3-6. Transformations canoniques

Définition : soit le changement de variables suivant :

$$(q_\alpha, p_\alpha, t) \to (Q_\alpha, P_\alpha, t)$$

La transformation s'écrit : $Q_\alpha = Q_\alpha(q_\alpha, p_\alpha, t)$ $\; et \; P_\alpha = P_\alpha(q_\alpha, p_\alpha, t)$

La transformation canonique est un changement de variables : $Q_\alpha = Q_\alpha(q_\alpha, p_\alpha, t)$ $\; et \; P_\alpha = P_\alpha(q_\alpha, p_\alpha, t)$ tel que les équations de mouvement soient encore canoniques.

c-à-d dans le système (Q_α, P_α) on peut toujours écrire :

$$[Q_\alpha, Q_\beta] = 0$$

$$[P_\alpha, P_\beta] = 0$$

$$[Q_\alpha, P_\beta] = \delta_{\alpha\beta}$$

et

$$\begin{cases} \dot{Q}_\alpha = \dfrac{\partial \mathcal{H}}{\partial P_\alpha} \\ \dot{P}_\alpha = -\dfrac{\partial \mathcal{H}}{\partial Q_\alpha} \\ \dfrac{\partial \mathcal{H}}{\partial t} = -\dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} \end{cases}$$

Tel que $\mathcal{H}$ et $\mathcal{L}$ sont l'hamiltonien et est le lagrangien dans le nouveau système : $\mathcal{H} = \mathcal{H}(Q_\alpha, P_\alpha, t)$ et $\mathcal{L} = \mathcal{L}(Q_\alpha, P_\alpha, t)$.

3-7. Fonctions génératrices

Pour générer ces transformations, nous retournerons au principe variationnel lui-même.
On a:

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} L dt = \delta \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{L} dt = 0$$

Donc

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} \left(\sum p_\alpha \dot{q}_\alpha - H\right) dt = \delta \int_{t_1}^{t_2} \left(\sum P_\alpha \dot{Q}_\alpha - \mathcal{H}\right) dt = - \; \delta \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{dF}{dt}\right) dt = 0$$

Puisque

$$(\delta \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{dF}{dt}\right) dt = \delta \left(F(t_2) - F(t_1)\right) = 0)$$

$$\text{D'où : } L = \mathcal{L} + \frac{dF}{dt}$$

Cette fonction F, que l'on appelle le générateur de la transformation canonique ou fonction génératrice de la transformation ou simplement fonction génératrice, cette fonction dépend des anciens et des nouvelles variables on distingue 4 cas :

Fonction génératrice	Transformations canoniques	Hamiltonien
$F = F(q_\alpha, Q_\alpha, t) = F_1(q_\alpha, Q_\alpha, t)$	$p_\alpha = \frac{\partial F_1}{\partial q_\alpha}$ et $P_\alpha = -\frac{\partial F_1}{\partial Q_\alpha}$	$\mathcal{H} = H + \frac{\partial F_1}{\partial t}$
$F = F_2(q_\alpha, P_\alpha, t) - Q_\alpha P_\alpha$	$p_\alpha = \frac{\partial F_2}{\partial q_\alpha}$ et $Q_\alpha = \frac{\partial F_2}{\partial P_\alpha}$	$\mathcal{H} = H + \frac{\partial F_2}{\partial t}$
$F = F_3(p_\alpha, Q_\alpha, t) + q_\alpha p_\alpha$	$q_\alpha = -\frac{\partial F_3}{\partial p_\alpha}$ et $P_\alpha = -\frac{\partial F_3}{\partial Q_\alpha}$	$\mathcal{H} = H + \frac{\partial F_3}{\partial t}$
$F = F_4(p_\alpha, P_\alpha, t) + q_\alpha p_\alpha - Q_\alpha P_\alpha$	$q_\alpha = -\frac{\partial F_4}{\partial p_\alpha}$ et $Q_\alpha = \frac{\partial F_4}{\partial P_\alpha}$	$\mathcal{H} = H + \frac{\partial F_4}{\partial t}$

3-8. La méthode de Hamilton-Jacobi :

Les transformations canoniques peuvent être utilisées pour simplifier la solution d'un problème, en nous permettant d'utiliser des variables en fonction desquelles les équations de Hamilton sont plus simples à résoudre. Le cas extrême d'une telle simplification se produit si le nouveau hamiltonien $\mathcal{H}$ est identiquement nul : $\mathcal{H} = 0$. Dans ce cas, toutes les coordonnées et les impulsions sont des constantes dans le temps :

$$\dot{Q}_\alpha = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial P_\alpha} = 0 \quad \Rightarrow \quad Q_\alpha = \gamma$$

$$\dot{P}_\alpha = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial Q_\alpha} = 0 \quad \Rightarrow \quad P_\alpha = \beta$$

Ou γ et β sont des constantes.

Appelons $S(q_\alpha, P_\alpha, t)$= $S(q_\alpha, \beta, t)$la fonction génératrice de type F_2 qui mènerait à une telle transformation.

Demander $\mathcal{H} = 0$ revient à dire que :

$$\mathcal{H} = H(q_\alpha, p_\alpha, t) + \frac{\partial S}{\partial t} = 0$$

$$H(q_\alpha, p_\alpha, t) + \frac{\partial S}{\partial t} = 0$$

Comme $p_\alpha = \frac{\partial S}{\partial q_\alpha}$, cela se traduit par une équation différentielle aux dérivées partielles :

$$H\left(q_\alpha, \frac{\partial S}{\partial q_\alpha}, t\right) + \frac{\partial S}{\partial t} = 0$$

Il s'agit de l'équation de **Hamilton-Jacobi**.

Exemple :

Trouver l'hamiltonien d'une particule libre de masse m à une dimension $(U(x) = 0)$

Réponse :

$$q_\alpha = x$$

$E_c = \frac{1}{2}m\dot{x}^2$; $U(x) = 0$ $\Rightarrow$le lagrangien $L = \frac{1}{2}m\dot{x}^2$

$$p = p_x = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m\dot{x} \quad \rightarrow \dot{x} = \frac{p}{m}$$

L'hamiltonien H : $H = \sum p_\alpha \dot{q}_\alpha - L = p\dot{x} - \frac{1}{2}m\dot{x}^2 = p.\left(\frac{p}{m}\right) - \frac{1}{2}m\left(\frac{p}{m}\right)^2 = \frac{p^2}{2m}$

Donc $H = \frac{p^2}{2m}$

-Ecrire l'équation de Hamilton-Jacobi correspondante :

Réponse :

$$H\left(x, \frac{\partial S}{\partial x}, t\right) + \frac{\partial S}{\partial t} = 0$$

$$p = \frac{\partial S}{\partial x}$$

$$\frac{p^2}{2m} + \frac{\partial S}{\partial t} = \frac{1}{2m}\left(\frac{\partial S}{\partial x}\right)^2 + \frac{\partial S}{\partial t} = 0$$

L'équation de Hamilton-Jacobi correspondante est :

$$\frac{1}{2m}\left(\frac{\partial S}{\partial x}\right)^2 + \frac{\partial S}{\partial t} = 0$$

-trouver la solution $S(x, \beta, t)$

-**réponse :** On utilise la méthode de séparation des variables :

$$S = S_1(x) + S_2(t)$$

Comme les deux termes de cette équation dépendent de variables différentes, ils doivent nécessairement être constants et opposés, sinon l'égalité ne pourrait être vraie pour toutes les valeurs de *x* et de *t*. Appelons cette constante β :

$$\frac{1}{2m}\left(\frac{\partial S_1}{\partial x}\right)^2 = \beta \quad et \quad \frac{\partial S_2}{\partial t} = -\beta$$

$S_2(t) = -\beta t$ Et $S_1(x) = \sqrt{2m\beta}\, x$

$$S(x, \beta, t) = \sqrt{2m\beta}\, x - \beta t$$

Trouver l'équation du mouvement à partir de $S(x, \beta, t)$

Réponse :

On utilise les équations de la transformation :

$$Q = \gamma = \frac{\partial S}{\partial P} = \frac{\partial S}{\partial \beta}$$

$$\gamma = x\sqrt{\frac{2m}{\beta}} - t$$

D'où $$x(t) = \sqrt{\frac{2\beta}{m}}(t + \gamma)$$

L'impulsion *p* est, quant à elle, donnée par :

$$p = \frac{\partial S}{\partial x} = \sqrt{2m\beta}$$

3-9. L'espace des phases :

L'état d'un système mécanique est connu lorsqu'on se donne la position et la vitesse de chaque particule. De façon équivalente, il est déterminé par la donnée des coordonnées q_α et des impulsions p_α $,\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{1}, \dots, \boldsymbol{n}$.L'espace à **2N** dimension des coordonnées et des impulsions s'appelle l'espace des phases.
Considérons par exemple un hamiltonien indépendant du temps tel que :

$$H(q,p) = \frac{p^2}{2m} + U(q)$$

H = E où E est l'énergie totale du système. Alors, toute solution doit obéir à

$$p = \pm\sqrt{2m(E - U(q))}$$

Et il devient possible de tracer les courbes de p en fonction de q pour chaque valeur de E :
Exemple :
Exemple :
Considérons le pendule simple constitué d'un point matériel fixé à une corde et pouvant tourner autour d'un axe horizontal. C'est un système à un degré de liberté. Le lagrangien s'écrit :
$(U(y = 0)) = 0)$

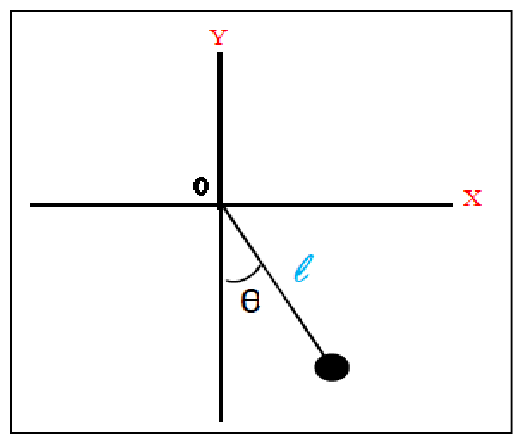
$$L = E_c - U = \frac{m}{2}\left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2\right) - U(y)$$

$q_\alpha = \theta$

$\begin{cases} x = l\,sin\theta \\ y = l\,cos\theta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot{x} = l\dot{\theta}\,co\theta \\ \dot{y} = -l\dot{\theta}\,sin\theta \end{cases}$

$E_c = \frac{m}{2}l^2\dot{\theta}^2$ et $U(y) = -mgy = -mgl\,cos\theta$

$L = \frac{m}{2}l^2\dot{\theta}^2 + mgl\,cos\theta$



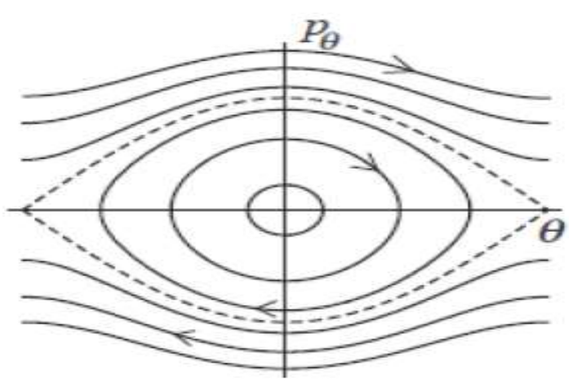
$H\,(\theta, p_\theta) = p_\theta.\dot{\theta} - L$

$p_\theta = \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = ml^2\dot{\theta} \Rightarrow \dot{\theta} = \frac{p_\theta}{ml^2}$

$H\,(\theta, p_\theta) = p_\theta.\frac{p_\theta}{ml^2} - \frac{m}{2}l^2\left(\frac{p_\theta}{ml^2}\right)^2 - mgl\,cos\theta$

$$H\,(\theta, p_\theta) = \frac{{p_\theta}^2}{2ml^2} - mgl\,cos\theta = \mathrm{E}$$

$$p_\theta = \pm\sqrt{2ml^2(E + mgl\,cos\theta)}$$



3-10. Système intégrable :

En mécanique hamiltonienne, un système intégrable est un système qui possède un nombre suffisant de constantes du mouvement (en) indépendantes. Lorsque le mouvement est borné, la dynamique est alors périodique ou quasi périodique.

Propriétés d'un système intégrable

Lorsque le mouvement est borné, on peut trouver une transformation canonique des 2N variables originales (q_α, p_α) vers 2n nouvelles variables constantes du mouvement « actions-angles » $(\omega_\alpha; J_\alpha)$ l'Hamiltonien ne dépend plus que des n variables d'action.

3-11. Variables angles-actions :

Il est possible de définir des variables canoniques pour un mouvement périodique ou quasi périodique, (système intégrable), dans ce cas l'hamiltonien est constant et égale à l'énergie totale du système. Les points (q_α, p_α) représentant l'état du système dans l'espace de phase de la trajectoire forment une courbe fermée C_f. On appelle variable action la quantité suivante :

$$J_\alpha = \oint_{(C_f)} p_\alpha \, dq_\alpha$$

Ces intégrales sont des constantes de mouvement.

La fonction génératrice S est de la forme suivante

$$S(q_\alpha, \beta_\alpha, t) = S(q_\alpha, J_\alpha, t)$$

Tel que $p_\alpha = \frac{\partial S}{\partial q_\alpha}$ et $Q_\alpha = \frac{\partial S}{\partial J_\alpha}$

Puisque $p_\alpha = \frac{\partial S}{\partial q_\alpha} = \frac{dS}{dq_\alpha}$ (pour que l'intégrale fermé est une constante)

$$J_\alpha = \oint_{(C_f)} \frac{dS}{dq_\alpha} dq_\alpha = S(q_\alpha, \beta_\alpha, t) \rightarrow J_\alpha = J_\alpha(\beta_\alpha)$$

Puisque J_α et β_α $\forall$ α sont des constantes $\rightarrow J_\alpha = \beta_\alpha$

Donc on passe de système (q_α, p_α) vers le système $(\gamma_\alpha = Q_\alpha;\ J_\alpha = P_\alpha)$

On note habituellement les nouvelles coordonnées Q_α, $Q_\alpha = \gamma_\alpha$ dans ce cas les équations de mouvement de Hamilton dans le système $((\omega_\alpha; J_\alpha)$ s'écrivent :

$$\dot{\gamma}_\alpha = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial J_\alpha}$$

$$\dot{J}_\alpha = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \gamma_\alpha}$$

Puisque $J_\alpha = cte \Rightarrow \dot{J}_\alpha = 0$, $\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \gamma_\alpha} = 0$ donc $\mathcal{H}$ ne dépend pas de γ_α il dépend uniquement de J_α. Et $\dot{\gamma}_\alpha = cte(J_\alpha)$ donc :

$\gamma_\alpha = \omega_\alpha t + c_\alpha$ Tel que $\omega_\alpha = \left(\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial J_\alpha}\right)$

Puisque nous nous intéressons ici à de systèmes (quasi-)périodiques, ne balayant qu'une partie finie (bornée) de l'escape des phases, Cela n'implique que les variables $Q_\alpha = \gamma_\alpha$ qu'il est possible de les ramener à des variables sont du type "angle » variant de 0 à 2π .