

Département de physique  
Mécanique analytique  
**Série3**

**exercice1**

Une particule de masse  $m$  est contrainte de se déplacer le long d'une cycloïde représentée par les équations paramétriques suivantes :

$$x = a(\varphi - \sin\varphi) \quad y = a(1 + \cos\varphi)$$

La particule est aussi sous l'influence d'un champ gravitationnel.

Écrivez le lagrangien du problème. Ensuite écrire l'expression de l'hamiltonien, et les équations de mouvement.

Utiliser le changement de variable  $u = \cos(\varphi/2)$  et écrire l'équation du mouvement.

Déduire que la perle oscille avec une période à déterminer.

**Exercice2**

Montrer que lorsque  $H$  ne dépend pas explicitement de  $t$ , il est constant et égale à l'énergie totale du système.

**Exercice3.**

Une particule de masse  $m$  se déplace dans le plan  $xy$  sous l'action d'une force centrale ne dépendant que de la distance de la particule à l'origine.

Écrire l'hamiltonien et les équations de Hamilton.

**exercice4**

Montrer les relations suivantes

$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{P}$ , tel que  $r$  le vecteur position  $P$  la quantité de mouvement et  $\vec{L}$  le moment cinétique

$$[Lx, Ly] = Lz, [Ly, Lz] = Lx, [Lz, Lx] = Ly,$$

$$[Px, Ly] = Pz, [Pz, Lx] = -Py, [Px, Lx] = 0,$$

**exercice 6**

Trouver le Hamiltonien d'une particule de masse  $m$  dans un champ gravitationnel homogène  $g$

a) On veut effectuer un changement de variables  $(q, p) \rightarrow (Q, P)$

tel que  $P = E$  où  $E$  est l'énergie mécanique du système. A l'aide des crochets de Poisson, trouver  $Q(q, p, t)$  tel que le changement de variables soit une transformation canonique.

b) Résoudre l'équation de Hamilton-Jacobi dépendant du temps et écrire la transformation canonique  $F_2(q, P, t)$ .

c) Trouver les nouvelles variables  $(Q, P)$  en fonction des anciennes  $(q, p)$ . Comparer le Résultat avec celui du point a).