\xi} + C_2^2\right) \hat{f}(\xi)$$

$$= \left(e^{ih\xi} - 1\right)^2 \hat{f}(\xi). \qquad \square$$

On continue comme ça en utilisant la récurrence.

<u>Proposition 3</u>:
Pour tout $x, h \in \mathbb{R}$ et tout $1 \leq k < m$ on a

$$\sum_{j=k}^{m} j(j-1)\cdots(j-N+1)\, C_m^j\, (-1)^{m-j} f(x+(j-k)h) = m(m-1)\cdots(m-k+1)\, \Delta_h^{m-k} f(x).$$

<u>Preuve</u>

On démontre directement pour $k = 1$ qu'on a

$$\sum_{j=1}^{m} j\,(-1)^{m-j}\, C_m^j\, f(x+(j-1)h) = m\, \Delta_h^{m-1} f(x).$$

En effet, comme

$$\Delta_h^{m'} f(x) = \sum_{k=0}^{m'} (-1)^{m'-k} C_{m'}^{k} f(x+kh)$$

on pose alors $k = j-1$ $(j \geq 1)$, on a

$$\Delta_h^{m'} f(x) = \sum_{j=1}^{m'+1} (-1)^{m'+1-j} C_{m'}^{j-1} f(x+(j-1)h)$$

or $$C_{m'}^{j-1} = \frac{m'!}{(j-1)!(m'+1-j)!} = \frac{(m'+1)!\, j}{j!(m'+1-j)!(m'+1)} = \frac{j}{m'+1} C_{m'+1}^{j}$$

alors $$(m'+1)\Delta_h^{m'} f(x) = \sum_{j=1}^{m'+1} (-1)^{m'+1-j} C_{m'+1}^{j} f(x+(j-1)h)$$

il suffit de poser maintenant $m'+1 = m$ pour obtenir

$$m\Delta_h^{m-1} f(x) = \sum_{j=1}^{m} (-1)^{m-j} C_m^j f(x+(j-1)h).$$

Pour le cas général, on utilise la méthode de Triebel 1983 p. 174, on a par dérivation k fois l'expression

$$(t-1)^m = \sum_{j=0}^{m} C_m^j (-1)^{m-j} t^j$$

$$m(m-1)\cdots(m-k+1)(t-1)^{m-k} = \sum_{j=k}^{m} j(j-1)\cdots(j-k+1) C_m^j (-1)^{m-j} t^{j-k}$$

maintenant on pose $t = e^{ih\xi}$ et on utilise la proposition 2

$$\prod_{\ell=0}^{k-1}(m-\ell)(e^{ih\xi}-1)^{m-k}\hat{f}(\xi) = \sum_{j=k}^{m} \cdots e^{i(j-k)h\xi}\hat{f}(\xi)$$

par $\mathcal{F}^{-1}$ de deux côtés

$$\left(\prod_{\ell=0}^{k-1}(m-\ell)\right)\Delta_h^{m-k} f(x) = \sum_{j=k}^{m} j(j-1)\cdots(j-k+1) C_m^j (-1)^{m-j} f(x+(j-k)h)$$

$\square$

Proposition 4 :

Pour tout $m \in \mathbb{N}$ il existe un nombre fini de réel $(a_j)_{j\in\{0,\dots N\}}$ tel que pour tout fonction f on a

$$\Delta_h^m f(x) = \frac{1}{2^m}\Delta_{2h}^m f(x) + \Delta_h^{m+1}\left(\sum_{j=0}^{N} a_j f(x+jh)\right).$$

Preuve

Admettons pour l'instant l'expression

$$(x-1)^m = \frac{1}{2^m}(x^2-1)^m + (x-1)^{m+1}P(x) \quad \dots (4)$$

où $P(x) = \sum_{j=0}^{N} a_j x^j$.

maintenant il suffit de poser $x := e^{ih\cdot\xi}$, il vient

$$\left(e^{ih\cdot\xi}-1\right)^m \hat{f}(\xi) = \frac{1}{2^m}\left(e^{i2h\cdot\xi}-1\right)^m \hat{f}(\xi) + \left(e^{ih\xi}-1\right)^{m+1}\sum_{j=0}^{N} e^{ih\xi j} a_j \hat{f}$$

i.e.

$$\mathcal{F}\left(\Delta_h^m f\right)(\xi) = \frac{1}{2^m}\mathcal{F}\left(\Delta_{2h}^m f\right)(\xi) + \mathcal{F}\left\{\Delta_h^{m+1}\left(\sum_{j=0}^{N} a_j \left(f(x+jh)\right)\right)\right\}$$

d'où le résultat.

Revenons à (4) :

$$(x-1)^m - \frac{1}{2^m}(x^2-1)^m = (x-1)^m\left\{1-\frac{1}{2^m}(x+1)^m\right\}$$

le polynôme $Q(x) := 1 - \frac{1}{2^m}(x+1)^m$ admet comme $x=1$ une racine, donc $Q(x) = (x-1)\pi(x)$ où $\pi(x)$ est un polynôme $\sum_{j=0}^{N} a_j x^j$ avec $N \leq m-1$.

$\square$

Scanné avec CamScanner

On définit S^{n-1} la sphère unité sur $\mathbb{R}^n$ par

$$S^{n-1} = \{ x \in \mathbb{R}^n : |x| = 1 \}$$

et par $|S^{n-1}|$ sa volume. On pose

$$b(x) := \frac{1}{|S^{n-1}|} \int_{S^{n-1}} (e^{ix\cdot y} - 1)^m \, dy \, , \quad m \in \mathbb{N}.$$

Proposition 5:

Pour tout $f \in S'(\mathbb{R}^n)$ on a

$$\mathcal{F}^{-1} b * f(x) = \frac{1}{|S_n^{n-1}|} \int_{S^{n-1}} \Delta_y^m f(x) \, dy \, , \quad m \in \mathbb{N}.$$

En particulier on a

$$\langle \mu, f \rangle = \frac{1}{|S^{n-1}|} \int_{S^{n-1}} \Delta_y^m f(0) \, dy \, , \quad \forall f \in S$$

une distribution à support compact.

Preuve Soit $\varphi \in S(\mathbb{R}^n)$, par la formule de Plancherel-Parseval

on a $\langle \mathcal{F}^{-1} b * f \mid \varphi \rangle = \langle b \hat{f}, \check{\varphi} \rangle$ où $\check{\varphi} = \mathcal{F}^{-1}\varphi$

$$= \frac{1}{|S^{n-1}|} \int_{S^{n-1}} \langle (e^{ix\cdot y} - 1)^m \hat{f}(x) \mid \check{\varphi}(x) \rangle \, dy$$

$$= \frac{1}{|S^{n-1}|} \int_{S^{n-1}} \langle \widehat{\Delta_y^m f} (x) \mid \check{\varphi}(x) \rangle \, dy$$

$$= \langle \frac{1}{|S^{n-1}|} \int_{S^{n-1}} \Delta_y^m f(\cdot) \mid \varphi(\cdot) \rangle.$$

Pour $x = 0$ on a:

$$\mathcal{F}^{-1} b * f(0) = \mathcal{F}^{-1}(b \hat{f})(0) = \int b(\xi) \hat{f}(\xi) \, d\xi = \langle b, \hat{f} \rangle$$

$= \langle \hat{b}, f \rangle$ on pose $\mu := \hat{b}$, car $f \in S(\mathbb{R}^n)$.

$$\langle \mu, f \rangle = \langle \hat{b}, f \rangle = \int \mathcal{F}\left(\frac{1}{|S^{n-1}|} \int_{S^{n-1}} \Delta_h^m f \, dh \right) d\xi$$

$$= \frac{1}{|S^{n-1}|} \int_{S^{n-1}} \Delta_\eta^m f(0) \, dh.$$

$\square$

Proposition 6 Soit $m \in \mathbb{N}$ (≥ 1).
Il existe une suite de fonctions $(\varphi_j)_j \subset S(\mathbb{R}^n)$ telle que $\operatorname{supp} \hat{\varphi}_j \subset \{\xi : |\xi| \leq \frac{3}{2} 2^j\}$, et telle que pour tout $f \in S(\mathbb{R}^n)$ on a

$$f(x) - \varphi_j * f(x) = (-1)^m \int_{\mathbb{R}^n} \mathcal{F}^{-1}\rho(y) \cdot \Delta^m_{-2^{-j}y} f(x)\, dy. \quad \ldots (5)$$

De même, il existe une suite $(\psi_j)_j \subset S(\mathbb{R}^n)$, telle que $\operatorname{supp} \hat{\psi}_j \subset \{\xi : \frac{1}{2} 2^j \leq |\xi| \leq \frac{3}{2} 2^j\}$ et

$$\psi_j * f(x) = (-1)^m \int_{\mathbb{R}^n} \mathcal{F}^{-1}\gamma(y)\, \Delta^m_{-2^{-j}y} f(x)\, dy. \quad \ldots (6)$$

Preuve On démontre (6), la preuve de (5) est de même.

Soit $\psi \in S$ définie par

$$\hat{\psi}(\xi) = (-1)^{m\cancel{+1}} \sum_{k=0}^{m-1} (-1)^k C_m^k\, \gamma((m-k)\xi) \; ; \forall \xi \in \mathbb{R}^n.$$

On pose $\hat{\psi}_j(\xi) := \hat{\psi}(2^{-j}\xi)$. Il vient alors que $\operatorname{supp} \hat{\psi}_j$ est dans la couronne $\frac{2^j}{2m} \leq |\xi| \leq \frac{3}{2} 2^j$ puisque le $\operatorname{supp} \hat{\psi}$ est dans $\frac{1}{2m} \leq |\xi| \leq \frac{3}{2}$. Alors

$$\psi_j * f(x) = (-1)^{m\cancel{+1}} \sum_{k=0}^{m-1} (-1)^k C_m^k \frac{2^{jn}}{(m-k)^n} \int_{\mathbb{R}^n} \mathcal{F}^{-1}\gamma\left(\frac{2^j z}{m-k}\right) f(x-z)\, dz$$

$$= (-1)^{m\cancel{+1}} \sum_{k=0}^{m-1} (-1)^k C_m^k \int_{\mathbb{R}^n} \mathcal{F}^{-1}\gamma(y)\, f(x-(m-k)2^{-j}y)\, dy - f(x) \int_{\mathbb{R}^n} \mathcal{F}^{-1}\gamma(y)\, dy$$

$$= (-1)^m \sum_{k=0}^{m} (-1)^k C_m^k \int_{\mathbb{R}^n} \mathcal{F}^{-1}\gamma(y)\, f(x-(m-k)2^{-j}y)\, dy$$

$$= (-1)^m \int_{\mathbb{R}^n} \mathcal{F}^{-1}\gamma(y)\, \Delta^m_{-2^{-j}y} f(x)\, dy, \text{ car } \int_{\mathbb{R}^n} \mathcal{F}^{-1}\gamma(y)\, dy = 0.$$

$\square$