Chapitre3 : Formalisme de Hamilton

3-1. Transformation de Legendre :

La transformation de Legendre est une opération mathématique qui, transforme une fonction définie par sa valeur en un point en une fonction définie par sa tangente. Elle tire son nom du mathématicien Legendre.

La transformation de Legendre d'une fonction $f\ (x)$où x est un variable indépendante est la fonction fonction$f^*\ (p)$définie comme suit :

$$f\ (x) \rightarrow f^*\ (p) = p.x - f$$

Tel que $p = \frac{\partial f(\ x)}{\partial x} = p(x)$

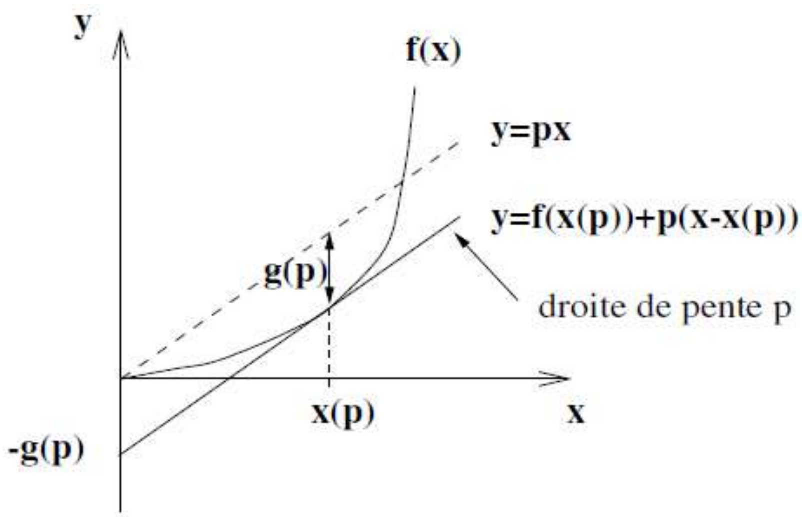
Exemple : $f\ (x) = \frac{1}{2}ax^2 + bx + c$

$$f^*\ (p) = p.x - f$$

$p = \frac{\partial f(\ x)}{\partial x} = ax + b$ Il faut trouver p en fonction de $x \Rightarrow x = \frac{p-b}{a}$

$$f^*(p) = p.\left(\frac{p-b}{a}\right) - \frac{a}{2}\left(\frac{p-b}{a}\right)^2 - b\left(\frac{p-b}{a}\right) - c = \left(\frac{p-b}{2a}\right)^2 - c$$

$$f\ (x) = \frac{1}{2}ax^2 + bx + c \rightarrow f^*\ (p) = \left(\frac{p-b}{2a}\right)^2 - c$$



Interprétation géométrique de la transformation de Legendre :

La définition de la transformée de Legendre s'étend immédiatement à des fonctions de N variables $f\ (x)$,où $x\ =\ (x_1,\dots,\ x_N\ )$. On définit alors
$f(x_1,\dots,\ x_N\ ) \to f^*(p_1,\dots,p_N\ )) = \sum_{i=1}^{N} p_i.x_i - f$

3-2. L'Hamiltonien :

Considérons un système mécanique à N degrés de liberté, décrit par un lagrangien L,

$$L = E_c - U = L(q_\alpha\ ,\dot{q}_\alpha\ ,t)$$

$L(q_\alpha\ ,\dot{q}_\alpha\ ,t)$dans le cas général dépend des coordonnées généralisées q_α , des vitesses généralisées $\dot{q}_\alpha$et de temps (t)que nous traiterons comme la fonction f ci-dessus :

$$L(q_\alpha\ ,\dot{q}_\alpha\ ,t) \to H\ (q_\alpha,p_\alpha,t) = \sum p_\alpha\dot{q}_\alpha - L$$

Ou$p_\alpha = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha}$ est le moment (quantité de mouvement) canonique.

$$H\ (q_\alpha,p_\alpha,t) = \sum p_\alpha\dot{q}_\alpha - L$$

H est la fonction de Hamilton, ou hamiltonien.Le hamiltonien est la transformée de Legendre du lagrangien, considéré comme une fonction de la vitessegénéralisée $\dot{q}_\alpha$. La coordonnée généraliséeq_α et $t$ne jouent aucun rôle dans cette transformation.Le hamiltonien, en tant que transformée de Legendre, doit s'exprimer enfonction de (q_α,p_α,t) et non de $(q_\alpha\ ,\dot{q}_\alpha\ ,t)$.

3-3. Equations de Hamilton :

On a : $H\ = H(q_\alpha,p_\alpha,t)$

$$\Rightarrow dH = \sum \frac{\partial H}{\partial q_\alpha} dq_\alpha + \sum \frac{\partial H}{\partial p_\alpha} dp_\alpha + \frac{\partial H}{\partial t} dt \qquad (1)$$

$$H\ (q_\alpha,p_\alpha,t) = \sum p_\alpha\dot{q}_\alpha - L$$

$$\Rightarrow dH = \sum dp_\alpha\dot{q}_\alpha + \sum p_\alpha d\dot{q}_\alpha - dL$$

$$dH = \sum dp_\alpha\dot{q}_\alpha + \sum p_\alpha d\dot{q}_\alpha - \sum \frac{\partial L}{\partial q_\alpha} dq_\alpha - \sum \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha} d\dot{q}_\alpha - \frac{\partial L}{\partial t} dt$$

Ou $p_\alpha = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha}$

L'équation de Lagrange : $\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha} - \frac{\partial L}{\partial q_\alpha} = 0$ devient $\frac{d}{dt} p_\alpha - \frac{\partial L}{\partial q_\alpha} = 0$

$$\dot{p}_\alpha = \frac{\partial L}{\partial q_\alpha}$$

D'où

$$dH = \sum dp_\alpha \dot{q}_\alpha + \sum p_\alpha d\dot{q}_\alpha - \sum \dot{p}_\alpha \, dq_\alpha - \sum p_\alpha \, d\dot{q}_\alpha - \frac{\partial L}{\partial t} dt$$

$$dH = \sum dp_\alpha \dot{q}_\alpha - \sum \dot{p}_\alpha \, dq_\alpha - \frac{\partial L}{\partial t} dt \qquad (2)$$

En identifiant (1) et (2) on obtient

$$\begin{cases} \dot{q}_\alpha = \dfrac{\partial H}{\partial p_\alpha} \\ \dot{p}_\alpha = -\dfrac{\partial H}{\partial q_\alpha} \\ \dfrac{\partial H}{\partial t} = -\dfrac{\partial L}{\partial t} \end{cases}$$

Ce sont les équations canoniques de Hamilton.

Théorème :

Si H ne dépend pas explicitement du temps alors H est une constante du mouvement(ou intégrale première).

Démonstration :

$$H = H(q_\alpha, p_\alpha, t)$$

$$\Rightarrow dH = \sum \frac{\partial H}{\partial q_\alpha} dq_\alpha + \sum \frac{\partial H}{\partial p_\alpha} dp_\alpha + \frac{\partial H}{\partial t} dt$$

$$\Rightarrow \frac{dH}{dt} = \sum \frac{\partial H}{\partial q_\alpha} \dot{q}_\alpha + \sum \frac{\partial H}{\partial p_\alpha} \dot{p}_\alpha + \frac{\partial H}{\partial t} dt$$

$$\Rightarrow \frac{dH}{dt} = \sum \frac{\partial H}{\partial q_\alpha} \frac{\partial H}{\partial p_\alpha} - \sum \frac{\partial H}{\partial p_\alpha} \frac{\partial H}{\partial q_\alpha} + \frac{\partial H}{\partial t}$$

$$\Rightarrow \frac{dH}{dt} = \frac{\partial H}{\partial t}$$

H ne dépend pas explicitement du temps$\Rightarrow \frac{\partial H}{\partial t} = 0 \Rightarrow \frac{dH}{dt} = 0$

$$\Rightarrow H = constant$$

Si H ne dépend pas explicitement du temps on a :

$$\begin{cases} \dot{q}_\alpha = \dfrac{\partial H}{\partial p_\alpha} \\ \dot{p}_\alpha = -\dfrac{\partial H}{\partial q_\alpha} \end{cases}$$

Ce sont Les 2n équations canoniques de Hamilton remplacent les n équations d'Euler-Lagrange.

3-4. Crochets de Poisson :

Définition :

Le crochet de Poisson de deux fonctions A et B de variables indépendantes q, p est notée $[A, B]_{q,p}$ est définit par la relation suivante :

$$[A, B] = \sum_{i=1}^{n} \left[\frac{\partial A}{\partial q_i}\frac{\partial B}{\partial p_i} - \frac{\partial A}{\partial p_i}\frac{\partial B}{\partial q_i}\right]$$

Soit f une fonction des variables $q_\alpha,\ p_\alpha$

$$f = f(q_\alpha,\ p_\alpha, t)$$

$$\Rightarrow df = \sum_{\alpha=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial q_\alpha} dq_\alpha + \sum_{\alpha=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial p_\alpha} dp_\alpha + \frac{\partial f}{\partial t} dt$$

$$\Rightarrow \frac{df}{dt} = \sum_{\alpha=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial q_\alpha} \dot{q}_\alpha + \sum_{\alpha=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial p_\alpha} \dot{p}_\alpha + \frac{\partial f}{\partial t}$$

On a : $\dot{q}_\alpha = \frac{\partial H}{\partial p_\alpha}$ and $\dot{p}_\alpha = -\frac{\partial H}{\partial q_\alpha}$(équations de Hamilton)

$$\frac{df}{dt} = \sum_{\alpha=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial q_\alpha}\frac{\partial H}{\partial p_\alpha} - \sum_{\alpha=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial p_\alpha}\frac{\partial H}{\partial q_\alpha} + \frac{\partial f}{\partial t}$$

$$\frac{df}{dt} = [f, H] + \frac{\partial f}{\partial t}$$

En particulier, cette équation permet un calcul facile des constantes du mouvement, $\frac{\partial f}{\partial t} = 0$. Par exemple, si f ne dépend pas explicitement du temps c'est-à-dire $\frac{\partial f}{\partial t} = 0$ alors $f = f(q_\alpha,\ p_\alpha)$est une constante du mouvement si son crochet de poisson avec H est nul.

Propriétés du crochet de poisson :

$$[A, B] = -[B, A]$$

$$[A, b] = 0, tel\ que\ \ b = cste$$

$$[A, BC] = B\,[A, C] + [A, B]C$$

$$\big[A, [B, C]\big] + \big[B, [C, A]\big] + \big[C, [A, B]\big] = 0$$

Les équations de Hamilton à partir des crochets de poisson :

On a $\quad \dot{q}_\alpha = \frac{dq_\alpha}{dt} = [q_\alpha, H] + \frac{\partial q_\alpha}{\partial t} = [q_\alpha, H] = \sum_{\alpha'=1}^{n} \frac{\partial q_\alpha}{\partial q_{\alpha'}}\frac{\partial H}{\partial p_{\alpha'}} - \sum_{\alpha'=1}^{n} \frac{\partial q_\alpha}{\partial p_{\alpha'}}\frac{\partial H}{\partial q_{\alpha'}} = \frac{\partial H}{\partial p_\alpha}$

$$\dot{p}_\alpha = \frac{dp_\alpha}{dt} = [p_\alpha, H] + \frac{\partial p_\alpha}{\partial t} = [p_\alpha, H] = \sum_{\alpha'=1}^{n} \frac{\partial p_\alpha}{\partial q_{\alpha'}} \frac{\partial H}{\partial p_{\alpha'}} - \sum_{\alpha=1}^{n} \frac{\partial p_\alpha}{\partial p_{\alpha'}} \frac{\partial H}{\partial q_{\alpha'}} = -\frac{\partial H}{\partial q_\alpha}$$

3-5. Variables canoniques :

Les variables q_α et p_α vérifient les conditions suivantes :

$$[q_\alpha, q_\beta] = 0$$

$$[p_\alpha, p_\beta] = 0$$

$$[q_\alpha, p_\beta] = \delta_{\alpha\beta}$$

Tout ensemble de $2N$ variables décrivant l'espace des phases et dont les crochets de Poisson ont la forme ci-haut est qualifié de ***canonique*****.**