

Département de physique
Mécanique analytique
Série3

exercice1

Une particule de masse m est contrainte de se déplacer le long d'une cycloïde représentée par les équations paramétriques suivantes :

$$x = a(\varphi - \sin\varphi) \quad y = a(1 + \cos\varphi)$$

La particule est aussi sous l'influence d'un champ gravitationnel.

Écrivez le lagrangien du problème. Ensuite écrire l'expression de l'hamiltonien, et les équations de mouvement.

Utiliser le changement de variable $u = \cos(\varphi/2)$ et écrire l'équation du mouvement.

Déduire que la perle oscille avec une période à déterminer.

Exercice2

Montrer que lorsque H ne dépend pas explicitement de t , il est constant et égale à l'énergie totale du système.

Exercice3.

Une particule de masse m se déplace dans le plan xy sous l'action d'une force centrale ne dépendant que de la distance de la particule à l'origine.

Écrire l'hamiltonien et les équations de Hamilton.

exercice4

Montrer les relations suivantes

$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{P}$, tel que r le vecteur position P la quantité de mouvement et \vec{L} le moment cinétique

$$[Lx, Ly] = Lz, [Ly, Lz] = Lx, [Lz, Lx] = Ly,$$

$$[Px, Ly] = Pz, [Pz, Lx] = -Py, [Px, Lx] = 0,$$

exercice 6

Trouver le Hamiltonien d'une particule de masse m dans un champ gravitationnel homogène g

a) On veut effectuer un changement de variables $(q, p) \rightarrow (Q, P)$

tel que $P = E$ où E est l'énergie mécanique du système. A l'aide des crochets de Poisson, trouver $Q(q, p, t)$ tel que le changement de variables soit une transformation canonique.

b) Résoudre l'équation de Hamilton-Jacobi dépendant du temps et écrire la transformation canonique $F_2(q, P, t)$.

c) Trouver les nouvelles variables (Q, P) en fonction des anciennes (q, p) . Comparer le Résultat avec celui du point a).