Ex1 : $\vec{r} = a\cos\omega t\,\vec{i} + b\sin\omega t\,\vec{j}$

vitesse : $\vec{v} = \dfrac{d\vec{r}}{dt} = -a\omega\sin\omega t\,\vec{i} + b\omega\cos\omega t\,\vec{j}$.

accélération : $\vec{a} = \dfrac{d\vec{v}}{dt} = -a\omega^2\cos\omega t\,\vec{i} - b\omega^2\sin\omega t\,\vec{j}$

$\vec{a} = -\omega^2[a\cos\omega t\,\vec{i} + b\sin\omega t\,\vec{j}] = -\omega^2\vec{r}$

l'équation de la trajectoire : $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j}$

$$\begin{cases} x = a\cos\omega t \\ y = b\sin\omega t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{x}{a} = \cos\omega t \\ \dfrac{y}{b} = \sin\omega t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \left(\dfrac{x}{a}\right)^2 = \cos^2\omega t & (1) \\ \left(\dfrac{y}{b}\right)^2 = \sin^2\omega t & (2) \end{cases}$$

(1) + (2) $\Rightarrow \boxed{\left(\dfrac{x}{a}\right)^2 + \left(\dfrac{y}{b}\right)^2 = 1}$ c'est l'équation de la trajectoire

la force par définition : $\vec{F} = m\vec{a} = -m\omega^2\vec{r}$.

$\vec{F} \parallel (-\vec{r})$, $\vec{r} = \vec{OM}$, $-\vec{r} = \vec{MO}$.

$\vec{F} \parallel \vec{MO}$ le vecteur $\vec{MO}$ est dirigée vers (O)

$\Rightarrow \vec{F}$ est dirigée vers (O)

pour que $\vec{F}$ est dérivée d'un potentiel $\vec{rot}\,\vec{F} = \vec{0}$.

$$\vec{\nabla}\wedge\vec{F} = \vec{rot}\,\vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ -m\omega^2 x & -m\omega^2 y & 0 \end{vmatrix} = -m\omega^2\left[\underbrace{\dfrac{\partial y}{\partial x}}_{0} - \underbrace{\dfrac{\partial x}{\partial y}}_{0}\right]\vec{i} - \left[\dfrac{\partial 0}{\partial x} + m\omega^2\underbrace{\dfrac{\partial x}{\partial z}}_{0}\right]\vec{j} - m\omega^2\left[\underbrace{\dfrac{\partial y}{\partial x}}_{0} - \underbrace{\dfrac{\partial x}{\partial y}}_{0}\right]\vec{k}$$

$\dfrac{\partial x}{\partial z} = \dfrac{\partial x}{\partial y} = \dfrac{\partial y}{\partial x} = 0$ [variables indépendantes]

$\vec{F} = -\vec{\nabla}V \Rightarrow V = -\int \vec{F}\cdot d\vec{r}$.

$V = V(r) = +\int \omega^2 m\,\vec{r}\cdot d\vec{r} = \dfrac{\omega^2 m}{2}\vec{r}^{\,2} + K$.

$E = E_c + V(r) = \dfrac{1}{2}m v^2 + V(r)$

$= \dfrac{1}{2}m\left[a^2\omega^2\sin\omega t + b^2\omega^2\cos^2\omega t\right] + \dfrac{\omega^2 m}{2}\left[a^2\cos^2\omega t + b^2\sin^2\omega t\right]$.

$\left[a^2\cos^2\omega t + b^2\sin^2\omega t + a^2\sin^2\omega t + b^2\cos^2\omega t\right]$

$= \dfrac{1}{2}m\omega^2\left[a^2\cos^2\omega t + \ldots\right.$

$= \dfrac{1}{2}m\omega^2\left[a^2 + b^2\right] = $ Cte puisque a, b, ω, m des Ctes le moment cinétique par rapport à o est défini comme :

$$\vec{L} = \vec{r} \wedge \vec{P} = m\,\vec{r} \wedge \vec{v} = m \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a\cos\omega t & b\sin\omega t & 0 \\ -a\omega\sin\omega t & \omega b\cos\omega t & 0 \end{vmatrix}$$

$$= m\omega ab\,(\cos^2\omega t + \sin^2\omega t)\,\vec{k}$$

$$= m\omega ab\,\vec{k}.$$

Ex2 : l'énergie totale $E = E_c + V(x)$.

$$E = \frac{1}{2} m v^2 + V(x) = \frac{1}{2} m \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + V(x)$$

$$\Rightarrow \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 = \frac{2}{m}(E - V(x)) \Longrightarrow \frac{dx}{dt} = \sqrt{\frac{2}{m}(E - V(x)}$$

$$\frac{dx}{\sqrt{\frac{2}{m}(E - V(x)}} = dt$$

$$\Rightarrow \sqrt{\frac{m}{2}} \int_{x_1}^{x_2} \frac{dx}{\sqrt{E - V(x)}} = \int_{t_1}^{t_2} dt = t_2 - t_1.$$

$$\Rightarrow t_2 - t_1 = \sqrt{\frac{m}{2}} \int_{x_1}^{x_2} \frac{dx}{\sqrt{E - V(x)}}$$

si le potentiel $V(x) = \frac{1}{2} k x^2$, $x = a \Rightarrow \dot{x}(a) = 0$.

à $t = 0$ $\quad E = \frac{1}{2} k a^2$ c'est la valeur de l'énergie totale.

$$\frac{dx}{\sqrt{\frac{2}{m}(E - V(x)}} = dt = \frac{dx}{\sqrt{\frac{2}{m}}\left(\frac{1}{2} k a^2 - \frac{1}{2} k x^2\right)^{\frac{1}{2}}}$$

$$= \frac{dx}{\sqrt{\frac{2}{2}\frac{k}{m}}\, a \left(1 - \left(\frac{x}{a}\right)^2\right)^{\frac{1}{2}}}$$

$$\omega t + C = \sqrt{k/m} \int dt = \int \frac{d(x/a)}{\sqrt{1 - \left(\frac{x}{a}\right)^2}} = \arcsin\left(\frac{x}{a}\right)$$

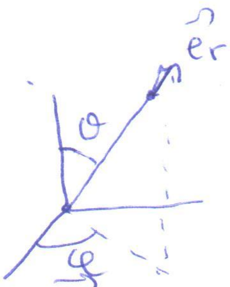
2

$$\Rightarrow \frac{x}{a} = \sin(\omega t + C), \quad \omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

$$\Rightarrow x = a \sin(\omega t + C)$$

3) l'expression de la vitesse en coordonnées sphériques :

en coordonnées sphériques :



$$\vec{r} = r\,\vec{e_r}.$$

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{dr}{dt}\vec{e_r} + r\frac{d\vec{e_r}}{dt} = \dot{r}\,\vec{e_r} + r\frac{d\vec{e_r}}{dt}.$$

$$\frac{d\vec{e_r}}{dt} = \frac{\partial \vec{e_r}}{\partial \varphi}\cdot\dot{\varphi} + \frac{\partial \vec{e_r}}{\partial \theta}\cdot\dot{\theta}$$

l'expression de $\vec{e_r} = \cos\varphi\sin\theta\,\vec{i} + \sin\varphi\sin\theta\,\vec{j} + \cos\theta\,\vec{k}.$

$$\frac{\partial \vec{e_r}}{\partial \varphi} = -\sin\varphi\sin\theta\,\vec{i} + \cos\varphi\sin\theta\,\vec{j} = \sin\theta\left[-\sin\varphi\,\vec{i} + \cos\varphi\,\vec{j}\right]$$

$$= \sin\theta\,\vec{e_\varphi}$$

$$\frac{\partial \vec{e_r}}{\partial \theta} = -\cos\varphi\cos\theta\,\vec{i} + \sin\varphi\cos\theta\,\vec{j} - \sin\theta\,\vec{k} = \vec{e_\theta}.$$

$$\vec{v} = \dot{r}\,\vec{e_r} + r\left[\dot{\varphi}\sin\theta\,\vec{e_\varphi} + \dot{\theta}\,\vec{e_\theta}\right].$$

$$\boxed{\vec{v} = \dot{r}\,\vec{e_r} + r\dot{\theta}\,\vec{e_\theta} + r\dot{\varphi}\sin\theta\,\vec{e_\varphi}}$$

Ex 4 : l'expression du gradient en coordonnées polaires, cylindriques, sphériques.

En coordonnées polaire (r, θ) dans un plan : tel que $\vec{e_r} = \cos\theta\,\vec{i} + \sin\theta\,\vec{j}$

$$\vec{r} = r\,\vec{e_r}$$

$$d\vec{r} = dr\,\vec{e_r} + r\,d\vec{e_r} = dr\,\vec{e_r} + r\frac{d\vec{e_r}}{d\theta}\,d\theta.$$

$$\frac{d\vec{e_r}}{d\theta} = (-\sin\theta\,\vec{i} + \cos\theta\,\vec{j}) = \vec{e_\theta}.$$

$$\boxed{d\vec{r} = dr\,\vec{e_r} + r\,d\theta\,\vec{e_\theta}}$$

on va démontrer la relation générale suivante.

$f = f(x, y, z)$

$df = \frac{\partial f}{\partial x} . dx + \frac{\partial f}{\partial y} . dy + \frac{\partial f}{\partial z} . dz = \vec{\nabla} f \cdot \vec{dr}$

cette relation est valide tel que soit le système de coordonnées

système polaire :

$f = f(r, \theta) \Rightarrow df = \frac{\partial f}{\partial r} dr + \frac{\partial f}{\partial \theta} . d\theta = \vec{\nabla} f \cdot (dr \vec{e_r} + r d\theta \vec{e_\theta})$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{\nabla} f = \frac{\partial f}{\partial r} \vec{e_r} + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta} \vec{e_\theta}}$$

en coordonnées cylindrique (r, θ, z), $r = \|\vec{Om}\|$ et non pas $\|\vec{OM}\|$

$\vec{Om}$ est la projection de $\vec{OM}$ sur le plan (xOy)

$f = f(r, \theta, z)$, on va calculer $\vec{dr}$

$\vec{r} = \vec{Om} + \vec{mM}$

$\vec{r} = r\vec{e_r} + z\,\vec{k}$

$$\boxed{\vec{dr} = dr\,\vec{e_r} + r d\theta\,\vec{e_\theta} + dz\,\vec{k}}$$

$df = \frac{\partial f}{\partial r} . dr + \frac{\partial f}{\partial \theta} . d\theta + \frac{\partial f}{\partial z} dz = \vec{\nabla} f (dr \vec{e_r} + r d\theta \vec{e_\theta} + dz \vec{k})$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{\nabla} f = \frac{\partial f}{\partial r} \vec{e_r} + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta} \vec{e_\theta} + \frac{\partial f}{\partial z} \vec{k}}$$

en coordonnées sphériques (voir la même démonstration que la vitesse

$\vec{dr} = r\,dr\,\vec{e_r} + r d\theta\,\vec{e_\theta} + r \sin\theta\, d\varphi\,\vec{e_\varphi}$. $\{\vec{r} = \vec{OM}\}$

$f = f(r, \theta, \varphi) \mapsto df = \frac{\partial f}{\partial r} . dr + \frac{\partial f}{\partial \theta} . d\theta + \frac{\partial f}{\partial \varphi} . d\varphi$

$= \vec{\nabla} f \cdot (dr \vec{e_r} + r d\theta \vec{e_\theta} + r \sin\theta\, d\varphi\, \vec{e_\varphi})$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{\nabla} f = \frac{\partial f}{\partial r} \vec{e_r} + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta} \vec{e_\theta} + \frac{1}{r \sin\theta} \frac{\partial f}{\partial \varphi} \vec{e_\varphi}}$$

EX 5 :

1) une particule se déplace sur une courbe donné.
(∀ la forme de la courbe) => un seul degré de liberté

2) Cinq particules qui se deplacent librement sur un plan => nombre de degré de liberté = 10.
($z_1=0, z_2=0, z_3=0, z_4=0, z_5=0$, $n=3N-K=3(5)-5=10$)

3) deux points se déplacent sur une plan et reliées par 1 tige régide => nombre de degré de liberté = 3.
($z_1=0, z_2=0$ et $(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2=\ell^2$, $n=3N-K=3\times2-3=3$.

(5