

« Cours Transfert de chaleur dans les procédés de fabrication »

*Destiné aux étudiants Master 1 :
Fabrication mécanique & Productique*

INTRODUCTION GENERALE

De tous temps, les problèmes de transmission d'énergie, et en particulier de la chaleur, ont eu une importance déterminante pour l'étude et le fonctionnement d'appareils tels que les générateurs de vapeur, les fours, les échangeurs, les évaporateurs, les condenseurs, etc., mais aussi pour des opérations de transformations chimiques.

En effet, dans certains systèmes réactionnels, c'est la vitesse des échanges de chaleur et non la vitesse des réactions chimiques qui détermine le coût de l'opération (cas de réactions fortement endo- ou exothermique). En outre, de nos jours, par suite de l'accroissement relatif du prix de revient de l'énergie, on recherche dans tous les cas à obtenir le rendement maximal d'une installation pour une dépense d'énergie minimale.

Les problèmes de transfert de chaleur sont nombreux, et on peut essayer de les différencier par les buts poursuivis dont les principaux sont : l'augmentation de l'énergie transmise ou absorbée par une surface, l'obtention du meilleur rendement d'une source de chaleur, la réduction ou l'augmentation du passage d'un débit de chaleur d'un milieu à un autre.

Le potentiel qui provoque le transport et le transfert de l'énergie thermique est la température. Si deux points matériels placés dans un milieu thermiquement isolé sont à la même température, on peut affirmer qu'il n'existe aucun échange thermique global entre ces deux points dits en équilibre thermique (il s'agit bien d'un équilibre thermique car chacun des points matériels émet une énergie thermique nette de même module, mais de signe opposé).

Le transfert de chaleur au sein d'une phase ou, plus généralement, entre deux phases, se fait de trois façons :

- a) Par **Conduction**.
- b) Par **Convection**.
- c) Par **Rayonnement**.

Dans de nombreux problèmes de transformation d'énergie thermique, les trois modes de transfert de chaleur coexisteront mais, généralement, au moins une des trois formes pourra être négligée, ce qui simplifiera le traitement mathématique de l'appareil de

transfert. Nous pouvons dire dès à présent, qu'aux températures ordinaires, le transport par rayonnement est négligeable, mais il peut devenir notable et prépondérant lorsque le niveau de température augmente.

En outre, signalons que certains transferts thermiques sont accompagnés d'un transfert de matière entre deux phases. Le flux de chaleur transféré en présence d'un changement de phase dépend de la nature et des propriétés physico-chimiques des phases en présence.

C'est le cas de l'ébullition, de la condensation, mais aussi des problèmes d'humidification, de séchage, de cristallisation, etc.

Dans ce qui suit nous allons présenter, pour les trois types de transport de la chaleur, les lois générales qui les gouvernent. Puis nous traiterons, de manière simple, quelques applications où le mode de transport de chaleur étudié est prédominant [1;2].

1- LA CONDUCTION

La conduction est définie comme étant le mode de transmission de la chaleur (ou l'échange d'énergie interne) provoquée par la différence de température entre deux régions d'un milieu solide, liquide ou gazeux ou encore entre deux milieux en contact physique. (Gradient de température dans un milieu).

- Dans la plupart des cas, on étudie la conduction dans les milieux solides, puisque dans les milieux fluides (c'est-à-dire liquide ou gazeux), il y a souvent couplage avec un déplacement de matière et donc mécanisme de convection.

- La conduction est le seul mécanisme intervenant dans le transfert de chaleur dans un solide homogène, opaque et compact.

La conduction s'effectue de proche en proche :

- Si on chauffe l'extrémité d'un solide il y a transfert progressif.
- Si on coupe le solide, on stoppe le transfert.

Exemple : Barre de métal chauffée à l'une de ces extrémités.

On comprend donc intuitivement que la conduction a une origine microscopique. Il s'agit d'un mécanisme de diffusion de la chaleur.

2- LA CONVECTION

La convection est le mode de transmission qui implique le déplacement d'un fluide gazeux ou liquide (écoulement) et échange avec une surface qui est à une température différente.

Exemple : C'est ce qui se passe le long d'un radiateur. L'air froid s'échauffe au contact du radiateur, se dilate et monte sous l'effet de la poussée d'Archimède. Il est alors remplacé par de l'air froid et ainsi de suite ; il y a existence de courants de fluide dans l'air ambiant.

On distinguera la convection forcée (due à l'action d'une pompe, d'un ventilateur, etc., ...) de la convection naturelle (ou libre) dans laquelle le mouvement du fluide est créé par des différences de densité, elles mêmes provoquées par des différences de température

3- LE RAYONNEMENT

Le rayonnement thermique peut être considéré comme un cas particulier du rayonnement électromagnétique. L'exemple le plus simple est celui du rayonnement solaire.

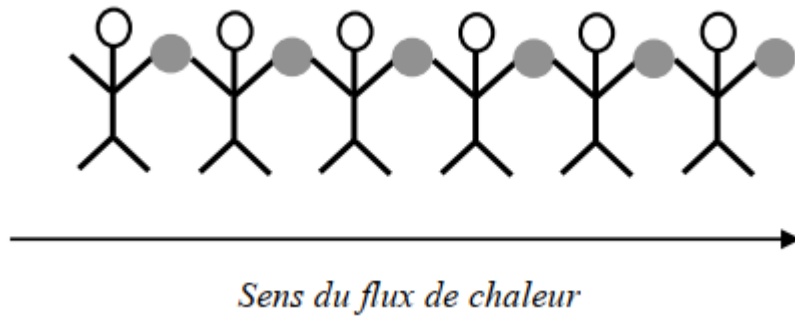
Le rayonnement thermique est le mode de transmission par lequel la chaleur passe d'un corps à haute température à un autre plus froid sans nécessité de support matériel. C'est donc le seul mode de transfert de chaleur qui peut se propager dans le vide.

Le rayonnement thermique ne diffère des autres ondes électromagnétiques, comme les ondes hertziennes par exemple, que par son origine : la température. En effet tout corps rayonne tant que sa température est différente de 0 K.

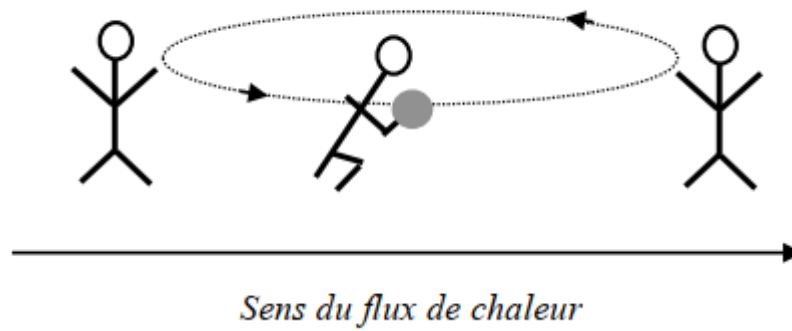
Le rayonnement thermique est un phénomène de surface.

On peut schématiquement représenter les transferts de chaleur comme décrit ci-dessous (Figure 1) :

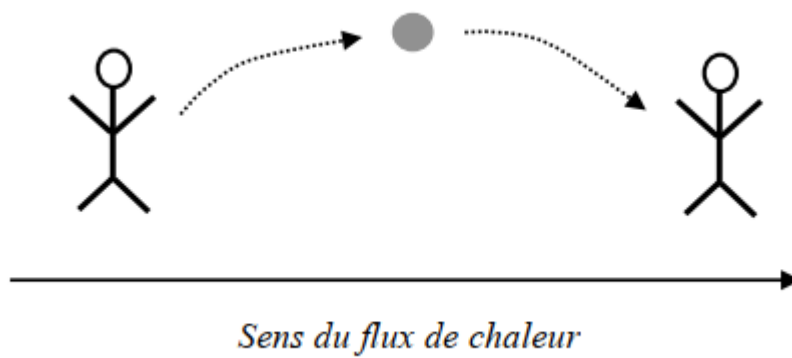
a- CONDUCTION



b- CONVECTION



c- RAYONNEMENT



F

Figure 1 : Schémas de principe sur les mécanismes de transferts de chaleur : (a) conduction thermique ; (b) convection; (c) rayonnement

CHAPITRE 2

LA CONDUCTION DE LA CHALEUR

Rappelons que la conduction est le seul mode de transfert de chaleur possible dans un solide (sauf pour quelques solides transparents comme le verre qui laissent passer un rayonnement électromagnétique). C'est un mode de transfert sans transport de matière.

Définitions :

- **Température T**: elle se définit en chaque point d'un corps liquide, solide ou gazeux. C'est une fonction scalaire de l'espace et du temps lorsque le problème en dépend (problème instationnaire). L'unité de température est le degré Kelvin [K] ou encore le degré Celsius [C].
- **Flux de chaleur Φ** : c'est la quantité de chaleur qui traverse une surface S par unité de temps:

$$\Phi = \frac{dQ}{dt} \text{ en Watt}$$

- **Densité de flux**: elle représente la puissance qui traverse l'unité de surface.

Pour une surface perpendiculaire au flux de chaleur :

$$\varphi = \frac{d\Phi}{dS}$$

Si le flux est homogène en tout point de la surface alors :

$$\varphi = \frac{\Phi}{S} = \frac{1}{S} \frac{dQ}{dt}$$

φ s'exprime en W.m^{-2} .

Pour une surface dont la normale \vec{n} est orientée de manière quelconque par rapport au flux (Figure 2.1) alors :

$$d\Phi = \vec{\varphi} \cdot \vec{n} \cdot ds = \varphi \cdot ds \cdot \cos \alpha$$

Le flux à travers une surface quelconque s'écrira donc :

$$\int_s \vec{\varphi} \cdot \vec{n} \cdot ds = \varphi \cdot dS \cdot \cos \alpha$$

L'exemple de la Figure 2.2 illustre l'importance de l'orientation de la surface par rapport à la densité de flux : soit un solide carré dont les deux faces (ABCD et EFGH) sont maintenues à une température constante (respectivement T^+ et T^-) et dont les 4 autres sont isolées $\vec{\varphi}$ (par de la laine de verre par exemple). Un flux de chaleur Φ_0 circulera de la face ABCD vers la face EFGH. En tout point du cube, la densité de flux $\vec{\varphi}$ est donc parallèle à Ox et vaut :

$$\varphi = \frac{\Phi_0}{S}$$

Le flux à travers les 4 faces isolées est nul. Comme on le verra par la suite, s'il n'y a pas de sources de chaleur internes au cube, le flux de chaleur se conserve. Ainsi, si l'on calcule le flux Φ_1 qui traverse la surface diagonale DCEF inclinée à 45° on trouvera $\Phi_1 = \Phi_0$.

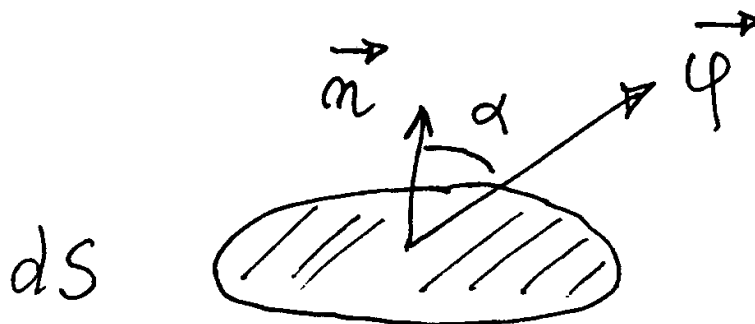


Figure 2.1 : Densité de flux de chaleur à travers une surface élémentaire

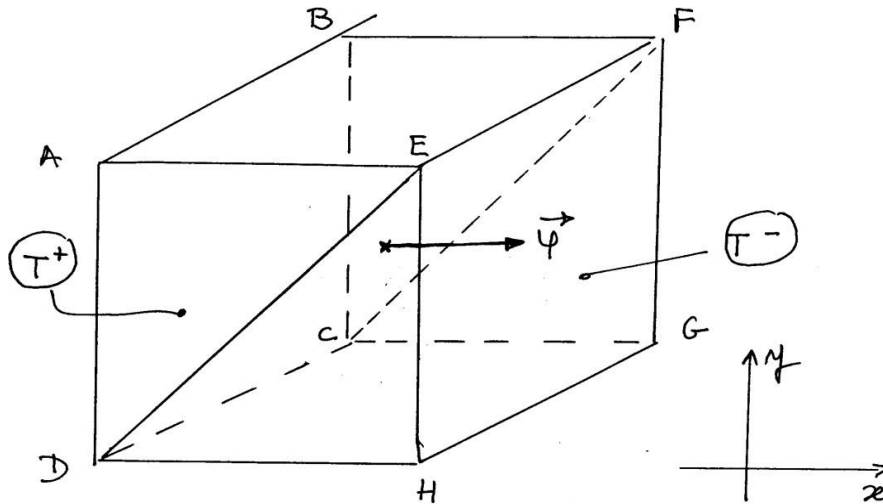


Figure 2.2 : L'importance de l'orientation de la surface par rapport à la densité de flux

• **Surface isotherme** : si dans un milieu on relève les températures en tout point à un instant donné et qu'on relie entre eux les points de même température on obtient des surfaces isothermes en 3D et des lignes isothermes en 2D (voir **Figure 2.3**).

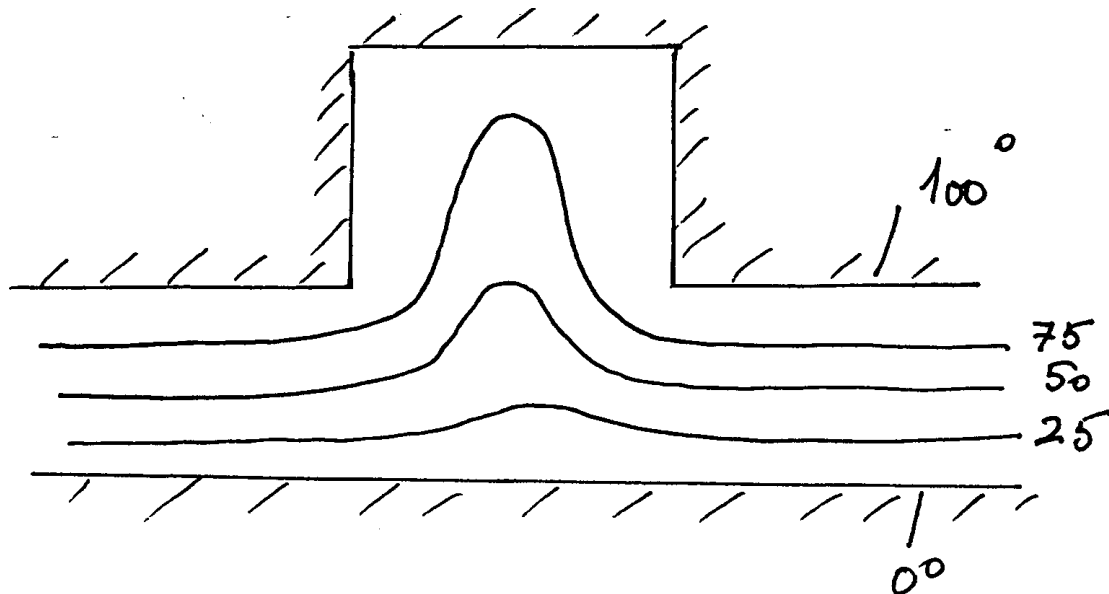


FIG. 2.3 – Exemples de courbes isothermes

Enoncé de la loi de Fourier :

Considérons à nouveau le montage de la figure 2.2. Imposons une différence de température $T^+ - T^- = \Delta T_0$ entre les deux faces non isolées : un flux de chaleur Φ_0 circulera. Doublons cette différence de température : un flux égal à $2\Phi_0$ circulera alors. Pour une valeur donnée de l'écart de température, remplaçons le cube par un matériau différent. La valeur du flux en sera

affectée. Ceci donne l'intuition que le flux qui circule par conduction est proportionnel à la différence de température et à l'aptitude du matériau à conduire la chaleur.

En **1811**, **Fourier** propose une formulation locale de cette loi, donc valable en tout point :

$$\vec{\varphi} = -\lambda \cdot \overrightarrow{\text{grad } T}$$

qui relie la densité de flux $\vec{\varphi}$ en $\text{W}\cdot\text{m}^{-2}$ à la conductivité thermique λ du matériau ($\text{W}\cdot\text{m}^{-1}\cdot\text{K}^{-1}$) et au gradient local de température. Le signe $-$ de la loi de Fourier résulte d'une convention qui rend positif un flux de chaleur s'écoulant du chaud vers le froid, donc dans le sens d'un gradient négatif.

Cette loi est l'analogie thermique de la loi **d'Ohm** :

$\vec{j} = \sigma \cdot \vec{E} = \sigma \cdot \overrightarrow{\text{grad } V}$ où \vec{j} est la densité de courant électrique, σ la conductivité électrique du métal et V le potentiel électrique. Le flux thermique est l'analogie du courant électrique et la température est l'analogie du potentiel électrique. Comme on définit la résistance électrique

$R_e = \frac{1}{\sigma} \cdot \frac{l}{S}$ d'un conducteur de longueur l et de section S , on définit la résistance thermique

par $R_{th} = \frac{1}{\lambda} \cdot \frac{l}{S}$

telle que $\Delta T = R_{th} \cdot \Phi$

Orthogonalité du gradient et de l'isotherme :

Considérons le dessin de la **Figure 2.4**. Entre les points M et M' distants de \overrightarrow{dM} la différence de température vaut : $dT = \overrightarrow{\text{grad } T} \cdot \overrightarrow{dM}$

Si l'on place le point M' sur la même isotherme que M , on obtient : $\overrightarrow{\text{grad } T} \cdot \overrightarrow{dM} = 0$ ce qui signifie que le gradient de température en chaque point est perpendiculaire à l'isotherme passant par ce point. On en déduit aussi que les lignes de flux Φ sont elles aussi perpendiculaires aux isothermes. Ceci permet de définir la notion de tube de flux. Sur la **Figure 2.5** les courbes fermées C_1, C_2, C_3 appartiennent aux surfaces isothermes T_1, T_2 et T_3 et sont liées entre elles par une même ligne de flux. Les lignes de flux étant par définition des

surfaces adiabatiques (aucun flux ne les traverse), les surfaces C_1, C_2, C_3 sont donc traversées par le même flux. Le tube ainsi formé s'appelle un tube de flux. Il laisse passer un flux Φ . On peut définir la résistance thermique R_{th} de ce tube entre les isothermes T_1 et T_2 par exemple, telle que :

$$T_1 - T_2 = R_{th} \cdot \Phi$$

Cette loi est l'analogie de la loi d'Ohm : $\Delta V = R_e \cdot I$

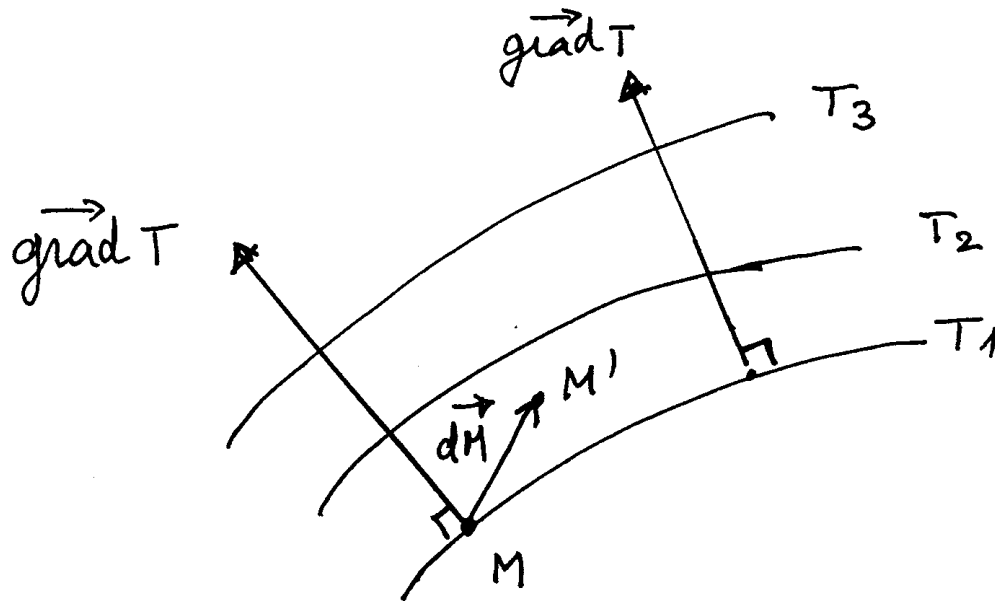


Figure 2.4: Gradient de température

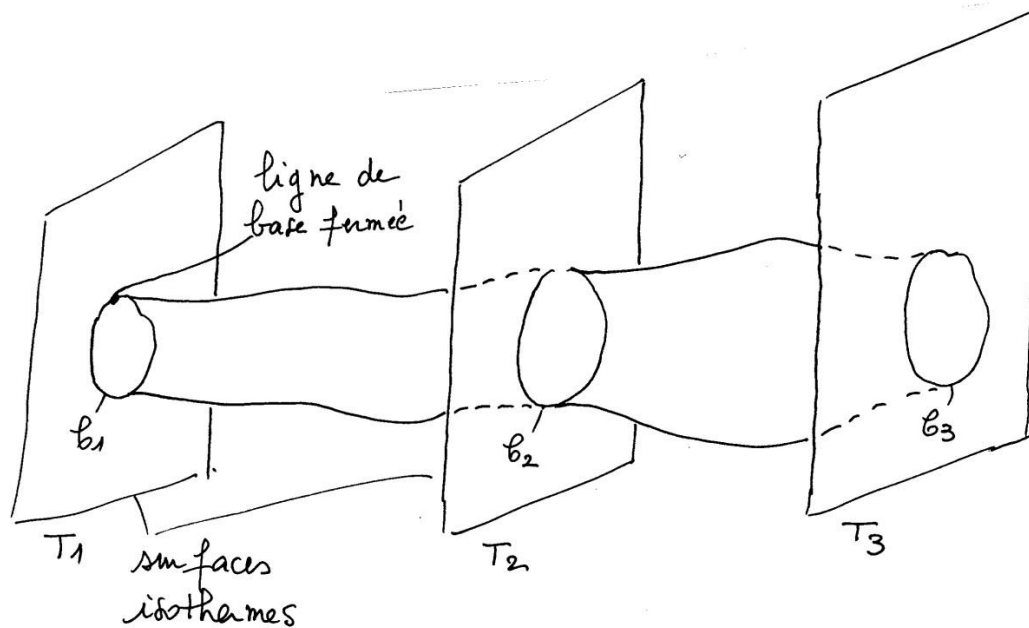


Figure 2.5: Définition d'un tube de flux.

La conductivité thermique :

Généralités :

La conductivité thermique λ (souvent notée k dans les pays anglo-saxons) exprime, de par sa définition, l'aptitude d'un matériau à conduire la chaleur.

Définition : la conductivité thermique est le flux de chaleur qui traverse une surface unité pour un matériau soumis à un gradient de température égal à l'unité.

La conductivité thermique λ s'exprime en $\mathbf{W.m^{-1}.K^{-1}}$

.La conductivité thermique dépend de :

- La nature physico-chimique du matériau
- La nature de la phase considérée (solide, liquide, gaz)
- La température
- L'orientation dans les matériaux anisotropes

Tableau 2.1 : Ordre de grandeur de la Conductivité thermique à température ambiante (20°C)

Type de matériau	Conductivité thermique λ (W.m ⁻¹ .K ⁻¹)
Gaz à la pression atmosphérique	0.006-0.18
Matériaux isolants	0.025-0.25
Liquides non métalliques	0.1-1.0
Solides non métalliques	0.025-3
Liquides métalliques	8.5-85
Alliages métalliques	10-150
Métaux purs	20-400

La conductivité thermique dépend de la température lorsque l'on considère des plages étendues de température. Dans ce cas on pourra cependant souvent considérer une variation linéaire avec T, sous la forme : $\lambda = \lambda_0. (1 + b. T)$

Où : λ_0 désigne la conductivité à T=T₀ et b est une constante expérimentale.

La dépendance en température de différents matériaux est illustrée dans la figure ci-dessous (Fig 2.6), (extraite de J. Crabol – *transfert de chaleur- ed. Masson 1989*).

Dans la suite de ce cours on considérera systématique la conductivité thermique λ comme un scalaire constant ce qui revient à se placer dans le **cas de matériaux homogènes et isotropes**. Cette simplification n'est cependant pas abusive car il est souvent difficile de procéder différemment et même dans le cas de matériaux typiquement inhomogènes (béton par exemple) on considère une conductivité moyenne appelée conductivité effective.

Matériaux anisotropes :

Certains matériaux ont une structure qui rend la conductivité thermique différente selon la direction de propagation de la chaleur. C'est le cas des matériaux fibreux par exemple (fibre de verre, fibre de carbone). Dans ces matériaux, qu'on appelle anisotropes, le flux de chaleur aura donc une direction privilégiée.

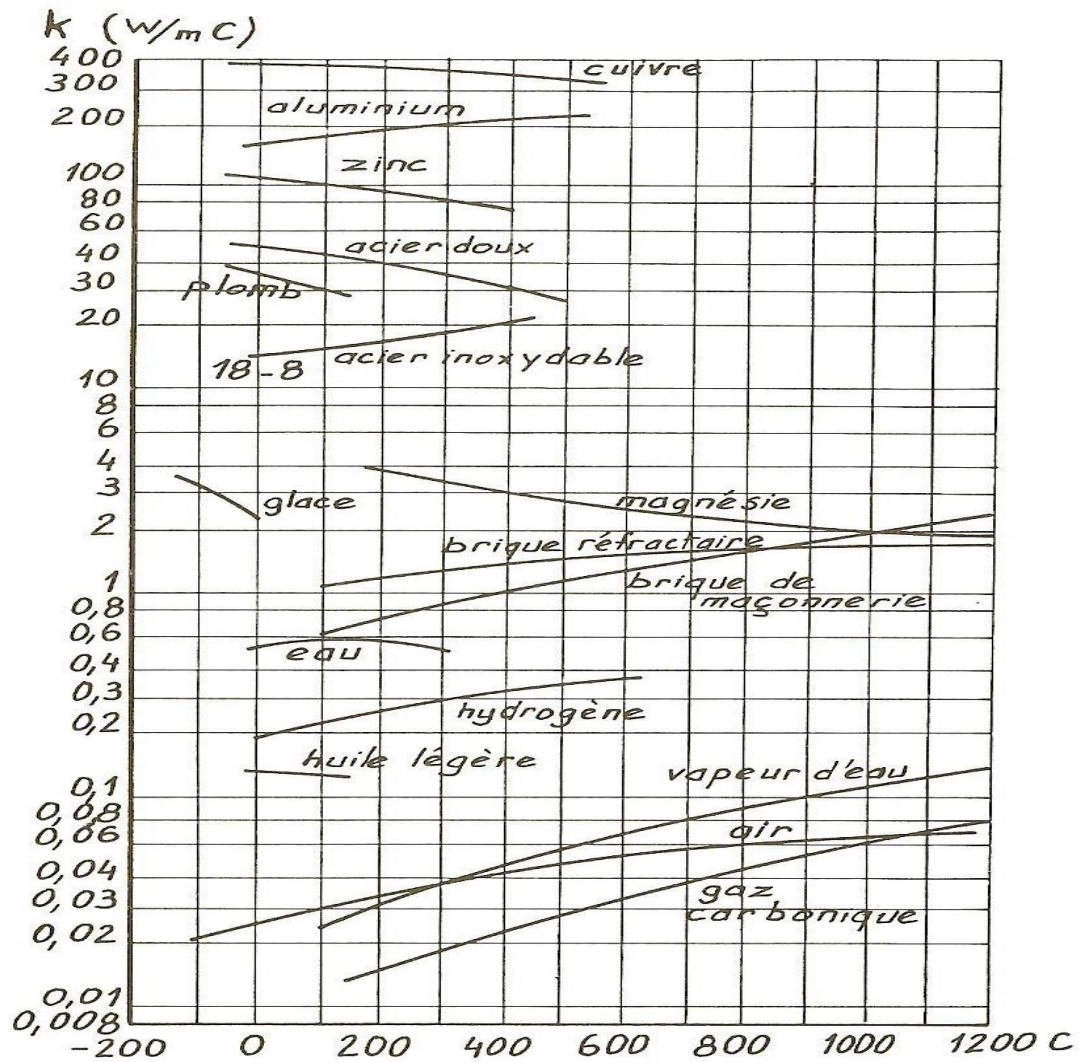


Fig. 2 - Conductivité thermique.

Fig 2.6 : Conductivité thermique de différents matériaux en fonction de la température (Extraite de J. Crabol – transfert de chaleur- ed. Masson 1989)

Equations générales de la conduction :

Considérons un solide de volume V. Soient $\gamma = \rho.c$ sa chaleur volumique, λ sa conductivité thermique, et p la puissance générée par unité de volume due aux sources internes.

Les caractéristiques thermiques γ et λ peuvent être fonction du point considéré et de la température en ce point. De plus, p peut être une fonction du temps.

Bilan énergétique :

On applique le premier principe de la Thermodynamique à un volume fini v, de surface S,

contenu dans V (voir Fig.2.7)

Avec les conventions habituelles, on compte positivement les énergies reçues par ce système. \vec{n} Etant la normale extérieure à la surface S, la puissance algébrique reçue par v, traverse S dans le sens opposé de \vec{n} , d'où l'expression de la puissance échangée sur la surface limite S.

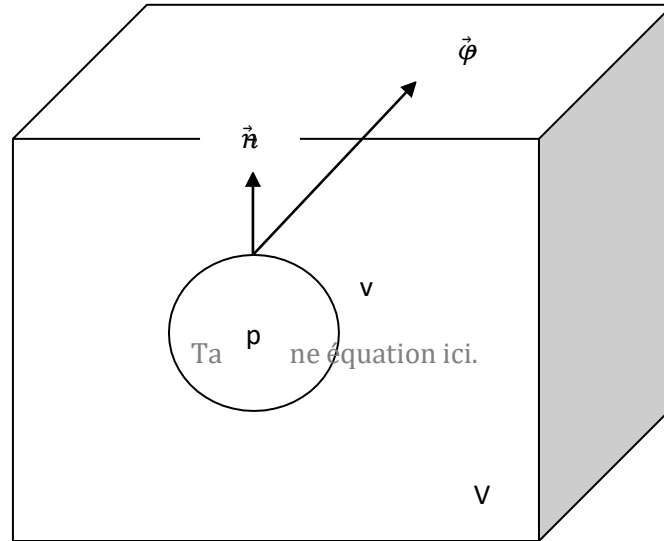


Fig.2.7 : Bilan énergétique appliqué à l'élément de volume v

$$\int_S -\vec{\phi} \cdot \vec{n} dS$$

La puissance générée par les sources internes est donnée par l'intégrale.

$$\int_v p \cdot dv$$

Le solide considéré étant indéformable, seule la variation de la température intervient dans l'expression de la variation instantanée d'énergie interne, soit :

$$\frac{dU}{dt} = \int_v \gamma \cdot \frac{\partial T}{\partial t} \cdot dv$$

L'équation traduisant le premier principe s'écrit alors :

$$\int_S -\vec{\phi} \cdot \vec{n} dS + \int_v p \cdot dv = \int_v \gamma \cdot \frac{\partial T}{\partial t} \cdot dv$$

La formule d'OSTROGRADSKY permet de transformer l'intégrale de surface en intégrale de volume :

$$\int_S \vec{\varphi} \cdot \vec{n} \, dS = \int_v \operatorname{div} \vec{\varphi} \, dv$$

On obtient alors

$$\int_v \left[-\operatorname{div} \vec{\varphi} + p - \gamma \cdot \frac{\partial T}{\partial t} \right] \cdot dv = 0$$

v étant un volume arbitraire de V, on a donc en chaque point de V :

$$\boxed{\operatorname{div} \vec{\varphi} + \gamma \cdot \frac{\partial T}{\partial t} - p = 0}$$

Equations de la chaleur pour un solide homogène et isotrope :

Pour un solide homogène et isotrope, les caractéristiques thermiques λ et $\gamma = \rho \cdot c$ ne dépendent que de la température.

La dernière équation s'écrira alors sous la forme ci-dessous:

$$-\operatorname{div}[\lambda(T) \cdot \overrightarrow{\operatorname{grad}T}] + \gamma(T) \cdot \frac{\partial T}{\partial t} - p(M, t) = 0$$

Ou encore en introduisant la diffusivité thermique du solide :

$$D_{th} = \frac{\lambda}{\rho \cdot c} \text{ (m}^2/\text{s)}$$

$$\boxed{\Delta T - \frac{1}{D_{th}} \cdot \frac{\partial T}{\partial t} + \frac{1}{\lambda} \cdot (\overrightarrow{\operatorname{grad}T}) \cdot \frac{d\lambda}{dT} \cdot (\overrightarrow{\operatorname{grad}T}) + \frac{p(M, t, T)}{\lambda} = 0}$$

A fin de linéariser cette dernière équation, on suppose que caractéristiques thermiques λ et $\gamma = \rho \cdot c$ sont indépendantes de la température et que la puissance volumique p générée au sein du solide est une fonction linéaire de T. c-à-d : $p = A(M, t) + B(M, t) \cdot T$

Différentes formes de l'équation de la chaleur :

Pour un solide de caractéristiques thermiques λ et $\gamma = \rho \cdot c$ sont constantes et pour lequel la puissance volumique p est indépendante de la température, on obtient l'équation linéaire classique de la chaleur :

$$\Delta T - \frac{1}{D_{th}} \cdot \frac{\partial T}{\partial t} + \frac{p(M, t)}{\lambda} = 0$$

1/ **Milieu avec sources internes, en régime permanent :**

$$\Delta T + \frac{p}{\lambda} = 0 \quad (\text{Equation de POISSON})$$

2/ **Milieu sans sources internes, en régime permanent :**

$$\Delta T = 0 \quad (\text{Equation de LAPLACE})$$

3/ **Milieu sans sources internes, en régime variable :**

$$\Delta T = \frac{1}{D_{th}} \cdot \frac{\partial T}{\partial t} \quad (\text{Equation de FOURIER})$$

Expressions analytiques de l'équation de la chaleur :

En introduisant les expressions du **laplacien** Δ en coordonnées cartésiennes, cylindriques et sphériques, on obtient respectivement les équations suivantes :

1- **En coordonnées cartésiennes :** (x, y, z, t)

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} - \frac{1}{D_{th}} \cdot \frac{\partial T}{\partial t} + \frac{p(x, y, z, t)}{\lambda} = 0$$

2- **En coordonnées cylindriques :** (r, z, t)

$$\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} - \frac{1}{D_{th}} \cdot \frac{\partial T}{\partial t} + \frac{p(r, z, t)}{\lambda} = 0$$

3- **En coordonnées sphériques :** (r, t)

$$\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \cdot \frac{\partial T}{\partial r} - \frac{1}{D_{th}} \cdot \frac{\partial T}{\partial t} + \frac{p(r, t)}{\lambda} = 0$$

Conditions aux limites spatio-temporelles :

L'équation générale de la chaleur traduit ,par une relation entre les variables x,y,z,t et la température ,le mécanisme du phénomène conductif, en tout point de coordonnées x,y,z à tout instant t .

Cette équation aux dérivées partielles, linéaire, du deuxième ordre, admet en principe une infinité de solutions, faisant intervenir des constantes ou des fonctions arbitraires. Mais cette

équation phénoménologique n'a de sens physique que pour de conditions définies. Ces conditions sont les causes qui déterminent l'évolution du phénomène. En effet, l'équation de la chaleur décrivant un phénomène irréversible, ceci implique que le milieu considéré a été soumis à un instant initial à une rupture de son équilibre thermique. Il est alors nécessaire de connaître la répartition initiale des températures en tout point du milieu et aussi la loi de variation de la fonction T ou/et, de sa dérivée normale $\frac{\partial T}{\partial n}$ sur la surface frontière.

Conditions initiales :

La distribution des températures à l'intérieur du solide et sur sa surface est supposée connue à l'instant $t=0$ c-à-d : $T(x,y,z,t=0)=T_0(x,y,z)$

Conditions aux limites (Conditions aux surfaces) :

Les conditions que l'on impose sur la surface frontière c-à-d à la paroi du solide pour $t>0$, seront affectées de l'indice p . Elles sont la traduction mathématique des conditions physiques réelles.

1- Température imposée : (Condition de **DIRICHLET**)

La température est une fonction donnée du point M_p sur la paroi et/ou du temps : $T_p=f(M_p, t)$

2- Densité de flux imposée : (Condition de **NEUMANN**)

La densité de flux thermique est une fonction donnée du point M_p sur la paroi et/ou du temps, soit algébriquement :

$$\varphi = \lambda \left(\frac{\partial T}{\partial n} \right)_p = f(M_p, t)$$

Où $\left(\frac{\partial T}{\partial n} \right)$ est la dérivée normale de T , calculée à la paroi

Remarque : Si le corps est thermiquement isolé, la densité de flux est nulle en tout point de sa surface (adiabaticité).

3- Transfert linéaire à la surface et condition mixte : (Condition de **FOURIER**)

La densité de flux traversant la surface frontière est proportionnelle à la différence de température entre la paroi et le milieu environnant, soit :

$$\varphi = -\lambda \left(\frac{\partial T}{\partial n} \right)_p = h. (T_p - T_\infty)$$

4- Transfert de chaleur par rayonnement :

Un corps de température absolue T_1 , placé dans une enceinte à la température absolue T_2 , échange avec celle-ci la densité de flux thermique :

$$\varphi = A. \sigma. (T_1^4 - T_2^4)$$

Où A = paramètre qui tient compte des propriétés radiatives, émissivité, des corps en présence et de la géométrie des diverses surfaces et de leurs aires.

$$\varphi = -\lambda \left(\frac{\partial T}{\partial n} \right)_p = -A. \sigma. (T_1^4 - T_2^4)$$

4- Transfert de chaleur à l'interface de 2 solides de natures différentes :

Lorsque 2 solides de conductivités respectives λ_1 et λ_2 possèdent une frontière commune, la conservation du flux s'écrit :

$$\lambda_1 \overrightarrow{gradT_1} = \lambda_2 \overrightarrow{gradT_2} \quad \text{sur } S$$

Remarque: Dans le cas d'un contact parfait (égalité des températures des 2 corps à l'interface S): $T_1 = T_2$

Référence :

T.OUKSEL , Cours Transfert Thermique , Université Larbi Ben M'hidi Oum El Bouag.